Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Vargas Alejo, Verónica; Reyes Rodríguez, Aarón Víctor; Escalante, César Cristóbal
Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación
Educación Matemática, vol. 28, núm. 2, agosto, 2016, pp. 59-83
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación

Cycles of understanding about the concepts of function and variation

Verónica Vargas Alejo*
Aarón Víctor Reyes Rodríguez**
César Cristóbal Escalante***

Resumen: Con base en la perspectiva de modelos y modelación, en este artículo se analiza la relación entre las herramientas conceptuales utilizadas para modelar una situación sobre costo de envíos de paquetería y los ciclos de entendimiento que los estudiantes van desarrollando sobre los conceptos de función y variación. Las preguntas que guían la discusión son ¿Qué registros de representación utilizan estudiantes del primer semestre de una licenciatura en Turismo para describir y analizar situaciones problemáticas cuyo modelo subyacente es una función escalonada? ¿Cómo apoyan las diferentes representaciones el desarrollo de ciclos progresivos de entendimiento de los conceptos de función y variación en los estudiantes? Los resultados muestran que la utilización de diversas representaciones, el análisis de éstas, su modificación y refinamiento, son indicadores de la construcción de niveles progresivos de entendimiento de los conceptos de función y variación.

Palabras clave: *Ciclos de entendimiento, función, función escalonada, modelación y variación.*

Fecha de recepción: 8 de agosto de 2015. **Fecha de aceptación:** 12 de marzo de 2016.

* División de Ciencias e Ingeniería, Universidad de Quintana Roo. vargas.av@gmail.com

** Área Académica de Matemáticas y Física. Ciudad del Conocimiento de la UAEH, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. aaron.reyes.rdz@gmail.com

*** División de Ciencias e Ingeniería, Universidad de Quintana Roo. cescrist@gmail.com

Abstract: In this paper we analyze the relationship between the conceptual tools (representations) used by students enrolled in a college tourism program, to model a situation about cost of sending packages, and the cycles of understanding that the students develop about the concepts of step function, function, and variation. Based on the perspective of Models and Modeling, the questions that guide the discussion are: What kind of representations did first semester students use to describe and analyze problematic situations where the underlying model is a step function? To what extent did the representations support the development of different cycles of understanding of the concepts of function and variation? The results show multiple representations that students construct, analyze, modify, and refine. The representations helped to acquire meaning of mathematical concepts as function and variation.

Key words: *Understanding cycles, functions, step functions, modeling and variation.*

1. INTRODUCCIÓN

La investigación en educación matemática ha documentado que muchos estudiantes tienen dificultades para comprender el concepto de función (Kieran 2006, Kaput 1999, National Council of Teachers of Mathematics [NCTM],[1] 2011) y, para establecer relaciones entre éste y otras ideas tales como variación, ecuación o modelo. Asimismo, se ha obtenido evidencia de las dificultades de estudiantes de diversos niveles educativos para comprender y utilizar la notación algebraica, y para conectarla con otras representaciones como la gráfica o la tabular (Duval, 1996). Es posible que lo anterior se deba a procesos de instrucción basados en actividades que no permiten la integración de las ideas que constituyen el dominio conceptual del concepto de función. Un concepto no puede aprenderse en forma aislada de otros conceptos, fenómenos y procesos relacionados que le dan sentido y significado (Greeno, 1991). En esta línea de ideas surgen preguntas como: ¿Qué tipo de actividades de instrucción permiten a los estudiantes construir los saberes que constituyen el dominio conceptual de un concepto? ¿Cómo se va integrando este dominio conceptual? Al respecto, la *matematización* de situaciones de la vida real se ha identificado como un medio para apoyar la construcción y el desarrollo de comprensión conceptual, ya que al abordar este

[1] Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos de América.

tipo de actividades los estudiantes tienen oportunidades para construir y refinar herramientas conceptuales, reutilizables y modificables, útiles para describir, interpretar y predecir el comportamiento de fenómenos que involucran variación y cambio (Lesh y Doerr, 2003).

En este artículo se identifican los distintos medios representacionales utilizados por estudiantes de primer semestre de una licenciatura en Turismo para modelar una situación, la cual involucra a una función escalonada. Se analiza la relación entre las herramientas matemáticas utilizadas y el desarrollo de diferentes ciclos de entendimiento de las ideas de variación y función. Las preguntas que guían la reflexión son ¿Qué representaciones utilizan los estudiantes del primer semestre de una licenciatura en Turismo para describir y analizar situaciones problemáticas, cuyo modelo subyacente es una función escalonada? ¿Cómo apoyan las diferentes representaciones el desarrollo de ciclos progresivos de entendimiento de los conceptos de función y variación? La atención se centró en cómo los estudiantes construían herramientas conceptuales para modelar la variación en el costo de envío de un paquete en función de su peso (*situación* DHL), específicamente, cómo los estudiantes revisaron información, cuantificaron, organizaron datos, atribuyeron dimensiones, utilizaron elementos de referencia y qué tipo de representaciones emplearon durante este proceso.

La situación propuesta forma parte de un conjunto de cinco actividades diseñadas en un proyecto de investigación, cuyo objetivo fue analizar la construcción de diferentes ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación, que realizaron estudiantes de licenciatura al modelar situaciones cercanas a su entorno cotidiano. Los alumnos que abordaron la *situación* estaban cursando una asignatura de matemáticas generales en el primer semestre de la licenciatura, cuyo programa sugiere abordar los contenidos con base en la resolución y modelación de problemas en los que se matematicen situaciones cercanas a la vida real.

Uno de los supuestos de este trabajo de investigación es que los estudiantes universitarios ya han revisado, en secundaria y bachillerato, los conceptos de función, ecuación y variación, y han adquirido fluidez en el uso de diversas representaciones. Sin embargo, al llegar al nivel universitario algunos alumnos tienen dificultades con el concepto de función, ya que generalmente asocian este término con una "fórmula algebraica" o piensan que todas las funciones son continuas (De Villiers, 1988: 8). Por otra parte, las funciones escalonadas no están contempladas en los programas pre-universitarios de matemáticas, a pesar de que podrían incluirse en el tema de funciones lineales.

El marco teórico utilizado es la Perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh, 2010). Documentamos la construcción de ciclos progresivos de entendimiento de los conceptos de función y variación en estudiantes universitarios, caracterizados por el surgimiento y evolución de diferentes representaciones utilizadas al abordar la situación problemática propuesta (figura 1). Sostenemos la hipótesis de que la construcción, interpretación y análisis de modelos puede favorecer el desarrollo de diversos ciclos de entendimiento de los conceptos matemáticos al promover la integración de representaciones como herramientas conceptuales para dar significado a un concepto, mediante la descripción, interpretación y predicción del comportamiento de situaciones que los estudiantes podrían encontrar en su vida cotidiana.

2. REVISIÓN DE LITERATURA

En la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh, 2010) aprender matemáticas puede verse como un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales (o modelos), que cambian de manera continua durante la interacción entre un individuo y un problema o situación problemática. Un modelo es un sistema o un conjunto de elementos, relaciones entre elementos, operaciones que describen cómo interactúan esos elementos y patrones o reglas que aplican a las relaciones y operaciones anteriores. Los modelos son herramientas conceptuales compartibles, manipulables, modificables, y reutilizables para describir, interpretar, construir, manipular, predecir o controlar sistemas matemáticamente significativos. El proceso de aprendizaje de las matemáticas involucra la construcción de ciclos progresivos de entendimiento, modificación, extensión y refinamiento de maneras de pensar. En estos ciclos los sujetos relacionan, con diversos niveles de profundidad, los datos, metas y posibles rutas de solución al enfrentar una situación problemática (Lesh, 2010). Las primeras interpretaciones o modelos usualmente cambian. Los primeros modelos generalmente son burdos, pero se van refinando paulatinamente. El conocimiento, no es algo inerte, es parecido a un organismo vivo, a un sistema dinámico, el cual está adaptándose y autorregulándose continuamente.

