Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Moreno-Armella, Luis; Elizondo Ramírez, Rubén
La Geometría al encuentro del aprendizaje
Educación Matemática, vol. 29, núm. 1, abril, 2017, pp. 9-36
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

 DOI: 10.24844/EM2901.01

La Geometría al encuentro del aprendizaje

The Encounter of Geometry with Learning

Luis Moreno-Armella[1]
Rubén Elizondo Ramírez[2]

Resumen: Concebir el espacio como aquel que nos rodea y la inflexibilidad de la geometría euclidiana para ofrecer un análisis del espacio físico durante más de 20 siglos, llevó a una crisis en la concepción de las matemáticas. Con el tiempo, esto creó una tensión entre la cognición y la lógica que se tornó un desafío de cara a los paradigmas del conocer y del aprendizaje. El análisis epistémico que planteamos intenta crear una perspectiva que vincule el análisis del conocimiento matemático y su aprendizaje. La toma de conciencia sobre las geometrías no-euclidianas fracturó la correspondencia estrecha entre espacio físico y estructura matemática. Hoy en día, presenciamos algo análogo con la instalación de los medios digitales y dinámicos que escinden la correspondencia con los objetos estáticos.

A partir del modelo digital explorado, nos enfocamos al estudio de los recursos que ese modelo ofrece y cómo afecta al aprendizaje. Siguiendo esa ruta, se muestra una nueva re-descripción representacional de las matemáticas en el medio digital y cómo ello modifica su ontología para dar cabida a la variación y al cambio.

Fecha de recepción: 26 de junio de 2016. **Fecha de aceptación:** 6 de diciembre de 2016.
[1] **Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México,** lmorenoarmella@gmail.com
[2] **Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México,** elizondocch@gmail.com

Palabras clave: *epistemología, modelo, representación, intuición, aprendizaje*

Abstract: Conceiving of space as the space around us, and the inflexibility of Euclidean geometry to analyze physical space for over 20 centuries led to a crisis in the conception of mathematics. Eventually this created a tension between cognition and logic. We explain how such developments challenge learning paradigms and mathematical inquiry for learners today. We introduce this epistemological analysis to help us think about the nature of mathematical knowledge and hence learning today. The direct correspondence between physical space and mathematical structure was broken after the discovery of non-Euclidean geometry. Similarly, this is what is occurring with the implementation of dynamic mathematical environments that breaks the correspondence with static mathematical objects.

With our digital model of non-Euclidean geometry we focus on the affordances of new technological environments and the knowing of mathematics learners. This illustrates a representational re-description of mathematics and how it can modify our natural ontology to accommodate change and variation.

Keywords: *epistemology, model, representation, intuition, learning.*

LA REALIDAD Y LA GEOMETRÍA

A partir de experiencias muy básicas, como tensar una cuerda o dibujar una circunferencia siguiendo el borde de un disco compacto llegamos a entender que, en efecto, los postulados de la geometría euclidiana son aceptables como hechos evidentes por sí mismos, que son *verdaderos* pues coinciden plenamente con nuestro sentido común, con nuestra comprensión intuitiva del mundo que nos rodea. Si tensamos una cuerda entre nuestras manos, nuestra experiencia inequívocamente nos dice que hay una única forma posible para la cuerda. Cuando observamos dos ángulos rectos, no nos cabe duda que son iguales (congruentes); y si tenemos un segmento, ¿quién duda (si hay espacio suficiente en el papel) que lo podemos prolongar? A partir de esas proposiciones empezamos a enhebrar uno tras otro los teoremas de los Elementos. Van emergiendo resultados que ya no son tan evidentes por sí mismos, como es el caso con el teorema de Pitágoras. Euclides suministró así una organización global a todos esos teoremas que habían sido cocinados a fuego lento durante un largo tiempo por todos los geómetras que le precedieron. El sistema euclidiano partía de la intuición y continuaba por los senderos de la deducción lógica, revelando lo que no se veía a simple vista sino con los ojos de la racionalidad. Esa estructura híbrida compuesta de intuiciones, experiencias sensibles y procesos deductivos se erigió en la norma del proceder matemático ininterrumpidamente hasta el siglo XIX. Como un péndulo, ha oscilado siempre entre dos extremos: de la intuición a la deducción y de allí a la intuición en un vaivén interminable. Aun los resultados que parecían sobre el papel alejados de la intuición, resultaron de altísimo valor a la hora de aplicarlos a situaciones del espacio físico. ¿A qué distancia de la costa se encuentra el barco que divisamos a lo lejos? ¿Qué altura tiene esta pirámide? ¿A qué distancia se halla la luna? Y en manos de Newton, la explicación geométrico-dinámica de las órbitas elípticas que siguen los planetas en su viaje alrededor del sol. Newton había enriquecido la geometría al incorporar el movimiento como una de las dimensiones de la descripción, antes exclusivamente euclidiana.

