Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Ivars, Pere; Fernández, Ceneida

Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años

Educación Matemática, vol. 28, núm. 1, abril, 2016, pp. 9-38
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años

Multiplicative structure problems: Evolution of students' levels of success and strategies from 6 to 12 years

Pere Ivars*
Ceneida Fernández**

Resumen: El objetivo de este estudio es caracterizar la evolución de los niveles de éxito y de las estrategias empleadas por estudiantes de Educación Primaria (edad 6-12 años) cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. Los resultados muestran que los estudiantes de 6-8 años emplearon mayoritariamente estrategias de modelización y conteo, pero a partir del tercer curso la estrategia más empleada fue el algoritmo. Sin embargo, el uso del algoritmo no implicó una disminución de las estrategias incorrectas y vino ligado a la aparición de una estrategia incorrecta: el uso del algoritmo inverso. Estos datos sugieren que la introducción del algoritmo en la resolución de problemas multiplicativos conlleva la disminución del uso de otras estrategias correctas que implicaban una comprensión adecuada de la situación, pero no conllevan una mejora en la comprensión de dichas situaciones.

Palabras clave: *problemas de estructura multiplicativa, estrategias, Educación Primaria, evolución, algoritmo.*

Fecha de recepción: 5 de octubre de 2015. **Fecha de aceptación:** 2 de marzo de 2016.

* Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, España. pere.ivars@ua.es

** Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, España. ceneida.fernandez@ua.es

Abstract: The aim of this study is to characterize the evolution of the levels of success and strategies used by primary school students (6-12 years old) when solving multiplicative structure problems. Results show that students between 6-8 years old used mostly modelling and counting strategies, but after the third course, the majority of students used the algorithm. However, the use of the algorithm did not imply a decrease of the use of incorrect strategies and encouraged the appearance of a new incorrect strategy, the use of the inverse algorithm. These data suggest that the introduction of the algorithm to solve multiplicative structure problems is linked to a decrease in the use of other correct strategies that involved a proper understanding of the situation, but it does not entail an improvement in students' understanding of these situations.

Keywords: *Multiplicative structure problems, strategies, Primary Education, evolution, algorithm.*

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas del siglo XX se llevaron a cabo varias investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales, y se generaron diferentes categorías semánticas para los problemas y categorías de las estrategias de resolución empleadas por los niños (Carpenter, Moser y Romberg, 1982; Castro, 2008; Greer, 1992; Nesher, 1992; Vergnaud, 1990; 1997). Estos estudios originaron diversas perspectivas y aportaron aproximaciones conceptuales para organizar los problemas aritméticos elementales. Vergnaud, introdujo la idea de campo conceptual como un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferente tipo estrechamente interconectados (Vergnaud, 1983), con objeto de organizar las situaciones con estructura aditiva y multiplicativa, vistas como un conjunto de problemas que implican operaciones aditivas (adición, substracción, traslación), o multiplicativas (multiplicación, división, fracción, razón, similitud). En cuanto a las situaciones de estructura multiplicativa, estudios posteriores al de Vergnaud han planteado diferentes aproximaciones que intentan organizarlas (Greer, 1992; Nesher, 1992; Schmidt y Weiser, 1995).

Las estrategias que los niños emplean en la resolución de estos problemas y los diferentes niveles de éxito alcanzados han puesto de manifiesto la dificultad que tienen para comprender las diferentes situaciones multiplicativas (Clark y

Kamii, 1996; García, Vázquez y Zarzosa, 2013; Mulligan y Mitchelmore, 1997; Peled y Nesher, 1988). Esta investigación tiene como objetivo caracterizar la evolución del nivel de éxito y de las estrategias en los problemas de estructura multiplicativa a lo largo de la Educación Primaria (6-12 años).

1.1. Una categorización de los problemas de estructura multiplicativa

En el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, Vergnaud (1997) identifica tres tipos de problemas multiplicativos: I) Isomorfismo de medidas, problemas cuya estructura consiste en una proporción entre dos espacios de medidas M1 y M2; II) Un solo espacio de medidas, problemas en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar designado por la palabra *veces*, y III) Producto de medidas, problemas cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas M1 y M2 en un tercero, M3.

En los problemas de isomorfismo de medidas existe una relación entre cuatro cantidades. En esta categoría se pueden distinguir cuatro tipos de problemas (Vergnaud, 1997; 1983): multiplicación, división partitiva, división medida y problemas de reglas de tres (estos últimos no serán objeto de estudio en el presente trabajo). En los problemas de multiplicación (figura 1a), por ejemplo: *Si un kilogramo de plátanos vale 2€. ¿Cuánto valen 5 kilogramos?*, se debe trasladar la relación entre 1 y 2 a la relación entre 5 y *x* para encontrar la incógnita (que es el total de objetos). En los problemas de división partitiva (figura 1b), por ejemplo: *Ferran compra 4 fichas para la feria que le cuestan 8 euros. Si todas tienen el mismo precio, ¿cuánto le ha costado cada ficha?*, hay que encontrar el valor de la unidad (o número de objetos por grupo). En los problemas de división medida, por ejemplo: *Julia ha puesto los 20 lápices de las bandejas dentro de unos botes. Si ha puesto 4 lápices en cada bote, ¿cuántos botes ha utilizado?*, la incógnita es el número de grupos que se forman de una determinada medida (figura 1c).

Kg	Euros
1	2
5	X

1a. Problema de multiplicación

Fichas	Euros
1	X
4	8

1b. Problema de división partitiva

Botes	Lápices
1	4
X	20

1c. Problema de división medida

Figura 1. Estructura general de problemas de isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1997).

En los problemas denominados de un único espacio de medidas (Vergnaud, 1997) o de comparación multiplicativa (Nesher, 1992) aparecen dos cantidades de una única magnitud o espacio de medidas que se ven afectadas por un escalar, que normalmente viene designado por la expresión lingüística *veces*. Una de estas cantidades actúa como referente y la otra como comparado, y la comparación entre ambas se realiza mediante un escalar (*b*, figura 2). La dirección de la comparación puede ser *veces más que* y *veces menos que*. La estructura general de este tipo de problemas, en función de cuál sea la incógnita que presentan, se muestra en la figura 2.

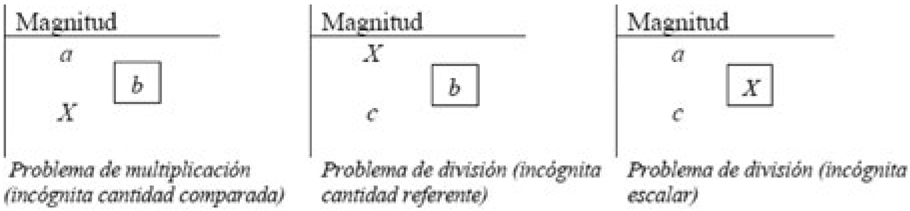


Figura 2. Estructura general de problemas de un único espacio de medida.

En los problemas de multiplicación de esta categoría, por ejemplo: *Para realizar una pancarta la clase A utiliza 2 metros de tela. La clase B utiliza 3 veces más tela que la clase A. ¿Cuánta tela utiliza la clase B?*, la cantidad incógnita X es una medida (la cantidad comparada). En este tipo de problemas, cuando la cantidad incógnita X es la cantidad referente: *Para realizar una pancarta la clase B utiliza 6 metros de tela. La clase B utiliza 3 veces más tela que la clase A. ¿Cuánta tela utiliza la clase A?*, o cuando la incógnita es el escalar: *Para realizar una pancarta la clase A ha utilizado 2 metros de tela mientras que la clase B ha utilizado 6 metros. ¿Cuántas veces más tela ha utilizado la clase B que la clase A?* se generan dos problemas de dividir.