El proceso de desarrollo del conocimiento es un proceso social en el cual se construyen y modifican modelos mediante las fases de diferenciación, de integración, de refinamiento de los distintos sistemas que se van construyendo (Lesh y Doerr, 2003). El producto del aprendizaje no es el modelo sino el proceso de creación del modelo. Los modelos residen en la mente y en los medios representacionales: "los significados asociados con un sistema conceptual dado tienden a estar distribuidos a través de una variedad de medios representacionales" (Lesh y Doerr, 2003: 12) como los mostrados en la figura 1. Los modelos de un individuo son personales y posiblemente únicos, estos reflejan la experiencia del individuo en situaciones relevantes. Así, el aprendizaje de un concepto se asocia con el desarrollo de modelos, esto es, con sistemas conceptuales que emergen al enfrentar situaciones problemáticas. En este contexto, la comprensión conceptual se incrementa en la medida que el individuo comunica y comparte sus ideas (modelos) con otras personas y considera a los conceptos en diversas dimensiones: concreto–abstracto, particular–general, en contexto–sin contexto, intuitivo–analítico–axiomático, fragmentado–integrado, etcétera.

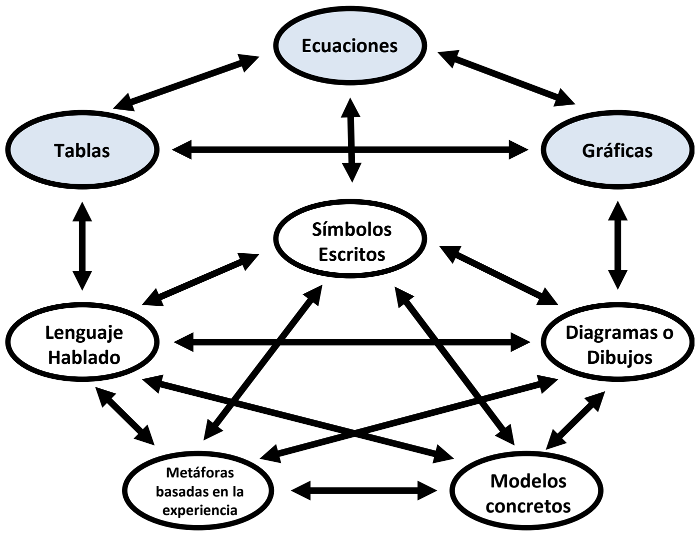

Figura 1. Medios representacionales (Lesh y Doerr, 2003: 12).

Pensar matemáticamente va más allá de hacer cálculos, "con frecuencia implica describir situaciones matemáticamente" (Lesh y Doerr, 2003: 15), analizar información cualitativa, cuantificar información en caso de ser necesario, atribuir dimensiones al espacio y ubicar eventos en marcos de referencia. Es importante que los estudiantes aprendan a utilizar representaciones de manera fluida y en múltiples medios, así como desarrollar habilidad para operar con símbolos. La importancia del manejo de diversas representaciones, durante la construcción de un concepto, es reconocida por varios investigadores (Duval, 1996; Lesh, 2010). Entre los conceptos matemáticos que incorporan diferentes representaciones (tablas, gráficas, símbolos algebraicos) se encuentran los conceptos de función y variación. "La idea de función tiene sus raíces conceptuales en nuestro sentido de causalidad, crecimiento, y variación conjunta –donde una de las cantidades cambia en conjunto con el cambio en otra cantidad" (Kaput, 1999: 146).

Comprender el concepto de función implica que los estudiantes relacionen e integren todos los registros de representación asociados, además, que entiendan qué es lo que tienen en común (Kaput, 1999). Los alumnos deben adquirir experiencia para transitar entre una variedad amplia de registros de representación, así como capacidad para coordinar y articular estos registros (Duval, 1996). El logro de esta experiencia requiere de apoyo del profesor, quien debe proponer problemas o situaciones favorables para el surgimiento de diferentes representaciones, así como el tratamiento dentro de un mismo registro y la conversión entre diferentes registros (Duval, 1996).

Al resolver un problema, los estudiantes deben entender que cada registro de representación (tablas, gráficas, metáforas basadas en la experiencia, diagramas o dibujos, modelos concretos, lenguaje hablado, símbolos escritos, ecuaciones) proporciona información diferenciada, la cual permite visualizar una situación desde diversas perspectivas e incrementar el nivel de comprensión sobre ésta y conceptos subyacentes. Dada una tabla, los alumnos deberían ser capaces de graficar la información y representarla mediante alguna relación funcional en el registro algebraico, con la finalidad de describir, interpretar y predecir el comportamiento del fenómeno que se está analizando. El trabajo en equipo es fundamental, dado que la comunicación permite a los estudiantes externar sus formas de pensamiento o modelos, compartirlos, probarlos y refinarlos (Lesh y Doerr, 2003).

Existen estudios orientados al análisis del desarrollo de la comprensión en los estudiantes de ideas matemáticas como función, fundamentados en el uso de la modelación en el aula (De Villiers, 1988; Lesh y Doerr, 2003; NCTM, 2000). En ellos, se señala por ejemplo, que las funciones escalonadas son especialmente significativas para los alumnos cuando se han aprendido en contextos de modelación (De Villiers, 1988: 8); se menciona que la modelación es la construcción de un modelo matemático (tablas, gráficas, fórmulas) para describir, representar o idealizar cierta situación práctica. De Villiers (1988: 8) divide la modelación en tres categorías: aplicación directa, aplicación analógica, aplicación creativa. La primera categoría se refiere al conocimiento del modelo y su aplicabilidad a una situación conocida; la segunda a que el alumno se enfrenta a una situación desconocida, pero análoga a alguna ya abordada, es decir, el estudiante conoce el modelo pero la dificultad radica en reconocer su aplicabilidad; y en la última categoría se considera que el alumno debe crear un nuevo modelo (nueva matemática) para resolver una situación no conocida.

En los estudios de De Villiers (1988) y del NCTM (2000) se presenta una discusión sobre un problema de correo postal, redactado en forma textual, para abordar la función escalonada en el aula. En ambos casos se incluye el registro de representación tabular. Se señala la necesidad de posibilitar en los estudiantes el surgimiento de representaciones numéricas, gráficas y analíticas, de tal manera que al analizarlas permitan la comprensión de la función escalonada. De Villiers (*ibid*) propone, además, otros problemas de naturaleza gráfica y algebraica relacionados con la forma analítica de la función con la cual se modela el problema de correo postal; señala que los problemas podrían implementarse en el aula, aunque no incluye en su artículo una descripción en detalle de cómo plantearlos o cómo los abordaron los estudiantes; finalmente, muestra algunas dificultades que enfrentaron los estudiantes al crear la representación algebraica a partir de una representación gráfica planteada, e indica que es “el profesor quien en algún momento debe guiar a los estudiantes [para generar la representación adecuada]” (De Villiers, 1988: 10).

De Villiers al igual que la perspectiva de MM coinciden en promover en el aula el uso de actividades cercanas al entorno de los estudiantes que evite la desconexión entre el conocimiento y habilidades matemáticas aprendidas, y las interpretaciones y significado de situaciones de la vida real. De Villiers (1988) y el NCTM (2000) señalan la existencia de una gran cantidad de fenómenos interesantes de la vida real que dan lugar a modelos basados en las funciones escalonadas, por ejemplo, el correo postal, los planes de teléfonos celulares, el salario, los torneos y el pago por estacionamiento.