No había en la mente de los griegos (más cercanos al pensamiento empírico que al idealismo platónico), ni tampoco en la de sus herederos de la Ilustración, ninguna duda que este método deductivo (no necesariamente aplicado dentro de un sistema postulacional global como el euclidiano) producía *hechos verdaderos* al aplicarse al mundo material. No era necesaria una comprobación práctica que incluso, en muchos casos, no existía, como por ejemplo al calcular la distancia de la Tierra a la luna. En este momento nos situamos en un punto decisivo: reemplazar la verificación empírica por la deducción lógica que apoyada en los postulados producen resultados verdaderos. De este modo las matemáticas se tornaron una empresa *teórica*.

Las matemáticas se constituían así en una especie de mano virtual que podía introducirse debajo de las apariencias de los fenómenos, para hallar las verdaderas causas de lo que nuestros ojos revelaban ante nosotros. En cierto modo, se seguía la tradición pitagórica de identificar el territorio con el mapa, el modelo matemático con la estructura del espacio físico.

LA REALIDAD SE TRANSFORMA

Una convicción que atraviesa más de veinte siglos –la tradición pitagórica– difícilmente se desvanece. Sin embargo, a partir de la obra euclidiana, se fue desarrollando una inquietud nacida del postulado de las paralelas. Los postulados debían ser *enunciados evidentes por sí mismos*, sin asomo de duda sobre su veracidad. El de las paralelas afirmaba que por un punto exterior a una recta, en el plano determinado por esa recta y el punto, pasa una *única* paralela a la primera recta. Que pasa una es fácil de demostrar a partir de las consecuencias de los restantes cuatro postulados. El problema era la otra parte del enunciado: la *unicidad* de esa paralela. Una paralela a una recta dada es, para Euclides, una recta que por más que se prolongue no intersecta a la primera recta. Este postulado violaba entonces la convención de ser evidente por sí mismo y se sustentaba sobre una extrapolación de la experiencia sensible.

Euclides, sin embargo, eligió un enunciado que no hacía referencia al espacio más allá de donde alcanzan nuestros sentidos, pero se pagaba el precio de la complejidad en su redacción. Veamos lo que dice esta versión alternativa del quinto postulado (Figura 1):

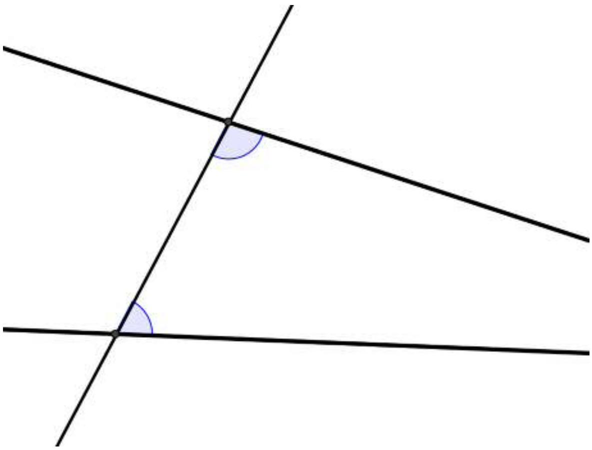

Figura 1. Dadas dos rectas y una transversal a ellas, si la suma de los ángulos de un mismo lado de la transversal (indicados en la figura) es inferior a 180 grados, entonces, al prolongar las rectas de ese lado (en la figura a la derecha) ellas terminarán por encontrarse.

La racionalidad euclidiana estaba orientada hacia un ideal de simplicidad y frente al postulado de las paralelas se levantaba un profundo dilema: optar por lo escueto de un enunciado que hacía explícita la presencia (indeseada) del infinito o elegir esta segunda versión, que finalmente fue la que eligió Euclides, pagando el costo de un enunciado alejado de la concisión propia de los postulados.