La última categoría, denominada producto de medidas por Vergnaud o producto cartesiano por Nesher (1992) y Greer (1992), está formada por la relación multiplicativa entre dos medidas elementales (M1 y M2), que da como resultado la creación de una nueva medida producto (M3). De esta manera y en función de la medida incógnita que se deba encontrar, surgen dos tipos de problemas; los problemas de multiplicación, en los que se conocen las dos medidas iniciales (*a*, *b*) y se busca la medida producto *X*, por ejemplo: *A las clases de baile asisten 6 chicas y 4 chicos. ¿Cuántas parejas de baile diferentes se pueden realizar?*, y los problemas de división, en los cuales se conoce la medida producto *c* y una de las dos medidas iniciales (por ejemplo *a)*, y se busca la otra medida *X*, como en: *La empresa del comedor escolar ofrece 20 menús diferentes formados por un primer y un segundo plato. Si la empresa cocina 5 primeros platos diferentes, ¿cuántos segundos platos cocina?* (figura 3).

Figura 3. Estructura general de problemas de producto de medidas.

Teniendo en cuenta esta clasificación, en este trabajo consideramos las categorías y tipos de problemas mostrados en la tabla 1.

1.2. Niveles de dificultad de los problemas

Algunas investigaciones han mostrado que los problemas de estructura multiplicativa presentan diferente nivel de dificultad, considerando grupos particulares de problemas y tipos de números usados (naturales o números decimales). Nesher (1992) estableció que, de manera general, los problemas de isomorfismo de medidas eran los más fáciles de resolver, los de producto de medidas (a los que denomina de producto cartesiano) eran los más difíciles y los de comparación multiplicativa se hallarían entre ambos.

Con un foco particular sobre los problemas de isomorfismo de medidas con alumnos de 11 a 16 años, Hart (1981) indicó que era más difícil identificar un problema de multiplicación que uno de división. En este mismo rango de edad, Bell, Fischbein y Greer (1984) indicaron que los problemas de división medida eran más difíciles que los de división partitiva. Estos niveles de dificultad en los problemas de isomorfismo de medidas se reproducen con estudiantes de 5 a 7 años (Kornilaki y Nunes, 1997), y con estudiantes de 5 a 8 años (Squire y Bryant, 2002). Sin embargo, Kinda (2013) no encontró diferencias significativas en la resolución de problemas de división medida y partitiva en alumnos de 3º, 4º, y 5º grado (alumnos de 8 a 11 años), aunque a partir de 6º grado (11-12 años) los problemas de división partitiva resultaban más fáciles, lo que mantiene el patrón relativo al nivel de dificultad.

Tabla 1. Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa

Categoría	**Incógnita**	
Isomorfismo de medidas	Multiplicación	Total de objetos
	División Partitiva	Número de objetos por grupo
	División medida	Número de grupos
Comparación multiplicativa Un único espacio de medidas	Multiplicación	Una medida (cantidad comparada)
	División	Una medida (cantidad referente)
	División	Un escalar
Producto de medidas	Multiplicación	Medida Producto (cantidad compuesta. Se conocen las 2 medidas elementales o componentes)
	División	Una medida elemental (una de los componentes)

En los demás tipos de problemas las investigaciones han sido menores. Con respecto a los problemas de comparación (un solo espacio de medidas), Castro (1995), en un estudio con alumnos de 5º y 6º curso (10 a 12 años) indicó que era más sencillo resolver los problemas en los que se busca la cantidad comparada que en los cuales se debe hallar la cantidad referente o el escalar (factor de comparación). Finalmente, los problemas de producto cartesiano se consideran los más difíciles para los niños de Educación Primaria (6-12 años) (Mulligan y Mitchellmore, 1997; Nesher 1992).

Aunque estas investigaciones aportan información sobre niveles de éxito en la resolución de categorías particulares de problemas, no tenemos información sobre la evolución de estos niveles de éxito en las distintas categorías en el periodo de Educación Primaria (alumnado de 6 a 12 años).

1.3. Estrategias usadas por los estudiantes en la resolución de problemas de estructura multiplicativa

Diferentes estudios se han centrado en las estrategias utilizadas por los estudiantes de Educación Primaria al resolver los problemas de estructura multiplicativa.

Por ejemplo, Mulligan (1992) identificó tres estrategias en los problemas de las tres categorías en estudiantes de 7 y 8 años:

- Modelización con conteo: representación de la acción o relación descrita en el problema con algún material concreto o con los dedos.
- Conteo: La formación de grupos equivalentes para representar cantidades del problema; también estarían incluidos los conteos siguiendo un patrón, o conteo a saltos.
- Aplicación de hechos numéricos conocidos y derivados de la adición y multiplicación.

Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epson (1999) afirmaron que los estudiantes van sustituyendo gradualmente las estrategias de modelización por las de conteo, lo cual indica que aplicar el conteo en los problemas de estructura multiplicativa es más difícil que en los de estructura aditiva. Neuman (1999) subrayó que el conteo es una de las estrategias más frecuentemente utilizadas por el alumnado de 2º curso, y esto muestra una progresión, desde el uso de las estrategias de conteo hasta el uso de hechos numéricos conocidos, que es más eficiente (Verschaffel, Greer y Torbeyns, 2006).

Por otra parte, en la revisión efectuada por Verschaffel y De Corte (1997) se destaca que las estrategias incorrectas más comunes utilizadas en los problemas de estructura multiplicativa son: la estrategia aditiva, uso de todos los números del enunciado y fijarse en las palabras clave del enunciado. Otras investigaciones aportan información sobre las estrategias usadas por los estudiantes en tipos particulares de problemas: Neuman (1999) en los problemas de división medida y división partitiva (tipos de problemas de isomorfismo de medidas) en alumnos de 2º a 6º curso (7 a 12 años) y Castro (1995) en los problemas de comparación multiplicativa con estudiantes de 5º y 6º curso. En cuanto a los problemas de producto de medidas, Nesher (1992) indica que uno de los errores más comunes entre los alumnos de 3º a 6º curso es realizar una suma, cuando lo que se requiere es hacer una multiplicación.

Si bien estas investigaciones han identificado estrategias correctas e incorrectas usadas por los estudiantes de Educación Primaria en las categorías de problemas o en tipos particulares de problemas y en un rango de edad específico, tenemos menos información sobre cómo evoluciona el uso de las diferentes estrategias en las distintas categorías de problemas a lo largo de la Educación Primaria (alumnos de 6 a 12 años).

Teniendo en cuenta estos estudios previos, el objetivo de esta investigación es caracterizar la evolución del nivel de éxito y del uso de las estrategias en los problemas de estructura multiplicativa a lo largo de la Educación Primaria (6-12 años).

2. MÉTODO

2.1. Participantes y contexto

Los participantes fueron 273 estudiantes, con edades comprendidas entre los 6 y los 12 *años*, de un centro público de Educación Primaria de Alicante (España) en el que se impartía docencia en las dos lenguas oficiales; espa*ñol y catalán* (tabla 2). Durante el periodo de recogida de datos, ciclo escolar 2013-2014, cada curso estaba distribuido en dos grupos con diferentes tutores.

Tabla 2. Participantes

CURSO	1º	2º	3º	4º	5º	6º	Total
	42	44	47	47	52	41	**273**

Siguiendo el currículo que regula los contenidos de la Educación Primaria en España, a partir del 2º curso se introduce la multiplicación como suma de sumandos iguales, mientras que en el 3er curso se introducen: la multiplicación como suma de sumandos y la división como resta de grupos iguales, así como el uso de la división para repartir y para agrupar, y como operación inversa de la multiplicación. Además, a partir de 1er curso se introducen planteamientos y estrategias para comprender y resolver problemas de suma y resta referidos a situaciones reales sencillas, los cuales se verán implementados, a partir del 3er curso, con la resolución de problemas numéricos con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones referidas a situaciones reales sencillas de cambio, combinación, igualación, razón y comparación.