El enfoque de este artículo es distinto al del NCTM (2000) y De Villiers (1988), primero porque se sustenta en el marco teórico de la perspectiva de Modelos y modelación (Lesh y Doerr, 2003), lo cual implica que no se considera al proceso de modelación como parte del tipo de experiencias que un estudiante debe vivenciar en el aprendizaje de las matemáticas, sino que se parte de que el aprendizaje de las matemáticas consiste en la construcción de modelos. Además, el concepto de modelo que se utiliza en este artículo no se reduce a representaciones como tablas, gráficas y fórmulas, el concepto de modelo se toma de la perspectiva MM como un sistema o conjunto de elementos, relaciones entre elementos, operaciones que describe cómo interactúan esos elementos y patrones o reglas que se aplican a las relaciones anteriores (Lesh y Doerr, 2003). Por otra parte, en este artículo no se hace una propuesta pedagógica (como en los artículos del NCTM y De Villiers), sino que se describen y analizan los modelos o sistemas conceptuales de los estudiantes, que surgen al tratar de modelar un problema similar al del correo postal, sin haber abordado previamente el tema de funciones escalonadas.

3. METODOLOGÍA

En este estudio participó un grupo de 20 estudiantes de primer semestre de una licenciatura en Turismo, cuyas edades se encontraban en el rango de 18 y 19 años; los alumnos se caracterizaban porque las matemáticas no les gustaban debido a que no veían cómo podrían utilizar los conocimientos matemáticos adquiridos para el desempeño de su profesión. Los estudiantes no tenían experiencia previa con la función escalonada; es decir, no habían abordado alguna situación problemática que se modelara por medio de este tipo de función (se podría decir que estaban en la categoría 3 del tipo de modelación De Villiers, 1988). Sin embargo, como parte del proyecto de investigación, los alumnos ya habían abordado tres problemas, los cuales implicaban el uso de los conceptos de función lineal, función cuadrática, ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Habían utilizado registros de representación tabulares, gráficos y algebraicos para resolver los problemas expuestos. Es importante mencionar que al inicio del proyecto los estudiantes consideraban sin validez las representaciones gráficas y tabulares para dar respuestas matemáticas a un problema o bien modelarlo. Los problemas abordados previamente se denominan *bebidas*, *fotocopiadoras* y *hotel* (relacionados con función y ecuación lineal, funciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y con función cuadrática, respectivamente). Todas las actividades anteriores se desarrollaron durante ocho sesiones de dos horas cada una, haciendo un total de 16 horas.

La *situación* descrita en este artículo se denominó DHL porque incorpora información parcial sobre la manera real como la empresa DHL cobra por su servicio de envíos nacionales (figuras 2 y 3). Incluye preguntas auxiliares cuyo objetivo es que los estudiantes centren la atención en los datos requeridos para reflexionar sobre la pregunta principal relacionada con los costos de envío como función del peso del paquete.

Situación. DHL cobra los envíos nacionales de paquetería con base en el peso de los paquetes. De acuerdo con la información que se proporciona, debes analizar cómo varía el costo por envío de paquetes. El análisis nos debe permitir contestar lo siguiente:

- ¿Cómo podríamos describir el proceso de cobro de la compañía para una determinada zona tarifaria?

Preguntas auxiliares

- ¿Qué diferencia de precio existe entre el envío de un paquete de un kilogramo y un paquete de dos kilogramos?
- ¿Cuánto me cobrará DHL por enviar un paquete de 2kg y 300 gramos?
- ¿Es la misma diferencia de cobro que hay entre un paquete de 3kg y 4kg, y la que hay entre un paquete de 5kg y 6kg?
- ¿Cuál es el comportamiento de estas diferencias?

Se esperaba que los estudiantes analizaran cómo variaba el costo por envío de paquetes (la tarifa de envío) en función del peso, para una de las zonas tarifarias, y que refinaran su análisis en la medida que propusieran y comunicaran sus procedimientos con base en las diferentes representaciones utilizadas para describir la *situación* DHL. Se entregó a los estudiantes una hoja de trabajo impresa en la cual se incluyó la información mostrada en las figuras 2 y 3. El proceso de implementación de la *situación* se llevó a cabo durante una sesión de dos horas e incluyó trabajo en equipos de cinco estudiantes, la presentación plenaria de las soluciones de cada uno de los equipos, así como la discusión grupal de las soluciones. Adicionalmente, se solicitó a los estudiantes que realizaran, como tarea extra-clase, un reporte escrito individual en el que plasmaran una reflexión retrospectiva del proceso de solución.

El papel del profesor fue formular preguntas que promovieran la reflexión de los estudiantes y dirigir la discusión grupal. Algunas de estas preguntas fueron: ¿Qué estás haciendo? ¿De qué trata la *situación* DHL? ¿Cómo responderías a las preguntas planteadas? ¿Cuál es la pregunta principal? ¿Por qué estás realizando esas operaciones? ¿Hay algún procedimiento alternativo? ¿Cómo

Tablas detalladas de grupos y zonas tarifarias para el cálculo de precios de sus envíos nacionales.

1.- Ubique los grupos en los que se encuentran las ciudades origen y destino de su envío:

Grupos y Zonas Tarifarias

Ciudad	Grupo	Ciudad	Grupo	Ciudad	Grupo	Ciudad	Grupo
Acapulco	10	Guadalajara	3	Minatitlán	15	Tapachula	15
Aguascalientes	12	Hermosillo	5	Monterrey	2	Tepic	9
Cancún	16	Irapuato	12	Morelia	12	Tijuana	4
Cd. del Carmen	15	Jalapa	17	Nvo. Laredo	13	Tlaxcala	11
Cd. Juárez	6	La Paz	8	Oaxaca	17	Toluca	11
Cd. Obregón	5	León	12	Pachuca	11	Torreón	7
Celaya	12	Los Mochis	8	Poza Rica	14	Tuxtla Gtz.	15
Chihuahua	6	Manzanillo	9	Pto. Vallarta	9	Veracruz	17
Colima	9	Matamoros	13	Puebla	11	Villahermosa	15
Córdoba	17	Mazatlán	8	Querétaro	12	Zacatecas	12
Cuernavaca	11	Mérida	16	Saltillo	2	Zihuatanejo	10
Culiacán	8	Mexicali	4	San Luis Potosí	12		
Durango	7	México	1	Tampico	14		

Llevamos sus envíos a todo el país. Estas ciudades sólo son una referencia, para información específica sobre otras ciudades, consulte a su Ejecutivo de Cuenta o visítenos en nuestra página de internet: **www.dhl.com.mx**

2.- Ubique la zona tarifaria a la que pertenecen sus envíos:
Para determinar el precio del servicio, cruce los grupos origen y destino para obtener la zona tarifaria correspondiente. Ésta, junto con el peso y tipo de servicio le permitirá calcular la tarifa final de su envío.

Origen / Destino

Origen / Destino	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	G13	G14	G15	G16	G17
G1	1	3	3	7	6	6	4	5	3	2	1	2	4	2	3	5	2
G2	3	1	3	7	6	4	3	5	4	5	3	3	2	4	6	7	6
G3	3	3	1	7	5	5	3	4	1	5	3	2	4	4	6	7	5
G4	7	7	7	1	3	5	6	5	7	8	7	7	8	8	8	8	8
G5	6	6	5	3	1	5	5	3	6	7	7	6	7	7	8	8	7
G6	6	4	5	5	5	1	3	5	6	7	6	6	5	7	7	8	7
G7	4	3	3	6	5	3	1	4	4	6	4	3	4	6	6	7	6
G8	5	5	4	5	3	5	4	1	5	7	6	5	6	6	7	8	6
G9	3	4	1	7	6	6	4	5	1	5	4	3	5	5	6	7	5
G10	2	5	5	8	7	7	6	7	5	1	3	4	6	5	5	6	4
G11	1	3	3	7	7	6	4	6	4	3	1	2	4	3	3	6	2
G12	2	3	2	7	6	6	3	5	3	4	2	1	4	4	5	6	5
G13	4	2	4	8	7	5	4	6	5	6	4	4	1	5	6	7	6
G14	2	4	4	8	7	7	6	6	5	5	3	4	5	1	3	6	2
G15	3	6	6	8	8	7	6	7	6	5	3	5	6	3	1	2	2
G16	5	7	7	8	8	8	7	8	7	6	6	6	7	6	2	1	3
G17	2	6	5	8	7	7	6	6	5	4	2	5	6	2	2	3	1

Figura 2. Información para determinar la zona tarifaria correspondiente a las ciudades de origen y destino del envío (DHL, 2011).

determina la empresa el precio de envío de un paquete, cuyo peso es fraccionario? El profesor no intervino para inducir procedimientos específicos. Sus intervenciones se orientaron a apoyar la reflexión que permitiera a los estudiantes analizar la pertinencia de sus procedimientos en términos de las preguntas incluidas en la *situación* DHL.