Sin embargo, desde sus inicios, los geómetras estuvieron inconformes con un postulado tan largo que carecía de la simplicidad y evidencia incontrovertible de los cuatro restantes. En consecuencia intentaron demostrarlo como si fuera un teorema más, a partir de los restantes y claro, de todo aquello que hubiese sido demostrado previamente.

Todos esos siglos, hasta el siglo XIX, no fue tiempo suficiente para alcanzar una demostración. Era natural pues, que en algún momento se llegara a sospechar que aquel aparente fracaso en la búsqueda de una demostración podía deberse a que tal demostración *no existía*.

Ahora bien, es sencillo probar que la unicidad de la paralela es equivalente al hecho que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados. Entonces, si no se pudiese demostrar la unicidad de la paralela, la suma de los ángulos de un triángulo podría ser distinta a esos 180 grados. Pero entonces, los geómetras se tendrían que enfrentar a dos opciones excluyentes:

a) Si fuese mayor que 180 grados, eso conduciría a la geometría de la esfera, cosa que resultaba familiar de la navegación.
b) Si fuese menor que 180 grados, entonces... ¿de qué espacio se estaría hablando?

Cuando tenía lugar la opción (a), dejaba de existir una paralela por un punto exterior y el espacio descrito era esencialmente la superficie de una esfera. Salvo detalles técnicos menores, esta era la situación si la suma de los ángulos interiores de un triángulo fuese mayor que 180 grados.

El problema, el nudo gordiano, aparecía con la opción (b). Esta opción equivalía a aceptar que por un punto exterior a una recta la paralela no era única: habría por lo menos dos (de hecho, pasaba una infinidad de paralelas). Nadie conocía un espacio con esa característica. Los geómetras tenían entre manos, entonces, un sistema que aceptaba los primeros cuatro postulados de Euclides y una versión extraña del quinto, a saber, que había más de una paralela por un punto exterior a una recta dada. Ese sistema no describía (o no parecía describir) el espacio físico donde vivían los geómetras.

Si tal sistema fuese coherente, habría que aceptar lo inaceptable: que las matemáticas no necesariamente describían la estructura interna del mundo físico. Los geómetras estaban razonando a partir de la cultura matemática anclada en la tradición pitagórica. Durante más de 20 siglos, se había pensado que la geometría era un mapa icónico, un espejo perfecto del espacio físico. El mapa se concebía como el territorio desmaterializado y por lo tanto, quien trabajaba con el mapa, tenía la posibilidad de ir por la vía del método deductivo al encuentro de los resultados geométricos. Modificar esa convicción, acotarla, iba a implicar esfuerzos profundos.

El geómetra ruso N. Lobachevski *se atrevió a pensar* en una geometría en donde la suma de los ángulos interiores de un triángulo era menor que 180 grados. En su obra *Los nuevos principios de la Geometría* (1825) escribió (Bonola, 1955, p. 92):

> Los sucesivos intentos fallidos por más de dos mil años, desde los tiempos de Euclides, hicieron que despertase en mí la sospecha de que *la verdad que se deseaba probar no estaba contenida en los datos* [mismos del problema], y que para establecerla sería necesario recurrir a experimentos, por ejemplo, observaciones astronómicas, como es el caso para otras leyes de la naturaleza.

Lobachevski pone entonces, en tela de juicio, que se pueda demostrar deductivamente que la suma de los ángulos interiores de un triángulo fuese igual a 180 grados. Al afirmar que se necesitaría una verificación experimental, nos está diciendo que había comprendido que el sistema formal y su grado de coincidencia con el espacio físico son cuestiones *separadas*. Se va haciendo visible la nueva orientación que concibe la geometría como un modelo que no se confunde con el territorio, a saber, el espacio físico. Insistiendo en esta línea de investigación, diez años más tarde (1835) Lobachevski escribe (Efimov, 1980):

> Basándome en observaciones astronómicas... verifiqué que en un triángulo cuyos lados son casi tan grandes como la distancia de la Tierra al Sol, la suma de los ángulos difiere de dos rectos en menos de 0.0003 segundos. En consecuencia, puede afirmarse que las proposiciones de la geometría práctica han sido rigurosamente establecidas.