2.2. Instrumento

Los participantes contestaron un cuestionario formado por 8 problemas con números naturales, uno de cada categoría de los descritos en la tabla 1. Se diseñaron 3 modelos de cuestionario, uno para el alumnado del 1º y 2º curso (6-8 años), otro para el 3º y 4º (9-10 años), y otro para 5º y 6º (11-12 años), diferenciándolos por el tamaño de los números usados. Para los cursos 1º y 2º se emplearon números menores de 20, para 3º y 4º números menores de 50, y para el 5º y 6º curso números menores de 200. En la redacción de los problemas se procuró usar frases simples que reflejaran la estructura de la relación entre las cantidades, y procurando mantener contextos familiares. En la tabla 3 se presentan los enunciados propuestos para el 1er y 2º curso.

Para cada curso fueron diseñados 3 modelos diferentes de cuestionario (A, B y C), alterando el orden de presentación de los problemas. Los participantes dispusieron de 60 minutos para resolver la tarea, y recibieron como única instrucción la conveniencia de justificar aquello que se hiciese. Las únicas dudas que se resolvieron fueron aquellas que hacían referencia al vocabulario incluido en los enunciados. Por otra parte, los alumnos del 1er y 2º curso fueron entrevistados si no aportaban información sobre la estrategia que empleaban, preguntándoles cómo habían realizado el ejercicio.

Tabla 3. Problemas del cuestionario para el 1º y 2º cursos

Categoría	Tipos	Problema
Isomorfismo de medidas	Multiplicación	En el patio del colegio hay 4 farolas. Si en cada farola hay 3 bombillas. ¿Cuántas bombillas hay en total?
	División Partitiva	Juan tiene 10 caramelos que quiere repartir en partes iguales entre sus 5 mejores amigas. ¿Cuántos caramelos dará a cada una de ellas?
	División medida	Ana quiere repartir 8 caramelos entre sus amigas. Si le da 2 caramelos a cada una de ellas, ¿cuántas amigas tiene Ana?
Comparación multiplicativa	Multiplicación	La clase de 1º para confeccionar sus disfraces de superhéroes ha utilizado 8 metros de tela. La clase de 5º ha utilizado 3 veces más de tela que la de 1º. ¿Cuánta tela ha empleado la clase de 5º?
	División	Este año los alumnos de 5º para realizar un mural han utilizado 2 veces más de papel continuo que utilizaron el año pasado. Si este año se han utilizado 8 metros de papel. ¿Cuántos metros de papel se utilizó el año pasado?

Tabla 3. Problemas del cuestionario para el 1º y 2º cursos (*Continuación*)

Categoría	Tipos	Problema
	División	Julián tiene 12 años y Marta tiene 6. ¿Cuántas veces más años tiene Julián que Marta?
Producto de medidas	Multiplicación	El menú escolar está formado por dos platos principales, el primero y el segundo. Si la empresa que realiza el menú escolar tiene 2 primeros platos y 3 segundos. ¿Cuántos menús diferentes puede realizar?
	División	La empresa escolar combinando los primeros y los segundos platos ofrece 12 menús diferentes. Si hay 3 primeros platos diferentes, ¿cuántos segundos platos hay?

2.3. Análisis

Las respuestas a los problemas fueron analizadas considerando el éxito en la resolución y las estrategias utilizadas.

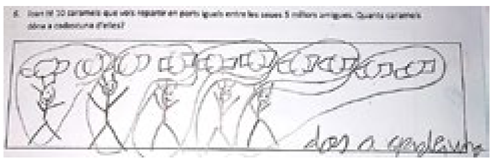
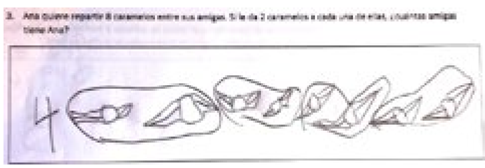
En primer lugar se asignó el valor 1 a las respuestas correctas y 0 para las incorrectas. Las respuestas erróneas sobrevenidas a causa de errores de cálculo pero que demostraban una comprensión de la relación entre las cantidades implicadas, fueron contabilizadas como respuestas correctas. En segundo lugar se analizaron las estrategias empleadas. Inicialmente tres investigadores efectuaron un análisis conjunto de una muestra de respuestas, para generar descriptores de las estrategias en cada tipo de problema. Estos descriptores fueron refinados según se iban analizando nuevas respuestas. Este proceso se repitió para cada tipo de problema y, finalmente, se consideraron conjuntamente las estrategias en todos los problemas para ver si había evidencia de solapamiento entre ellas. Este proceso generó 5 categorías para las estrategias correctas y otras 5 categorías en las estrategias incorrectas. Una estrategia se consideró correcta si había evidencias de que el resolutor reconocía las relaciones multiplicativas entre las cantidades que definían la situación.

Las cinco estrategias correctas fueron: *i)* Modelización-gráfica, *ii)* Conteo, *iii*) Uso de hechos numéricos, *iv*) Uso del algoritmo, y *v*) Multiplicación como suma de sumandos iguales. Ejemplos de estas estrategias se muestran a continuación.

Modelización-gráfica

En esta estrategia los alumnos representan gráficamente las cantidades y la relación entre las mismas. Esta estrategia fue utilizada en los problemas de isomorfismo de medidas y adoptó diferentes formas según el tipo de problema (tabla 4).

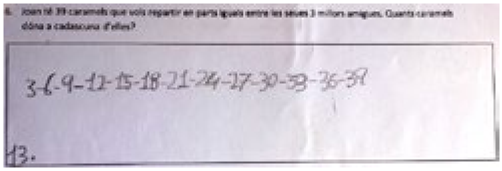
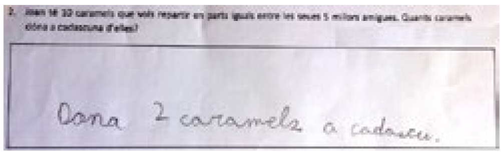
Tabla 4. Estrategias de modelización-gráfica.

Agrupamiento. Estrategia utilizada en los problemas de isomorfismo de medidas de multiplicación, en la que se forman grupos con el mismo número de elementos. Posteriormente se cuentan todos los elementos que se tienen. Por ejemplo, el estudiante del ejemplo forma 4 grupos (farolas) con 3 bombillas en cada una y posteriormente cuenta el número total de bombillas.	 Estrategia: modelización agrupamiento (2º curso).
Reparto. Utilizada en los problemas de isomorfismo de medidas de tipo división partitiva. El estudiante representa gráficamente el proceso de reparto y luego cuenta los elementos que tiene un grupo. El estudiante del ejemplo reparte un caramelo a cada grupo, representado por el dibujo de un niño, hasta que no le quedan caramelos para repartir. Posteriormente cuenta los caramelos en cada grupo y da como respuesta *dos a cada uno*.	 Estrategia: modelización reparto (2º curso).
Medida. Estrategia empleada en problemas de isomorfismo de medidas de división medida y también en los problemas de división partitiva. En el ejemplo (div. medida), el estudiante representa el total de caramelos (8) y los agrupa de 2 en 2 para responder el número total de grupos que forma: *a 4 amigas puede repartir.*	 Estrategia: modelización medida (1er curso).

Conteo

Esta estrategia se ha empleado en los problemas de isomorfismo de medidas de división partitiva y de división medida, adoptando diferente forma según el tipo de problema (tabla 5).

Tabla 5. Estrategias de conteo.