Descripción del Servicio

Entrega garantizada puerta a puerta de paquetes y documentos al siguiente día hábil antes de las 8:30 a.m., de lunes a viernes. Servicio con cobertura desde las principales ciudades hacia la Ciudad de México, Guadalajara y Monterrey.

Para calcular el precio de su envío:

1. Determine el peso de su envío (pág. 4)
2. Ubique la zona tarifaria de acuerdo al origen y destino al que requiera enviar (pág. 18)
3. Información adicional del servicio (pág. 24)
4. En la tabla inferior, identifique el peso de su envío y crúcela con su zona correspondiente

Tarifas DHL DOMESTICO EXPRESS 8:30

Kilos	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Zona 6	Zona 7	Zona 8
1	307.76	326.29	341.38	375.00	428.45	436.21	451.72	462.07
2	324.14	349.57	371.55	401.29	472.42	480.61	500.00	512.93
3	340.52	372.85	401.72	427.58	516.39	525.01	548.28	563.79
4	380.18	416.82	452.15	480.17	615.53	627.60	651.73	675.43
5	419.84	460.79	502.58	532.76	714.67	730.19	755.18	787.07
6	459.06	506.48	555.17	586.21	813.81	834.50	863.37	902.59
7	498.28	552.17	607.76	639.66	912.95	938.81	971.56	1,018.11
8	537.50	597.86	660.35	693.11	1,012.09	1,043.12	1,079.75	1,133.63
9	576.72	643.55	712.94	746.56	1,111.23	1,147.43	1,187.94	1,249.15
10	615.94	689.24	765.53	800.01	1,210.37	1,251.74	1,296.13	1,364.67
11	656.03	734.93	818.12	854.75	1,328.47	1,373.29	1,426.30	1,500.01
12	696.12	780.62	870.71	909.49	1,446.57	1,494.84	1,556.47	1,635.35
13	736.21	826.31	923.30	964.23	1,564.67	1,616.39	1,686.64	1,770.69
14	776.30	872.00	975.89	1,018.97	1,682.77	1,737.94	1,816.81	1,906.03
15	816.39	917.69	1,028.48	1,073.71	1,800.87	1,859.49	1,946.98	2,041.37
16	856.48	963.38	1,081.07	1,128.45	1,918.97	1,981.04	2,077.15	2,176.71
17	896.57	1,009.07	1,133.66	1,183.19	2,037.07	2,102.59	2,207.32	2,312.05
18	936.66	1,054.76	1,186.25	1,237.93	2,155.17	2,224.14	2,337.49	2,447.39
19	976.75	1,100.45	1,238.84	1,292.67	2,273.27	2,345.69	2,467.66	2,582.73
20	1,016.84	1,146.14	1,291.43	1,347.41	2,391.37	2,467.24	2,597.83	2,718.07
21	1,056.93	1,191.83	1,344.02	1,402.58	2,510.34	2,588.79	2,728.00	2,854.28
22	1,097.02	1,237.52	1,396.61	1,457.75	2,629.31	2,710.34	2,858.17	2,990.49
23	1,137.11	1,283.21	1,449.20	1,512.92	2,748.28	2,831.89	2,988.34	3,126.70
24	1,177.20	1,328.90	1,501.79	1,568.09	2,867.25	2,953.44	3,118.51	3,262.91
25	1,217.29	1,374.59	1,554.38	1,623.26	2,986.22	3,074.99	3,248.68	3,399.12
26	1,257.38	1,420.28	1,606.97	1,678.43	3,105.19	3,196.54	3,378.85	3,535.33
27	1,297.47	1,465.97	1,659.56	1,733.60	3,224.16	3,318.09	3,509.02	3,671.54
28	1,337.56	1,511.66	1,712.15	1,788.77	3,343.13	3,439.64	3,639.19	3,807.75
29	1,377.65	1,557.35	1,764.74	1,843.94	3,462.10	3,561.19	3,769.36	3,943.96
30	1,417.74	1,603.04	1,817.33	1,899.11	3,581.07	3,682.74	3,899.53	4,080.17
Kg. adicional	40.09	45.69	52.59	56.03	118.97	121.55	130.17	136.21

Figura 3. Tarifa final del envío de acuerdo con el peso del paquete (DHL, 2011).

La recolección de los datos se llevó a cabo mediante las producciones escritas de los estudiantes y una bitácora elaborada con las observaciones del profesor. El análisis de la información se hizo con base en la identificación de los diferentes procedimientos y registros de representación: tabular, gráfico o algebraico (Duval, 1996), y metáforas basadas en experiencia, modelos concretos, lenguaje hablado (Lesh y Doerr, 2003), que emergieron en cada ciclo de entendimiento. Más allá de contar cuántos registros de representación surgieron, en este documento se describe el proceso de construcción de modelos de cada equipo o bien, los ciclos de entendimiento (Lesh, 2010) que surgieron al resolver la *situación* DHL: cualitativo, cuantitativo y algebraico. Estos ciclos están relacionados con el proceso de *matematización* de los estudiantes (Lesh y Doerr, 2003), es decir, con sus ideas cualitativas, su forma de cuantificar información, atribuir dimensiones, organizar y analizar datos. En seguida caracterizamos los diferentes ciclos de entendimiento mostrados por los estudiantes.

El *ciclo de entendimiento cualitativo* es aquel en el cual el estudiante empieza a tomar sentido de la *situación* DHL y las variables involucradas (Lesh y Doerr, 2003). El alumno determina la existencia de variables y cierta relación entre ellas, utiliza metáforas basadas en la experiencia para expresar la variación conjunta de dos cantidades, sin utilizar representaciones numéricas, tabulares, gráficas o algebraicas. El comportamiento y la relación entre variables se expresa mediante los términos “crecer”, “decrecer” “toma valores pequeños” o “grandes”, “más grande que”, etcétera.

En el *ciclo de entendimiento cuantitativo* el estudiante es capaz de establecer cuantitativamente qué significan las expresiones “grande”, “pequeño”, “más grande que”; es decir, el estudiante puede responder preguntas como “¿Qué tan grande o pequeño es?” y las comparaciones se vuelven numéricas (Lesh y Doerr, 2003). En ese momento los datos y las relaciones se expresan mediante representaciones tabulares y gráficas. El registro de representación utilizado por el estudiante le permitirá comprender y describir el problema o situación.

El *ciclo de entendimiento algebraico*, es aquel en el cual los estudiantes ya han pasado por diferentes fases de diferenciación, integración y refinamiento de los distintos sistemas o modelos. En este ciclo los estudiantes muestran un uso fluido de las representaciones (tabulares, gráficas, verbales, etc.), así como la manipulación de símbolos algebraicos para resolver una situación. La construcción, utilización, tránsito y coordinación de distintas representaciones para describir e interpretar un fenómeno es indicador de un entendimiento profundo de los conceptos matemáticos (Duval, 1996).