Concluye entonces que la geometría euclidiana (la geometría práctica) es un buen modelo *para la región del espacio considerado*. Al concebir esa manera de explorar la naturaleza del sistema geométrico, Lobachevski estaba decodificando un mensaje importante: el espacio físico se comporta como si fuera euclidiano –siempre y cuando estemos considerando una región del espacio de dimensiones relativamente pequeñas–, pero *no es seguro* que así sea cuando se considerara una región del espacio más amplia. En otras palabras, un rayo de luz de la Tierra a la luna puede considerarse como un segmento de recta euclidiano, pero no es seguro que un rayo de luz de la Tierra hasta una estrella que se encuentra a diez años luz de la Tierra, pueda seguir siendo considerado como un segmento euclidiano.

Lobachevski *desafió* al sistema euclidiano con su experimento de medición pero el resultado no fue concluyente. Es interesante que él hable de la geometría euclidiana como *práctica*; se puede presentir que tenía clara la diferencia entre el sistema formal, organizado alrededor de los postulados y la *adecuación* del sistema como modelo del espacio físico.

El problema que aquí hemos intentado explicar constituye uno de los momentos más significativos de las matemáticas modernas. En efecto, la *des-sustanciación* de los sistemas formales de las matemáticas, es decir, la distinción entre sistema formal y modelo, ha sido de una importancia que no se puede exagerar. *Puede afirmarse sin titubeos que la epistemología de las matemáticas sufrió, con la creación de las geometrías no-euclidianas, un impacto cuya onda expansiva llega hasta nuestros días*.

Pensar así, que el sistema formal *per se* y el sistema formal como modelo son cosas distintas, implicaba el inicio de la bifurcación entre la *verdad* y lo *que se puede demostrar:* el teorema, insiste el geómetra euclidiano, *no es evidente pero ha sido deducido de proposiciones evidentes y por lo tanto expresa un hecho verdadero sobre el espacio. La verdad no se diluye durante el proceso deductivo*. Sin embargo, responde el *nuevo geómetra*, no se trata del proceso deductivo. Se trata de los postulados de partida.

Lobachevski estaba en una clara situación de desventaja frente a un geómetra que explorara el sistema euclidiano pues este último tendría *la guía intuitiva*, la experiencia derivada de vivir en un espacio localmente euclidiano. Seguramente por ello, esta geometría llamada más tarde por F. Klein *geometría hiperbólica*, iba a quedar durante algunas décadas como una curiosidad matemática. No se conocía, por ejemplo, una superficie cuya geometría coincidiera con la hiperbólica. En 1868, el matemático italiano E. Beltrami comprendió que sobre una superficie de curvatura negativa constante, si se interpretaban las geodésicas de dicha superficie como líneas rectas, entonces su geometría intrínseca era justamente la geometría de Lobachevski. Tal revelación empezó a despejar el halo de misterio que todavía acompañaba al sistema hiperbólico. Esa tensión dialéctica entre lo formal y lo concreto respondía a las necesidades del entendimiento humano.

Uno de los resultados analíticos obtenidos por Lobachevski vinculaba la longitud de un segmento con el ángulo que formaba una paralela a una recta dada. Más precisamente (véase Figura 2):

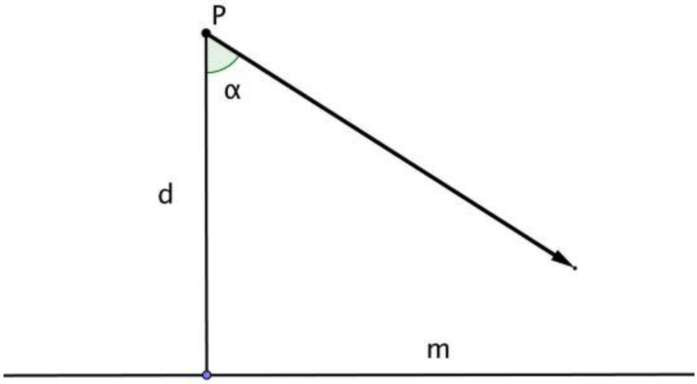

Figura 2. Dada la recta m y un punto P fuera de la recta, si por P pasa más de una paralela entonces puede verificarse que hay una primera paralela a la derecha.

Dada la recta m y un punto P fuera de la recta, si por P pasa más de una paralela entonces puede verificarse que hay una primera paralela a la derecha, como ilustra la figura, que es paralela por P a la recta m. La distancia d entre P y m está relacionada con el ángulo α y se satisface la siguiente relación fundamental:

$$\tan(\alpha/2) = \exp(-d).$$

Entonces, al aumentar la distancia d, el ángulo α disminuye y recíprocamente, si disminuye d, el ángulo aumenta.