Conteo a saltos. Por ejemplo, el estudiante cuenta de 3 en 3 hasta llegar al número proporcionado, para posteriormente ofrecer como solución el número de grupos formados.	 Estrategia: conteo a saltos (3er curso).
Conteo por ensayo y error. (En los problemas de división reparto). Los niños prueban con un número de objetos n, cuentan de n en n cada vez, para ver si llegan a la cantidad total. Cuando el conteo coincide con el número total de objetos, responden al problema con el número de objetos con el que han empezado a contar. En este caso el estudiante, al ser entrevistado por el investigador, muestra contando con los dedos que si le daba 1 caramelo a cada amiga no llegaba a 10 y por eso le daba 2 a cada amiga y los estaba repartiendo todos.	 Estrategia: conteo por ensayo error (1er curso).

Uso de hechos numéricos

Esta estrategia implica utilizar hechos numéricos (el uso de las tablas de multiplicar). Se ha observado su uso en los problemas de isomorfismo de medidas de división medida (figura 4), así como en los de comparación multiplicativa en los que se busca el referente o el escalar. En el ejemplo *(Ana va a repartir 35 cara-*

melos entre sus amigas. Si da 7 caramelos a cada una de ellas ¿cuántas amigas tiene?), el estudiante realizó una multiplicación (aunque posteriormente la borró) para comprobar que si reparte 7 caramelos a 5 amigas, ha repartido los 35 caramelos que disponía. Nosotros conjeturamos que el niño se apoya en el conocimiento (o construcción) del hecho numérico 7x5=35 para encajar este hecho en su comprensión de la situación a través de 35 = 7 x ☐.

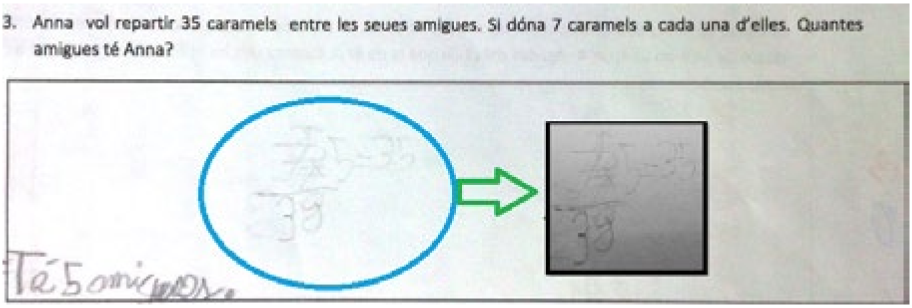


Figura 4. Estrategia: uso de hechos numéricos (3er curso).

Uso del algoritmo

Esta estrategia fue usada en todas las categorías a partir del 3er curso. Los estudiantes utilizan el algoritmo de las operaciones de multiplicar o dividir. Por ejemplo, el alumno de la figura 5 multiplica los 12 primeros platos del menú escolar con los 11 segundos para responder al total de menús diferentes que pueden realizarse.

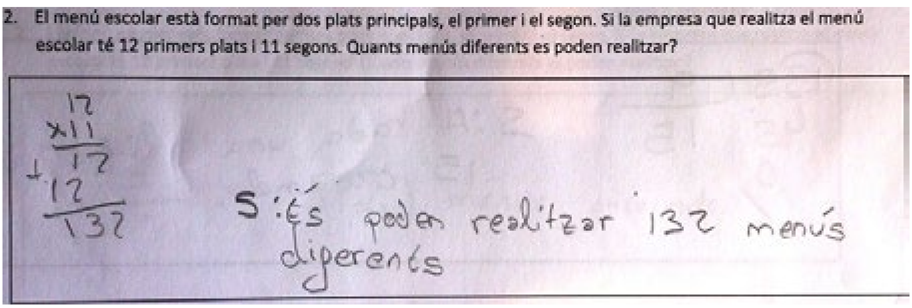


Figura 5. Estrategia: uso del algoritmo (3er curso).

Multiplicación como suma de sumandos iguales

Uso de la multiplicación como suma de sumandos iguales. Esta estrategia se da en los problemas de isomorfismo de medidas de multiplicación y división medida, en los problemas de comparación multiplicativa de multiplicación y en los de división, con incógnita el referente, y en los problemas de producto de medidas de multiplicación. En el ejemplo mostrado en la figura 6, el estudiante suma las bombillas de cada farola tantas veces como farolas le indica el problema que hay, para dar la respuesta correcta.

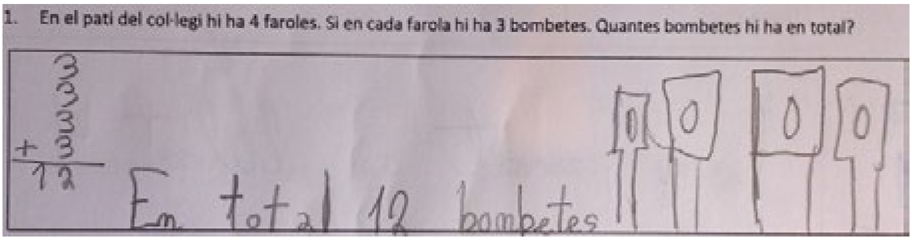


Figura 6. Estrategia: multiplicación como suma de sumandos iguales (2º curso). (*En el patio del colegio hay 4 farolas. Si cada farola tiene 3 bombillas. ¿Cuántas bombillas hay en total?*).

Las estrategias incorrectas se agruparon en 5 categorías: *i*) Uso del algoritmo inverso, *ii*) Uso de relaciones aditivas no adecuadas (aditiva), *iii*) Uso de todos los números del enunciado, *iv*) Combinación uno a uno, y *v*) Otras, en las que agrupamos las estrategias sin sentido y las respuestas en blanco.

Uso del algoritmo inverso

Esta estrategia incorrecta se usó en los problemas de isomorfismo de medidas de multiplicación y de división partitiva, en los de comparación multiplicativa de división en los que la incógnita es el referente o el escalar, y en los de producto de medidas de división. La estrategia utilizada se basa en usar la operación inversa a la correcta para ofrecer una solución. Por ejemplo, el estudiante de la figura 7 resuelve el problema haciendo la operación de dividir, cuando la operación correcta es la multiplicación.

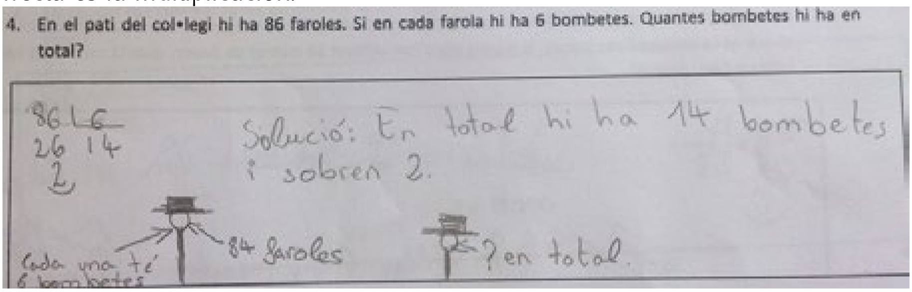


Figura 7. Estrategia: uso del algoritmo inverso en un problema isomorfismo de medidas de multiplicación (5º curso).
(*En el patio del colegio hay 86 farolas. Si cada farola tiene 6 bombillas. ¿Cuántas bombillas hay en total?*).

Aditiva

Se hacen sumas o restas con los datos que proporciona el enunciado. Estrategia usada en todas las categorías de problemas, aunque con mayor incidencia en los de comparación multiplicativa, donde la incógnita es el escalar, y en los de producto de medidas de multiplicación y de división. Por ejemplo, el estudiante de la figura 8 suma los 12 primeros platos y los 11 segundos para obtener la solución del problema (las distintas combinaciones).