Es importante señalar que la comprensión o entendimiento conceptual no se logra por medio de un proceso lineal y que además pueden existir ciclos de entendimiento intermedios entre los ciclos anteriores, los cuales señalan un tránsito entre ciclos e involucran un desarrollo incompleto de las fases de diferenciación, integración y refinamiento.

4. RESULTADOS

El proceso de análisis de los estudiantes de la *situación* DHL se puede caracterizar en cuatro ciclos de entendimiento. En ellos se observó la modificación, extensión y refinamiento de maneras de pensar. Los equipos de estudiantes relacionaron, con distintos grados de comprensión, los datos, metas y posibles rutas de solución al resolver la *situación*. Las representaciones utilizadas para describir el proceso de cobro de la compañía fueron tablas y gráficas, las cuales complementaron con explicaciones verbales. Estas representaciones formaron parte de cada ciclo de entendimiento, que a continuación se describen.

4.1. Primer ciclo de entendimiento: cualitativo

Inicialmente todos los equipos recurrieron a su experiencia personal en términos del uso de paqueterías para enviar documentos; es decir, a metáforas basadas en la experiencia (Lesh y Doerr, 2003) para entender la *situación* DHL. Tres de cinco equipos (A, D y E) eligieron una ciudad de origen y otra de destino para revisar y analizar el procedimiento de cobro por el envío de paquetes. Buscaron a qué zona correspondían las ciudades. Eligieron sólo una zona tarifaria y empezaron a observar los datos de la columna correspondiente a la zona elegida. Estos equipos trataban de responder la pregunta ¿Cómo podríamos describir el proceso de cobro de la compañía para una determinada zona tarifaria? Los equipos hicieron observaciones de tipo cualitativo en el sentido de "la cantidad a pagar va aumentando". Los equipos B y C revisaron todas las zonas tarifarias y compararon el precio por el envío de paquete de un kilogramo, correspondiente a cada zona. Es decir, observaron zonas tarifarias "más baratas" y otras "más caras". Los estudiantes hicieron observaciones de tipo cualitativo entre las variables identificadas, las cuales les permitieron comparar. Propusieron elaborar una gráfica que permitiera observar las características de cada zona tarifaria, pero al escuchar los procedimientos de otros equipos replantearon el suyo.

4.2. Segundo ciclo de entendimiento: cuantitativo

Cada uno de los cinco equipos eligieron una de las columnas de la tabla correspondiente a una zona tarifaria (figura 3); y calcularon las diferencias entre los datos de la columna de la zona elegida. Uno de los equipos observó y explicó al profesor que para su zona tarifaria las diferencias no siempre eran constantes, "pero a partir de cierto peso y costo, las diferencias eran la misma" (constantes). Su descripción era cualitativa pero apoyada en cálculos numéricos. Cada equipo eligió una forma de representar esta información, por ejemplo, algunos construyeron una nueva tabla. Los registros de representación que surgieron fueron tabulares y gráficos. En cuanto a las gráficas hubo dos de barras, dos poligonales y una en forma escalonada, las cuales pueden describirse como: diferencia en costo *vs* el peso del paquete, peso de paquete *vs* diferencia en costo y precio de paquete *vs* peso del paquete. El tipo de gráficas elaboradas por los equipos a lápiz y papel en sus cuadernos es similar a las gráficas de las figuras 4-8; se rehicieron para una mejor visibilidad en este documento. En la figura 9 se presentan las mismas gráficas (figuras 4-8), pero dibujadas en el pizarrón por los alumnos durante la sesión grupal; en esta figura se muestran trazos complementarios a las figuras 4-8 debido a que los estudiantes tuvieron la oportunidad de comparar sus representaciones con las de sus compañeros mientras las realizaban. La figura 9 se explicará en el siguiente ciclo de entendimiento.

Los equipos A y B presentaron gráficas que, de acuerdo con su explicación, representaban la diferencia en costo *vs* el peso del paquete; tomaron datos de la zona 8. El equipo A, por ejemplo, elaboró una tabla de datos y una gráfica como se muestra en la figura 4. Los estudiantes fueron registrando una a una las diferencias conforme las iban calculando en un arreglo de columna que posteriormente utilizaron como tabla de datos para graficar. La primera columna de datos de su tabla (figura 4) parece corresponder a la primera diferencia, segunda diferencia, tercera diferencia, etc. En la segunda columna de la tabla incluyeron las diferencias calculadas con cada uno de los datos, correspondientes al

	Diferencia
1	50.86
2	50.86
3	111.64
4	111.64
5	111.64
6	115.52

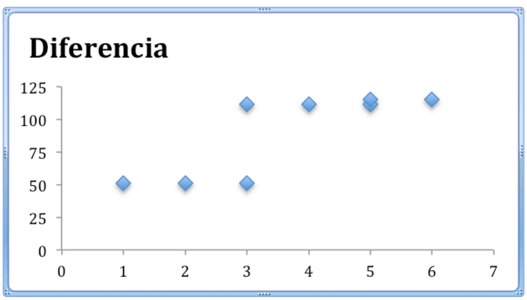

Figura 4. La gráfica corresponde a los datos de la tabla, de acuerdo con el equipo A de estudiantes. Hay errores de los alumnos en la gráfica y también en la quinta diferencia, la cual es 115.52 y no 111.64.

precio o tarifa por kilogramo, de la columna de la tabla (figura 3) correspondiente a la zona 8. Hicieron una gráfica poligonal. En el eje *x* (eje horizontal) ubicaron los números del 1 al 6 y en el eje *y* (eje vertical) los valores: 25, 50, 75, 100, 125. Estos valores fueron utilizados como referencia para ubicar en la gráfica los que ellos calcularon.

La gráfica construida por los estudiantes tiene forma parecida a una gráfica de barras, aunque está elaborada como si fuera una gráfica poligonal. La gráfica de la figura 4 puede observarse también en la figura 9, aunque en la gráfica del equipo A (figura 9) se unieron los puntos.

El equipo B elaboró una tabla de datos y una gráfica como la que se muestra en la figura 5. Agruparon las diferencias y las presentaron en una tabla de datos. En la segunda columna de esa tabla de datos, ubicaron la diferencia calculada entre cada precio o tarifa por kilogramo de la columna de la zona 8 (figura 3). En la primera columna de la tabla ubicaron intervalos de peso por paquete, correspondientes a cada diferencia identificada. Aunque, las diferencias que se encuentran en la tabla no corresponden totalmente a los datos de la zona 8, debido a que los últimos 10 valores deberían ser 136.21 y no 135.34. Los datos de la tabla fueron la base para elaborar una gráfica de barras (figura 5). En el eje *y* de la gráfica escribieron las cantidades 20, 40, 60, 80, 100, 120 y en el eje *x* los intervalos que se muestran en la primera columna de la tabla de datos. Estos valores fueron utilizados como referencia para ubicar en la gráfica los que ellos calcularon. La gráfica de la figura 5 puede observarse también en la figura 9. Los estudiantes hicieron una gráfica de barras.

kg	Diferencia
1-3	50.86
3-5	111.64
5-10	115.52
10-30	135.34

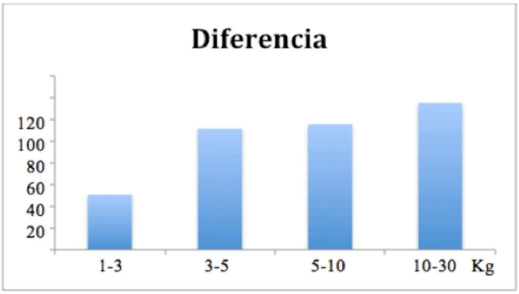

Figura 5. La gráfica corresponde a los datos de la tabla, elaborada por el equipo B de estudiantes.

Los equipos C y D graficaron precio *vs* peso del paquete de las zonas 8 y 2, respectivamente. Las gráficas fueron como las mostradas en las figuras 6 y 7. Calcularon todas las diferencias, identificaron aquellas que eran distintas, las agruparon y las representaron en una tabla de datos. Posteriormente, con base en las preguntas planteadas en la actividad decidieron graficar precio de paquete *vs* peso del paquete. En el eje *y* de la gráfica ubicaron el precio o tarifa por peso en kilogramo del paquete. Escribieron las cantidades correspondientes a la columna de datos de las tarifas para la zona 8 y 2, respectivamente. En el eje *x* ubicaron el peso en kilogramos de cada paquete. Las gráficas de las figuras 6 y 7 pueden observarse en la figura 9.

El equipo E graficó peso de paquete *vs* diferencia en costo, correspondiente a la zona 5. Su gráfica se muestra en la figura 9. Hubo varios errores en los cálculos. La forma de proceder fue la siguiente: el equipo calculó todas las diferencias (figura 8), identificó aquellas que eran distintas y las agrupó. Los resultados fueron representados en una gráfica de barras (figura 9). Los datos de la tabla fueron la base para hacer su gráfica, aparentemente de barras. En el eje vertical de la gráfica, el equipo ubicó el peso del paquete (los estudiantes escribieron las cantidades 0, 2, 4, 6, 8, 10, ..., 30 como referencia para indicar los que ellos calcularon) y ubicaron la diferencia en el eje horizontal (los estudiantes escribieron las cantidades 0, 5, 10, 15, ..., 125 como referencia para indicar los que ellos calcularon). Arriba de la tercera barra (contadas de abajo hacia arriba)

Kg	precios
0	0
1	462.07
2	512.93
3	563.79
4	675.43
5	787.07
6	902.09
7	1,018.11
8	1,133.63
9	1249.15
10	1364.67
11	1500.01

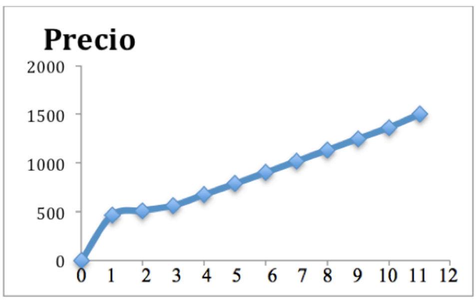

Figura 6. La gráfica corresponde a los datos de la tabla (zona 8), de acuerdo con el equipo C de estudiantes. Incluyeron la coordenada (0,0)

kg	Precio
1	326.29
2	349.57
3	372.85
4	416.82
5	460.79
6	506.48
7	552.17
8	597.86
9	643.55
10	689.24

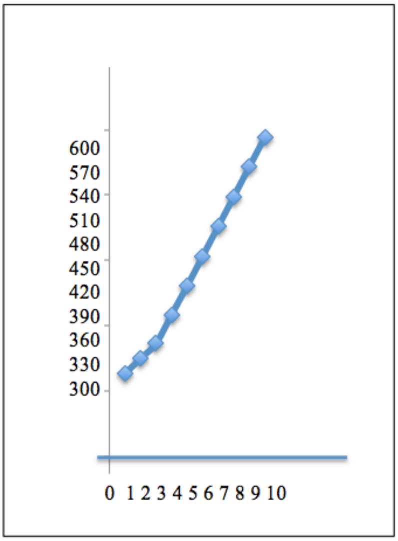

Figura 7. La gráfica corresponde a los datos de la tabla (tomados de la zona 2, figura 3), de acuerdo con el equipo D de estudiantes.

el equipo escribió el símbolo de infinito para indicar que la diferencia de 118.97 continuaba siendo constante, si se consideraban paquetes cuyo peso fuera mayor a 30 kg. En la figura 8 se presentan los resultados de los cálculos realizados por los estudiantes.

La Tabla de datos (figura 8) presenta parte de las operaciones llevadas a cabo por el equipo E antes de graficar. Esta tabla de datos no contiene el error de los estudiantes, quienes en lugar de obtener 118.1 como diferencia, obtuvieron 118.2. También se muestra la gráfica, que fue dibujada para la presentación grupal (figura 9). La parte superior de la gráfica es la punta de una flecha que indica que la diferencia será la misma para cualquier otro paquete, cuyo peso sea mayor a los 30 kg.

4.3. Tercer ciclo de entendimiento: diferenciación e integración de distintas representaciones

Los estudiantes dibujaron en el pizarrón sus gráficas (figura 9). En seguida, hubo discusión grupal alrededor de los procedimientos y las diferentes

Peso	Tarifa	Diferencia
1	428.45	
2	472.42	43.97
3	516.39	43.97
4	615.53	99.14
5	714.67	99.14
6	813.81	99.14
7	912.95	99.14
8	1012.09	99.14
9	1111.23	99.14
10	1210.37	99.14
11	1328.47	118.10
12	1446.57	118.10
13	1564.67	118.10
14	1682.77	118.10
15	1800.87	118.10
16	1918.97	118.10
17	2037.07	118.10
18	2155.17	118.10
19	2273.27	118.10
20	2391.37	118.10
21	2510.34	118.97
22	2629.31	118.97
23	2748.28	118.97
24	2867.25	118.97
25	2986.22	118.97
26	3105.19	118.97

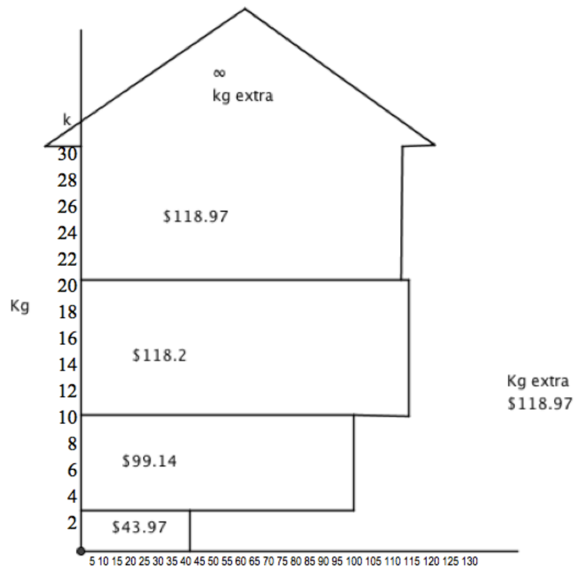

Figura 8. Gráfica del equipo E. La tabla de datos fue recreada a partir de los datos de la figura 3.

representaciones utilizadas para responder la pregunta ¿Cómo podríamos describir el proceso de cobro de la compañía para una determinada zona tarifaria? Para propiciar interés, participación y discusión de todo el grupo, el profesor sugirió a cada equipo la exposición de los distintos procedimientos, pero en lugar de explicar al grupo la propia representación, solicitó a los equipos que pasaran a presentar la de otro equipo. El objetivo era la revisión de representaciones a partir de la interpretación de otro equipo, la diferenciación y al mismo tiempo búsqueda de elementos comunes entre ellas. Es decir, se pretendía que los alumnos comprendieran mejor la situación con base en las distintas representaciones, pero al mismo tiempo se deseaba que los estudiantes analizaran los registros y observaran cómo las cantidades o variables (precio y peso del paquete) cambiaban de manera conjunta.