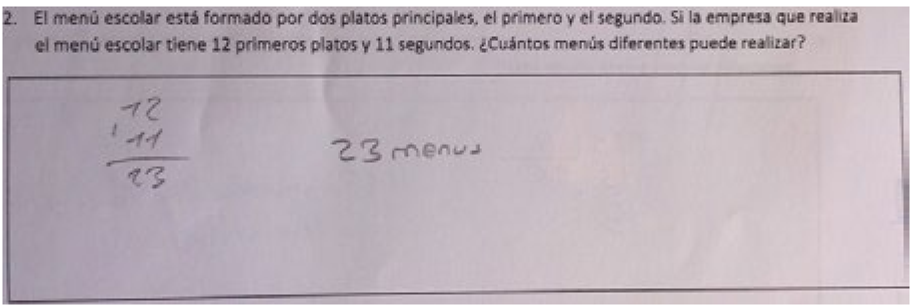


Figura 8. Estrategia: aditiva (6º curso).

Uso de todos los números del enunciado

Se utilizan todos los números del enunciado, aunque sean datos o caracteres numéricos. La figura 9 muestra un ejemplo de uso de esta estrategia en un problema de comparación multiplicativa de multiplicación, en la que se utilizan tanto los datos del problema (8 metros de tela y 3 veces más tela) como los que indican el curso (1º y 5º).

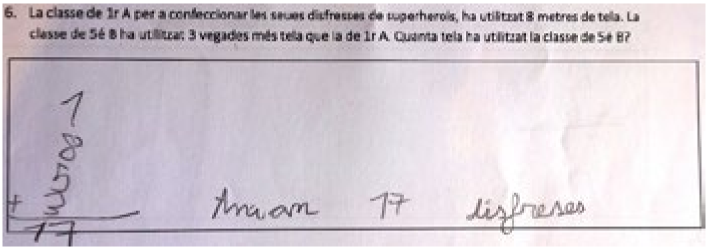

6. La classe de 1r A per a confeccionar les seues disfresses de superherois, ha utilitzat 8 metres de tela. La classe de 5é B ha utilitzat 3 vegades més tela que la de 1r A. Quanta tela ha utilitzat la classe de 5é B?

Figura 9. Uso de todos los números del enunciado (2º curso).
(*La clase de 1º para confeccionar sus disfraces de superhéroes ha utilizado 8 metros de tela. La clase de 5º ha utilizado 3 veces más de tela que la de 1º ¿Cuánta tela ha utilizado la clase de 5º?).*

Combinación 1 a 1

En los problemas de producto de medidas de multiplicación se combinan los elementos 1 a 1, sin tener en cuenta que pueden hacerse repeticiones, tal y como se observa en la figura 10. El estudiante responde que si hay 12 primeros y 11 segundos, pueden prepararse 11 menús diferentes y sobra un plato.

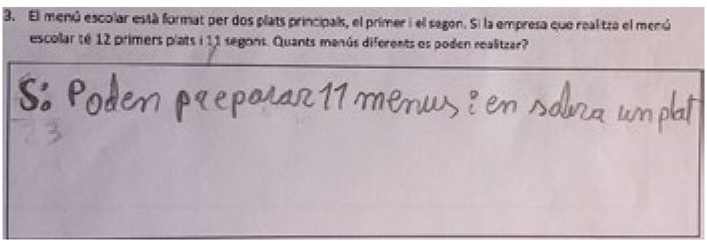

3. El menú escolar està format per dos plats principals, el primer i el segon. Si la empresa que realitza el menú escolar té 12 primers plats i 11 segons. Quants menús diferents es poden realitzar?

Figura 10. Estrategia: combinación 1 a 1 (5º curso). *(El menú escolar está formado por 2 platos principales, el primero y el segundo. Si la empresa que realiza el menú escolar tiene 12 primeros platos y 11 segundos.* ¿Cuántos menús diferentes se pueden realizar?)

3. RESULTADOS

Los resultados se presentan en dos apartados. En el primero, la evolución de los niveles de éxito de los diferentes problemas del 1º al 6º curso (6-12 años) y una clasificación de los problemas en función de su nivel de dificultad; y en el segundo, la evolución en el uso de las estrategias correctas e incorrectas del 1º al 6º curso.

3.1. Evolución de los niveles de éxito a lo largo de Educación Primaria

La tabla 6 muestra los niveles de éxito de los estudiantes en cada uno de los problemas, por curso.

Considerando estos resultados globalmente, hubo un aumento progresivo del nivel de éxito en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa, desde 10% en 1er curso hasta 68% en 6º curso, sin embargo esta evolución no fue uniforme en las diferentes categorías de problemas ni en los diferentes tipos de problemas dentro de cada categoría. Por otra parte, los porcentajes de éxito en 5º y 6º curso (62% y 68%, respectivamente) se consideran relativamente bajos y muestran las dificultades en la resolución de problemas de estructura multiplicativa en Educación Primaria.

Haciendo el análisis por cursos, para los alumnos de 1er curso los problemas más fáciles fueron los de isomorfismo de medidas, que son los únicos que pudieron resolver (36% multiplicación, 19% división partitiva y 26% división medida). En 2º curso los problemas más fáciles fueron, al igual que en el 1er curso, los de isomorfismo de medidas (50% multiplicación, 20% división partitiva y 30% división medida), seguidos de los de comparación multiplicativa (7% multiplicación con incógnita el comparado y 9% multiplicación con incógnita el referente) y los de producto de medidas. Ningún estudiante de 2º curso fue capaz de resolver correctamente los problemas de producto de medida. A partir del 3er curso, los alumnos resuelven con éxito problemas de todas las categorías y tipos, siguiendo el mismo patrón de dificultad en cuanto a tipología de problemas: los problemas más fáciles son los de isomorfismo de medidas, seguidos por los de comparación multiplicativa y, por último, los de producto de medidas.

Si analizamos la evolución en el nivel de éxito a lo largo de Educación Primaria de las diferentes categorías de problemas, es posible identificar características relevantes. En la categoría isomorfismo de medidas en los tres primeros cursos,

Tabla 6. Niveles de éxito en cada uno de los problemas, por curso

	Isomorfismo de medidas			Comparación multiplicativa			Producto de medidas		
Curso	**Multiplic.**	**División partitiva**	**División medida**	**Multiplica. Incóg. Comp.**	**División Incóg. Ref.**	**División Incóg. Esc.**	**Multiplic.**	**División**	**Total**
1º	36%	19%	26%	0%	0%	0%	0%	0%	**10%**
2º	50%	20%	30%	7%	9%	0%	0%	0%	**14%**
3º	72%	68%	55%	51%	15%	15%	17%	15%	**39%**
4º	81%	89%	87%	72%	43%	21%	21%	26%	**55%**
5º	87%	98%	77%	92%	65%	23%	19%	31%	**62%**
6º	93%	100%	95%	88%	61%	49%	24%	34%	**68%**

los problemas de multiplicación son los más fáciles (frente a los dos tipos de división), siendo los problemas de división medida más fáciles en 1er y 2º curso, y los de división partitiva más fáciles en 3er curso (invirtiéndose en este curso el nivel de dificultad para los dos problemas de dividir). Sin embargo, en los tres últimos cursos los problemas de división partitiva fueron los más fáciles, seguidos de los de división medida y por último los de multiplicación (a excepción del 5º curso, donde disminuyó el porcentaje de éxito en los de división medida).

En relación a los problemas de comparación multiplicativa, se mantiene el mismo patrón a partir del 3er curso (en 2º, el porcentaje de éxito fue muy bajo). Los problemas de multiplicación fueron los más fáciles en todos los cursos, mientras que entre los problemas de dividir, los problemas con incógnita el escalar eran más difíciles que los problemas con la incógnita el referente.