Cada uno de los equipos describió (a manera de exposición) y comentó, en sesión grupal, las gráficas de sus compañeros, no sin tener dificultades para

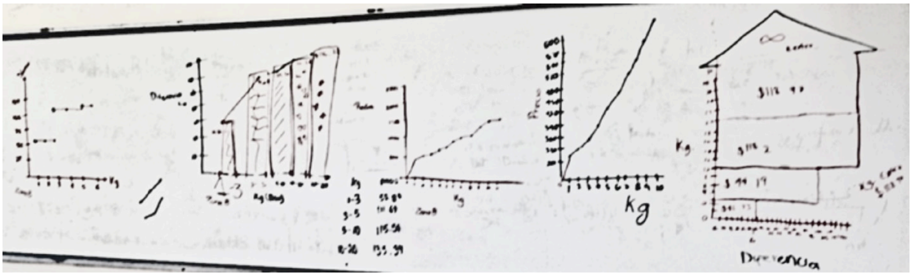

Figura 9. Representaciones de los equipos de estudiantes para describir el proceso de cobro de la compañía para una determinada zona tarifaria. Los datos incluidos en esta imagen pueden observarse con mayor nitidez en las figuras 4 a la 8.

interpretarlas, sobre todo las gráficas de los equipos A, B y E (figuras 4, 5 y 8) ya que eran diferentes a las propias. Durante las presentaciones, los cinco equipos se dieron cuenta de errores o falta de información en sus gráficas. Cuatro equipos (A, B, D y E) refinaron sus ideas y con ello sus registros; es decir, hicieron modificaciones o agregaron información a sus representaciones gráficas. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 7, los estudiantes del equipo D unieron con un segmento de línea (figura 9) el punto (0, 0) con las coordenadas del punto (1, 326.29), además agregaron la palabra precio en el eje vertical del plano cartesiano, pues sólo habían escrito la palabra kg en el eje de las *x*. El punto (0,0) no está en la tabla de datos de DHL (figura 3), pero el equipo D determinó que esta información era parte de una situación real, por lo tanto debían graficarla. El equipo A unió los puntos de su gráfica (figura 4) mediante segmentos (figura 9) y, para que interpretaran mejor su gráfica, agregó los datos que están enlistados (figura 9) entre las gráficas correspondientes a las de los equipos C y D. El equipo B, también intentó unir puntos (figura 9). Dibujó líneas sobre las barras. El equipo E escribió la palabra Diferencia en el eje de las *x*.

Los cinco equipos de estudiantes determinaron que las representaciones gráficas correspondientes a las figuras 4, 5 y 8 respondían a una de las preguntas planteadas en la *situación* DHL: ¿Cuál es el comportamiento de estas diferencias? Pero no a la pregunta principal ¿Cómo podríamos describir el proceso de cobro de la compañía para una determinada zona tarifaria? Los estudiantes manifestaron que las gráficas de barras permitían describir cómo variaban las diferencias en el cobro de los paquetes, por lo tanto eran gráficas pertinentes, aunque no para la pregunta principal.

Los equipos consideraron que las gráficas correspondientes a las figuras 6 y 7 sí respondían a la pregunta: ¿Cómo podríamos describir el proceso de cobro de la compañía para una determinada zona tarifaria? Concluyeron que no había necesidad de construir otra gráfica, la *situación* DHL estaba resuelta, y las figuras 6 y 7 permitían observar cómo iba aumentando la tarifa.

El profesor pidió a los estudiantes una explicación de por qué en la gráfica de la figura 7 y en otras gráficas se habían unido puntos con segmentos de línea. La respuesta fue "porque estamos acostumbrados a que cuando graficamos información de una tabla de datos siempre debemos unir los puntos". Los estudiantes no atribuían significado matemático a los segmentos de recta dibujados de un punto a otro en sus gráficas, ni en términos de un fenómeno de referencia. Decían que "la línea marcaba una *tendencia*"; al parecer no conectaban y coordinaban los distintos registros de representación (situación planteada de manera verbal, tabla de datos y gráfica). Los alumnos, además, no describieron explícitamente y con detalle la variación conjunta del precio y el peso del paquete. La descripción era general: "cuando aumenta el peso del paquete, aumenta la cantidad de dinero a pagar". Pero, al parecer la gráfica era una representación estática, por llamarla de alguna manera, donde los segmentos de recta no representaban el tipo de dependencia entre las variables.

Analizar las coordenadas de un punto cualquiera de uno de los segmentos llevó a los estudiantes a modificar la comprensión respecto a la gráfica y a lo que se estaba representando con ella. Varios alumnos generaron preguntas y comentarios como los siguientes: "¿Entonces el segmento de línea también tiene significado?" "¿No se deben unir los puntos en la gráfica?" "¿Es correcto dejar sólo puntos?" "¿Cuándo sabremos si podemos unirlos?" "¿La línea no es sólo para marcar la tendencia?". Discutieron en grupo y la conclusión fue que las representaciones elaboradas por los equipos C y D eran buenas, eran justas: "sería justa esta forma de cobrar", pero surgieron otras preguntas "¿Cómo debía ser la gráfica?" "¿Se valía dibujar sólo puntos?" y ¿Cómo realmente cobraban las empresas de envíos de paquetes? Los estudiantes evaluaron las representaciones gráficas en términos de la *situación* DHL planteada, pero no estuvieron convencidos de dibujar una gráfica con únicamente puntos. Uno de los estudiantes indicó "las empresas redondean [refiriéndose al valor del peso del paquete] para determinar el costo de envío". Por lo tanto, los estudiantes determinaron que las gráficas realizadas por los equipos C y D (figura 9) no correspondían a un problema real. Sin embargo, continuaron planteando que "sería justa esta forma de cobrar".

4.4. Cuarto ciclo de entendimiento: refinamiento

Durante la discusión grupal los estudiantes se preguntaron cómo sería entonces la gráfica que representaba la *situación* DHL real. Después de pensarlo un rato hubo estudiantes que propusieron una gráfica en forma de escalón y unir los puntos con segmentos horizontales y verticales, pero ahora en forma de escalones. Observaron que la gráfica se parecía de nuevo al tipo de las gráficas de barras. Esto generó discusiones en el grupo. De nuevo, los estudiantes no consideraban importante darle significado a los segmentos verticales dibujados para recrear los escalones. Se encontraban de nuevo en una fase de entendimiento que implicaba comprender la relación entre la tabla de datos construida, la gráfica elaborada y la *situación* DHL planteada de manera verbal.

Ante la solicitud del profesor, de que los alumnos explicaran el significado de cualquier punto tomado dentro del segmento vertical (pidió sus coordenadas), los estudiantes reflexionaron y llegaron a la conclusión de que para cualquier punto sobre los segmentos verticales no era claro qué valor correspondía a la tarifa. Alguien propuso borrar los segmentos verticales y pasó al pizarrón a eliminarlos. Todos manifestaron sorpresa al observar la forma que tomaba la gráfica, dijeron "nunca habíamos visto una gráfica así, ¿existe?" El estudiante le explicó a todo el grupo el significado de la gráfica (de la función escalonada) y finalmente, dibujó la gráfica correspondiente a la *situación* DHL. Ahora la gráfica correspondía a la tabla de datos, y viceversa la tabla de datos correspondía a la gráfica elaborada. El grupo relacionó ambos registros de representación y señaló que la variación de las cantidades se observaba de la misma manera en la tabla que en la gráfica y además en forma verbal (es decir, acorde a la situación planteada). La idea de variación conjunta se había empezado a refinar. Los estudiantes observaron cómo variaban las cantidades y cómo podía representarse esa variación conjunta en forma gráfica.

Como tarea individual, extra clase, los estudiantes volvieron a dibujar una gráfica de cualquier zona. Varios estudiantes (10, la mitad del grupo) entregaron un registro de representación gráfico. La figura 10 muestra una de las tareas representativas (o registro de representación) de cinco estudiantes, en ella se ven los avances en comprensión, pero también varias dificultades, sobre todo para determinar la escala apropiada para el eje vertical en la gráfica. Los otros cinco estudiantes hicieron bien su gráfica.

En la gráfica de la figura 10 se observan los datos de la segunda columna de la tabla de la zona 1, correspondiente al precio por peso de paquete y cómo los estudiantes la agregaron al eje *y*, sin cuidar la proporcionalidad (0, 307.76, 324.14, 340.52, …, 1417.74). En el eje *x* representaron el peso correspondiente al paquete que se deseaba enviar (0, 1, 2, 3, …, 30). Es decir, los estudiantes hicieron una gráfica cuyo comportamiento resultó ser lineal. Los otros cinco estudiantes entregaron gráficas correctas. Aunque se observó un avance (refinamiento, en términos de Lesh y Doerr, 2003) en la comprensión de la forma de representar la situación, todavía se requiere mejora.

5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los equipos de estudiantes modelaron la *situación* DHL con base en sus conocimientos previos y de acuerdo con la interpretación que dieron a las preguntas planteadas. Los modelos fueron representados mediante tablas y gráficas.

Kilos	Zona 1
1	307.76
2	324.14
3	340.52
4	380.18
5	419.84
6	459.06
7	498.28
8	537.50
9	576.72
10	615.94
11	656.03
12	696.12
13	736.21
14	776.30
15	816.39
16	856.48
17	896.57
18	936.66
19	976.75
20	1,016.84
21	1,056.93
22	1,097.02
23	1,137.11
24	1,177.20
25	1,217.29
26	1,257.38
27	1,297.47
28	1,337.56
29	1,377.65
30	1,417.74
Kg. adicional	40.09

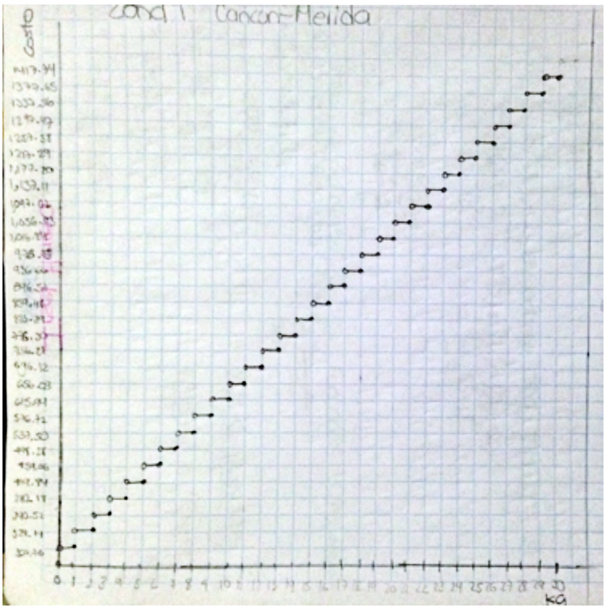

Figura 10. Gráfica de los datos correspondientes a la zona 1. La tabla de datos se incluye en esta figura sólo para indicar los datos tabulados, pero no fue entregada como parte de la tarea por los estudiantes.

Las representaciones de los equipos A, B y E (60% de los estudiantes) se basaron en el análisis efectuado sobre las tablas de la figura 3, para responder a la pregunta ¿Cuál es el comportamiento de estas diferencias? Calcularon diferencias entre los datos y organizaron la información en tablas de datos, las cuales representaron, posteriormente, con gráficas de barras. Los equipos C y D (40% del grupo) presentaron un modelo distinto. Ellos graficaron tarifa *vs* peso; pero, no pudieron describir qué representaban los segmentos de línea dibujados en el contexto de la *situación* DHL (proceso reversible de pensamiento).

Si tomamos en cuenta que los significados asociados con un sistema conceptual (en este caso el concepto función) tienden a estar distribuidos a través de una variedad de medios representacionales (Lesh y Doerr, 2013), y que la comprensión del concepto se da en la medida que un estudiante puede transitar entre diferentes representaciones, en este caso, en las gráficas de la figura 9 y la explicación verbal, podemos argumentar que inicialmente se mostró falta de comprensión del concepto de función, ya que los estudiantes no atribuyeron significado a los segmentos lineales dibujados para unir los puntos en términos de las variables involucradas en su registro.

Durante todo el proceso de análisis se observó cómo los estudiantes manejaron cuatro medios representacionales (metáforas basadas en el experiencia, lenguaje hablado, tablas y gráficas), que les permitieron comprender la *situación* DHL y matematizarla. Además, los alumnos tuvieron la oportunidad de diferenciar y refinar los modelos construidos, de tal manera que los conceptos de crecimiento y variación conjunta aparecieron. Los estudiantes observaron que el cambio (dependencia entre variables) observado en la tabla, podía representarse en forma gráfica y que al describir la gráfica ésta debía generar la misma información expuesta en la representación tabular y verbal. Es decir, se dieron cuenta de que los registros de representación debían coincidir y mostrar la misma variación conjunta.

6. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este estudio apoyan las afirmaciones de investigadores como Duval (1996) quien manifiesta que hace falta trabajar la conversión de los registros, por ejemplo de representación gráfica a los de representación verbal y viceversa, similar a la sugerencia de Lesh y Doerr (2003) respecto a la necesidad de propiciar el uso de diferentes tipos de registro representacional para apoyar el aprendizaje de las matemáticas. Una de las actividades fundamentales en la enseñanza de las matemáticas es apoyar en los estudiantes el desarrollo de sistemas conceptuales, que aprendan a matematizar situaciones, identificar variables y la relación entre éstas; esto permitiría la comprensión de conceptos como función y variación, esenciales en matemáticas. Los estudiantes deben aprender a plantear preguntas al problema o situación, "verlo" desde varias perspectivas y determinar posibles respuestas. Esta forma de pensar la matemática no ha sido interiorizada por los estudiantes que participaron en este estudio, quienes sólo trataron de responder las preguntas planteadas en las situaciones a partir de procedimientos de rutina o algoritmos, los cuales no necesariamente comprenden cuándo, por qué y cómo deben ser utilizados. Por otra parte, el tipo de pregunta que se plantea en las situaciones puede determinar, en gran medida, la respuesta de los estudiantes y posibilitar que recuerden y utilicen ciertas representaciones y contenido matemático. En este sentido el papel del profesor es importante, debido a que debe generar espacios para el desarrollo de conocimiento al resolver problemas o construir modelos para interpretar, describir, predecir alguna situación cercana a la vida real. La comunicación de ideas juega un papel esencial para refinar el conocimiento. Finalmente, los estudiantes al analizar otras situaciones como ésta, utilizarán la experiencia desarrollada, podrán identificar semejanzas y diferencias e integrarán nuevas características y relaciones asociadas con el concepto base y con otros conceptos asociados. Lo anterior incidirá en su interés por la disciplina y su percepción con respecto a la utilidad se verá cuestionada.

Uno de los aportes principales de esta investigación, consiste en la caracterización de un conjunto de ciclos o niveles progresivos de entendimiento de los conceptos de función y variación con base en el uso de registros representacionales y en una perspectiva de modelos y modelación que pueden ser útiles como referencia para diseñar actividades que promuevan el desarrollo progresivo de los ciclos. Por otra parte nos permiten conocer y comprender la evolución de ideas de los estudiantes.

REFERENCIAS

De Villiers, M. D. (1988). "Modelling with Step-Functions". *Mathematics in School, 17* (5), pp. 8-10.

DHL (2011, 28 de agosto). *Servicios nacionales DHL express*. Recuperado de http://www.dhl.com.mx/es/express/centros_de_recursos/tarifas_servicios_nacionales.html#time_definite

Duval, R. (1996). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Traducción de uso interno realizada por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, México. Título original "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée". *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65, IREM de Stramburgo, 1993.

Greeno, J.G. (1991). "Number sense as situated knowing in a conceptual domain". *Journal for research on Mathematics Education*, *22* (3), pp. 170-218.

Kaput, J. (1999). "Teaching and Learning a New Algebra". En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 133-155.

Kieran, C. (2006). "Research on the learning and teaching of algebra". En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 11-49.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 3-34.

Lesh, R. (2010). "Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully". *Journal of Mathematical Modeling and Application, 1(2*), pp. 16-48.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2011). *Developing essential understanding of expressions, equations and functions.* Reston, VA: NCTM.