Por último, en los problemas de producto de medidas, los problemas de multiplicación fueron más fáciles en 3º, pero a partir del 4º curso los problemas más fáciles en esta categoría fueron los de división.

Clasificación de los problemas en función de su nivel de dificultad

Considerando los niveles de éxito a lo largo de la Educación Primaria por intervalos de edad (6-8 años, 9-10 años, 11-12 años) se puede establecer una jerarquía (tabla 7). Al agrupar los datos por porcentajes de éxito en cada ciclo educativo (tabla 7) podemos generar los siguientes niveles de dificultad:

- Nivel 1. Los problemas de isomorfismo de medidas de multiplicación y de división partitiva (que alcanzan en 2º ciclo entre 76 y 100% de éxito).
- Nivel 2. Los problemas de isomorfismo de medidas de división medida y los de comparación de multiplicación (que alcanzan en 2º ciclo entre 51 y 75% de éxito).
- Nivel 3. Los problemas de comparación de división con incógnita el referente (que alcanza en 2º ciclo entre 26% y 50% de éxito, y en 3er ciclo entre 51% y 75% de éxito).
- Nivel 4. Los problemas de comparación de división con incógnita el escalar y los problemas de producto de medidas de división (que sólo alcanzan entre 26% y 50% de éxito en 3er ciclo).
- Nivel 5. Los problemas de producto de medidas de multiplicación (alcanzan entre 0% y 25% de éxito en 3er ciclo).

Tabla 7. Niveles de dificultad de los problemas, por ciclo

CICLO/ PORCENTAJE	0-25%	26-50%	51-75%	76-100%
6-8 años(1º)	Is. Med. Div. Partitiva Comp. Incog. Com (Mult.) Com. Incog. Refer. (Div.)	Is. Med. Multiplic. Is. Med. Div. Medida		
8-10 años (2º)	Comp. Incog. Escalar (Div.) Prod. Med. Multiplic. Prod. Med. Div.	Com. Incog. Refer. (Div.)	Is. Med. Div. Medida Comp. Incog. Com (Mult.)	Is. Med. Multiplic. Is. Med. Div. Partitiva
10-12 años (3º)	Prod. Med. Multiplic.	Comp. Incog. Escalar (Div.) Prod. Med. Div.	Com. Incog. Refer. (Div.)	Is. Med. Multiplic. Is. Med. Div. Partitiva Is. Med. Div. Medida Comp. Incog. Com (Mult.)

3.2. Evolución de las estrategias del 1º al 6º curso

La evolución del porcentaje de uso de las estrategias correctas e incorrectas utilizadas por los estudiantes de Educación Primaria a lo largo de los 6 cursos (figura 11) muestra la complementariedad entre la emergencia del algoritmo como estrategia correcta y la aparición de estrategias incorrectas. Así, en 2º curso, cuando se empieza a introducir en el currículo el algoritmo de la multiplicación, aparece de manera notoria la estrategia incorrecta aditiva.

Otro hecho relevante es que en los primeros cursos, los estudiantes emplean un mayor número de estrategias correctas diferentes, y la más usada es la estrategia de modelización. Sin embargo, el uso de estrategias correctas en estos dos primeros cursos es muy bajo (no supera 20%). La estrategia más usada en el 1er curso fue una estrategia incorrecta que corresponde al uso de estrategias sin

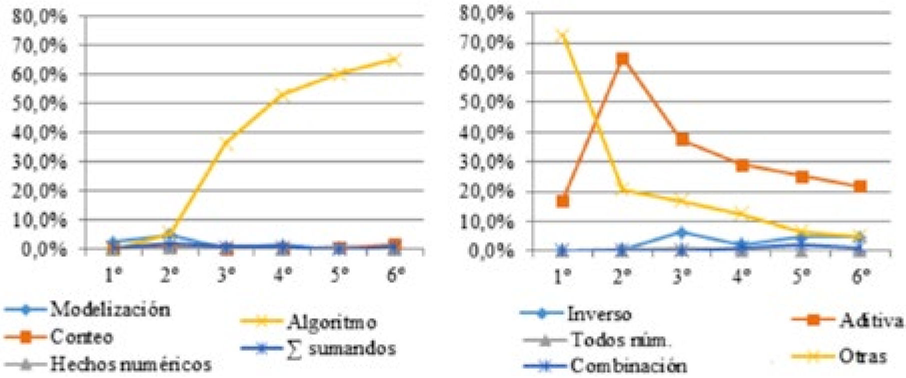


Figura 11. Evolución del porcentaje de uso de estrategias correctas e incorrectas a lo largo de Educación Primaria.

sentido (incluyendo las respuestas en blanco). A partir del 2º curso la estrategia incorrecta más utilizada es la aditiva. Ambas estrategias incorrectas muestran porcentajes cada vez menores que se complementan, a medida de que los cursos avanzan, con un aumento en el uso del algoritmo.

A partir del 3er curso, y coincidiendo con la introducción del algoritmo de la división, la estrategia uso del algoritmo crece rápidamente y el uso del resto de estrategias correctas tiende a desaparecer (la siguiente estrategia más utilizada en 6º curso es la de conteo, con 1.5%). Sin embargo, con la aparición del uso del algoritmo emerge la estrategia incorrecta del uso del algoritmo inverso, que se consolida como la tercera estrategia errónea más usada en todos los cursos a partir de ese momento. Las tablas 8, 9 y 10 muestran el porcentaje de uso de las estrategias correctas e incorrectas, por tipo de problema y curso.

La tabla 8 muestra la utilización, en los primeros cursos (1º y 2º), de estrategias de modelización y de suma de sumandos iguales para dar respuesta a los problemas de isomorfismo de medidas. Esta última estrategia, que proviene de las estructuras aditivas, tiende a desaparecer en cursos posteriores. Esta categoría de problemas es la única que resuelven los estudiantes de 1er curso. En el 2º curso se produce una disminución de ambas estrategias y emerge la estrategia del uso del algoritmo en los problemas de multiplicación (36%) y en los problemas de comparación multiplicativa donde la incógnita es la cantidad de referencia o la cantidad comparada. Sin embargo, el aumento del uso del algoritmo va

Tabla 8. Estrategias correctas e incorrectas en 1º y 2º curso, por tipo de problema

	Problemas		Estrategias correctas.						Estrategias incorrectas			
	Categ.	Tipo	Mod.	Cont.	Hec. N.	Algo.	∑ de sum.	Alg. inv.	Adit.	Tod.	Otras	Comb.
PRIMERO	Isom. Med.	Multiplicación	26%	-	-	-	10%	-	24%	-	40%	-
		Div. Partitiva	14%	5%	-	-	-	-	21%	-	60%	-
		Div. Medida	24%	-	-	-	2%	-	21%	-	53%	-
	Comp. Mult.	Mult/Comparado	-	-	-	-	-	-	17%	-	83%	-
		Div./Referente	-	-	-	-	-	-	12%	-	88%	-
		Div./Escalar	-	-	-	-	-	-	17%	-	83%	-
	Prod-Med	Mult/Total	-	-	-	-	-	-	14%	-	86%	-
		Div./Parte	-	-	-	-	-	-	12%	-	88%	-
SEGUNDO	Isom. Med.	Multiplicación	9%	-	-	36%	2%	-	44%	-	9%	-
		Div. Partitiva	11%	5%	-	-	-	5%	68%	-	11%	-
		Div. Medida	18%	2%	-	-	7%	-	62%	-	11%	-
	Comp. Mult.	Mult/Comparado	-	-	-	7%	-	-	68%	-	25%	-
		Div./Referente	-	-	5%	-	5%	-	68%	2%	20%	-
		Div./Escalar	-	-	-	-	-	-	80%	-	20%	-
	Prod-Med	Mult/Total	-	-	-	-	-	-	70%	-	30%	-
		Div./Parte	-	-	-	-	-	-	61%	-	39%	-

ligado a un aumento del uso de la estrategia incorrecta aditiva y a una disminución de las estrategias sin sentido y en blanco (otras).

A partir de 3º (tabla 9), en todas las categorías de problemas los estudiantes tienen algún porcentaje de éxito, utilizando mayoritariamente el algoritmo. Este hecho coincide con su aparición en el currículo (tanto el de la multiplicación, que ya se introduce en 2º, como el de la división que se introduce en 3er curso). Sin embargo, el uso del algoritmo no implicó la desaparición del uso de estrategias incorrectas, sino que un alto porcentaje de alumnos continuaron utilizando estrategias aditivas incorrectas en la mayoría de los problemas (el porcentaje es mayor en las categorías de comparación y producto de medidas), y de estrategias sin sentido (otras). En 3er curso aparece otra estrategia incorrecta ligada a la aparición del algoritmo, el uso del algoritmo inverso.

El aumento del uso del algoritmo en todos los tipos de problemas es prácticamente progresivo a medida que avanzan los cursos (tabla 10), excepto en los problemas de comparación multiplicativa de tipo multiplicación (incógnita el comparado) y de tipo división (incógnita el referente), en los que los porcentajes disminuyen considerablemente en 6º curso. De 92% de uso del algoritmo en 5º en los problemas de multiplicación, se desciende a 85%; aunque hay crecimiento de 2% en el uso de la estrategia de suma de sumandos iguales, el resto de estudiantes utilizaron estrategias incorrectas (aumenta la aditiva y otras estrategias incorrectas). En los problemas de tipo división también existe disminución en el uso del algoritmo (de 65% en 5º a 59% en 6º), complementado con el aumento de la estrategia incorrecta uso del algoritmo inverso (pasa de 15% a 24%) y otras estrategias sin sentido (pasan de 8% a 10%).

En 6º curso se puede observar un aumento del uso de la estrategia de conteo para dar resolución a los problemas de comparación multiplicativa tipo división en los que se busca el escalar, pues aumenta hasta 7%. Es utilizada también la estrategia de conteo, en este curso, para resolver los problemas de isomorfismo de medidas de tipo división medida (5%).

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este estudio examina la evolución del nivel de éxito y las estrategias usadas en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa a lo largo de la Educación Primaria (desde 6 hasta 12 años). Los resultados nos han permitido: (i) Proponer una clasificación de los problemas en función del nivel de dificultad, y

Tabla 9. Estrategias correctas e incorrectas utilizadas en 3º y 4º curso, por tipo de problema

Problemas			Estrategias correctas					Estrategias incorrectas				
	Categ.	Tipo	Mod.	Cont.	Hec. N.	Algo.	$\sum$ de Sum.	Alg.inv.	Adit.	Tod.	Otras	Comb.
TERCERO	Isom. Med.	Multiplicación	4%	-	-	64%	4%	-	24%	-	4%	-
		Div. partitiva	-	-	-	66%	-	9%	14%	-	11%	-
		Div. medida	-	-	2%	53%	-	2%	22%	-	21%	-
	Comp. Mult.	Mult./Comparado	-	-	-	49%	2%	4%	28%	2%	15%	-
		Div./Referente	-	-	-	15%	-	28%	32%	4%	21%	-
		Div./Escalar	-	-	2%	13%	-	2%	70%	-	13%	-
	Prod-Med	Mult./Total	-	-	-	17%	-	-	51%	-	32%	-
		Div./Parte	-	-	-	15%	-	6%	52%	-	17%	-
CUARTO	Isom. Med.	Multiplicación	-	-	-	81%	-	-	13%	-	6%	-
		Div. partitiva	4%	-	-	85%	-	-	6%	-	5%	-
		Div. medida	6%	-	-	81%	-	-	9%	-	4%	-
	Comp. Mult.	Mult./Comparado	-	-	-	70%	2%	-	24%	2%	2%	-
		Div./Referente	-	-	-	43%	-	17%	25%	-	15%	-
		Div./Escalar	-	-	-	21%	-	-	64%	-	15%	-
	Pro Med	Mult./Total	-	-	-	17%	4%	-	40%	-	30%	9%
		Div./Parte	-	-	-	26%	-	-	52%	-	23%	-

Tabla 10. Estrategias correctas e incorrectas utilizadas en 5º y 6º curso, por tipo de problema

	Problemas		Estrategias correctas					Estrategias incorrectas				
	Categ.	**Tipo**	**Mod.**	**Cont.**	**Hec. N.**	**Algo.**	**$\sum$ de Sum.**	**Alg.inv.**	**Adit.**	**Tod.**	**Otras**	**Comb.**
QUINTO	Isom. Med.	Multiplicación	-	-	-	87%	-	6%	7%	-	-	-
		Div. partitiva	-	-	-	98%	-	-	2%	-	-	-
		Div. medida	-	-	-	77%	-	4%	6%	-	13%	-
	Comp. Mult.	Mult/Comparado	-	-	-	92%	-	2%	4%	-	2%	-
		Div./Referente	-	-	-	65%	-	15%	12%	-	8%	-
		Div./Escalar	-	2%	2%	19%	-	8%	63%	-	6%	-
	Prod-Med	Mult./Total	-	-	-	19%	-	-	52%	-	12%	17%
		Div./Parte	-	2%	4%	25%	-	2%	55%	-	12%	-
SEXTO	Isom. Med.	Multiplicación	-	-	-	93%	-	7%	-	-	-	-
		Div. partitiva	-	-	-	100%	-	-	-	-	-	-
		Div. medida	2%	5%	-	85%	2%	-	-	-	6%	-
	Comp. Mult.	Mult/Comparado	-	-	-	85%	2%	-	8%	-	5%	-
		Div./Referente	-	-	-	59%	-	24%	7%	-	10%	-
		Div./Escalar	-	7%	-	41%	-	-	49%	-	2%	-
	Prod-Med	Mult./Total	-	-	-	24%	-	5%	51%	-	10%	10%
		Div./Parte	-	-	-	34%	-	-	59%	-	7%	-

(ii) Mostrar características de la evolución de uso de las estrategias correctas e incorrectas a lo largo de la Educación Primaria. Finalmente, presentamos algunas implicaciones de estos resultados en la enseñanza, así como preguntas abiertas para futuras investigaciones.

4.1. Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa en función del nivel de dificultad

Los problemas de isomorfismo de medidas fueron los más fáciles para los alumnos, seguidos de los problemas de comparación multiplicativa. Los problemas de producto cartesiano son los que presentan mayor dificultad a lo largo de toda la Educación Primaria. Este resultado confirma el obtenido por Nesher (1992) con alumnos de 5º y 6º curso, y lo amplia desde 1º a 6º curso.

En los problemas de isomorfismo de medidas, nuestros resultados complementan los estudios con estudiantes de 11 a 16 años de Hart (1981), quien afirmaba que los alumnos identifican más fácilmente un problema de división que uno de multiplicación, y de Bell *et al.* (1984), que indicaban que son más difíciles los problemas de división medida que los de división partitiva. En nuestro caso, a partir del 4º curso (9 años) los resultados coinciden con estos autores. Sin embargo, los alumnos entre 6 y 9 años tuvieron más éxito en la resolución de los problemas de multiplicación que en los de división, y obtuvieron mayor porcentaje en los problemas de división medida que en los de división partitiva.

Por lo que respecta a los problemas de comparación multiplicativa, nuestros resultados indican que los problemas en los que la incógnita es la cantidad comparada (multiplicación) son más sencillos que en los que se busca la cantidad referente o escalar (ambos de división) (Castro, 1995). En esta categoría los problemas de división en los que se busca el escalar son tan difíciles como los de producto de medidas. En cuanto a los de producto de medidas, los resultados indican que resulta más sencillo resolver los problemas de división (donde la incógnita es una de las medidas elementales) que los de multiplicación (en los que se busca la medida producto).

Estos resultados nos han permitido realizar una clasificación de los problemas, en función del nivel de dificultad. En un primer nivel estarían los problemas de isomorfismo de medidas de multiplicación y de división partitiva. En segundo nivel se encuentran los problemas de división medida y los de comparación de multiplicación. En un tercer nivel quedarían los problemas de comparación de división con incógnita el referente. En cuarto nivel estarían los problemas de comparación de división con incógnita el escalar y los problemas de producto de medidas de división. Por último, en quinto nivel están los problemas de producto de medidas de multiplicación.

4.2. Características de la evolución de las estrategias correctas e incorrectas a lo largo de Educación Primaria

Nuestros resultados muestran el comportamiento complementario en el uso de las estrategias correctas e incorrectas utilizadas por los estudiantes. En los dos primeros cursos, los estudiantes emplearon estrategias de modelización para resolver problemas de isomorfismo de medidas y estrategias de conteo para dar respuesta a los de división partitiva y división medida, desapareciendo el uso de esta estrategia en los demás cursos. Al mismo tiempo, en estos primeros años existe una gran cantidad de estrategias sin sentido y el uso de la estrategia aditiva incorrecta.

A partir del 3er curso la estrategia más empleada en todas las categorías de problemas es el uso del algoritmo (aunque ya en 2º tiene gran relevancia para dar respuesta a problemas de las categorías de isomorfismo de medidas y comparación multiplicativa (ambos de tipo multiplicación). Este resultado confirma los obtenidos por Verschaffel, Greer y Torbeyns (2006), quienes postularon que, a pesar de que los estudiantes poseen inicialmente un elevado número de estrategias informales, tras la introducción del algoritmo se observa una tendencia a dejar de utilizarlas para aplicar el algoritmo, incluso en situaciones donde dichas estrategias serían más eficientes. Este resultado muestra que el énfasis sobre los procedimientos (algoritmo) impide a los niños de Educación Primaria desarrollar y fortalecer otras estrategias que puedan poner de manifiesto su comprensión de las relaciones entre las cantidades, llevándolos a aplicar estrategias incorrectas, como la estrategia aditiva o el uso del algoritmo inverso. La sustitución de diferentes estrategias por el uso prioritario de los algoritmos en los momentos en que se introduce en el currículo (2º y 3er curso), va vinculada a la continuación del uso de estrategias aditivas incorrectas y a la aparición del uso incorrecto del algoritmo inverso. Este hecho parece sugerir que el énfasis sobre los procedimientos (el algoritmo) puede llevar a algunos estudiantes de primaria a no centrar su atención sobre la relación entre las cantidades en las situaciones para determinar la adecuación del uso del algoritmo. Además, el hecho de que los estudiantes usen las operaciones de multiplicar y dividir para resolver las situaciones no implica que vinculen el significado de la operación a la situación que esta operación modeliza.

Los resultados obtenidos sugieren, de acuerdo con Mulligan (1992) y Verschaffel y De Corte, (1997), que los estudiantes disponen de un repertorio amplio de estrategias que les permiten solucionar con cierta solvencia problemas de estructura multiplicativa desde los primeros cursos. A medida que avanzan los cursos, van abandonando estas estrategias y se utiliza, casi exclusivamente, la aplicación del algoritmo de manera mecánica, lo cual les impide centrar su atención en la relación entre las cantidades en las situaciones, para determinar la adecuación del uso del algoritmo. Sería conveniente analizar con detenimiento por qué el alumnado deja de considerar las demás estrategias a medida que avanzan los cursos (Carpenter y Moser, 1984, en Mulligan, 1992).

4.3. Implicaciones para la enseñanza y futuras investigaciones

Si la resolución de problemas es considerada como la parte más esencial dentro de la educación matemática, deberíamos centrarnos en utilizar esas capacidades para ayudar a los alumnos a completar esa tarea. Es decir, darles oportunidad de resolver problemas usando sus propias estrategias, para propiciar la confluencia de sus capacidades con aproximaciones más formales. Consideramos que así se les ayudaría a dotar de significado a los procedimientos con las operaciones aritméticas. Aunque somos conscientes de que nuestra muestra es pequeña para generalizar los resultados, nos ha permitido identificar aspectos que necesitan mayor investigación. Consideramos que nuestros resultados dan un paso más en cuanto a las características de la evolución del nivel de éxito y las estrategias en los problemas de estructura multiplicativa a lo largo de la Educación Primaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bell, A., Fischbein, E. y Greer, G. (1984). "Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context". *Educational Studies in Mathematics, 15,* pp. 129-148.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. United Kingdom: Portsmouth.

Carpenter, T. P., Moser, J. M. y Romberg, T. A. (Eds.) (1982). *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. (Tesis doctoral) Colección Mathema. Granada: Comares.

Castro, E. (2008). "Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España". En: R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (eds.). *Investigación en educación matemática XII*. Badajoz: SEIEM. pp. 113-140.

Clark, F. B. y Kamii, C. (1996). "Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5". *Journal for Research in Mathematics Education 27*, pp. 41-51.

García, A., Vázquez, J. y Zarzosa, L. (2013). "Solución estratégica a problemas matemáticos verbales de una operación. El caso de la multiplicación y la división". *Educación Matemática* 25(3), pp. 103-128.

Greer, B. (1992). "Multiplication and division as models of situations". En: D. Grows (eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan, pp. 276-295.

Hart, K. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16. A Report of Concepts in Secondary Mathematics and Science*. London: John Murray.

Kinda, S. (2013). "Generating scenarios of division as sharing and grouping: A study of Japanese elementary and university students". *Mathematical Thinking and Learning, 15*(3), pp. 190-200.

Kornilaki, E. y Nunes, T. (1997). "What do young children understand about division?" En: Pehkonen (ed.). *Proceedings of the 21st Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education*. Lahti, Finland: PME. (Vol. 1, pp. 14-19).

Mulligan, J. (1992). "Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study". *Mathematics Education Research Journal, 4*(1), pp. 24-41.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (1997). "Young children's intuitive models of multiplication and division". *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), pp. 309-330.

Nesher, P. (1992). "Solving multiplication word problems". En: G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (eds.). *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 189-219.

Neuman, D. (1999). "Early learning and awareness of division: A phenomenographic approach". *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), pp. 101-128.

Peled, I. y Nesher, P. (1988). "What children tell us about multiplication word problems". *Journal of Mathematical Behavior, 7*(3), pp. 239-262.

Schmidt, S. y Weiser, W. (1995). "Semantic structures of one-step word problems involving multiplication or division". *Educational Studies in Mathematics, 28,* pp. 55-72.

Squire, S. y Bryant, P. (2002). "The influence of sharing on children's initial concept of division". *Journal of Experimental Child Psychology, 81*(1), pp. 1-43.

Vergnaud, G. (1983). "Multiplicative structures". En: R. Lesh y M. Landau (eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, pp. 127-174.

Vergnaud, G. (1990). "La teoría de los campos conceptuales". *Reserches en Didáctique des Mathematiques, 10*(2,3), pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? En: T. Nunes y P. Bryant (eds.). *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*. Hove: Psychology Press, pp. 69-98.

Verschaffel, L., Greer, B. y Torbeyns, J. (2006). "Numerical Thinking". En: A. Gutiérrez y P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, pp. 51-82.