Suponer que por un punto externo a una recta pasa más de una paralela implica que, dado un triángulo cuyos ángulos son α, β, y γ, se tiene que: $\alpha + \beta + \gamma < 180°$. Además su área es:

$$\text{área} = k(180° - (\alpha + \beta + \gamma))$$

donde k es una constante positiva. La suma de los ángulos internos puede tomar cualquier valor numérico entre 0 y 180 grados de acuerdo con la fórmula anterior que vincula la longitud de los lados de un triángulo con los ángulos.

Esto explica por qué no puede haber figuras semejantes a menos que sean congruentes: la medida angular y la medida lineal están vinculadas por la fórmula que acabamos de presentar.

Investigamos, tomando un modelo re-diseñado con GeoGebra, como *instrumento de mediación*, los niveles de apropiación de esta geometría en el caso de estudiantes de primer año de bachillerato, y de profesores que estudian una maestría en Matemática Educativa (Cinvestav). Es de notar cómo a partir del realismo que induce la geometría dinámica, se puede detonar una trayectoria de aprendizaje, es decir, de toma de conciencia sobre el significado de las reglas formales de una estructura matemática y de cómo *movernos* a través de ellas.

El trabajo con estudiantes y docentes revela lo que nos parece una joya cognitiva, a saber, que *lo que es coherente desde el punto de vista lógico, no necesariamente es aceptable para la intuición.*

Pero no se puede obviar un hecho central y es que nuestra percepción si bien tiene un sustrato biológico incontestable, se desarrolla dentro del espacio social y cultural. Nuestros sentidos son sentidos transformados por la cultura. Todo el sensorio humano adquiere, de acuerdo con las reglas culturales que le corresponda, habilidades que van más allá del sustrato biológico. Lo que llamamos *intuición* se transforma de acuerdo con la atmósfera cultural en la que nos desarrollamos.

Pasemos ahora a la descripción matemática de un espacio cuya geometría podremos interpretar como hiperbólica bajo ciertas consideraciones que iremos haciendo explícitas a medida que transcurra la exposición. *Más adelante daremos voz a profesores y estudiantes con quienes discutimos estas ideas en cursos y talleres en diferentes momentos.*

SEMIPLANO DE POINCARÉ

Imaginemos un plano atravesado por una recta. Tomemos uno de los dos semiplanos y olvidemos el otro. Si lo pensamos en términos cartesianos, el semiplano con el que trabajaremos se define como el conjunto de todos los pares (x, y) para los que $y > 0$.

Dados dos puntos A y B del semiplano considerado, el h-segmento (la h indica *hiperbólico*) que los conecta es, *por definición*, el arco de circunferencia que tiene como centro la intersección del eje x con la mediatriz del segmento euclidiano que une A con B (Figura 3).

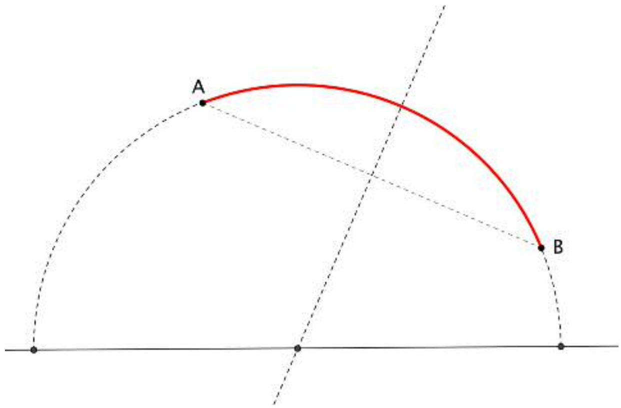

Figura 3. Dados dos puntos A y B del semiplano considerado, el h-segmento que los conecta es, por definición, el arco de circunferencia que tiene como centro la intersección del eje x con la mediatriz del segmento euclidiano que une A con B.

Este arco, como ilustra la Figura 3, es parte de la semicircunferencia *ortogonal* a la recta frontera (o eje de las abscisas, si se prefiere) que pasa por A y B. Esa semicircunferencia, *sin los dos puntos de intersección con el eje x*, es una h-recta completa. Euclidianamente, la longitud de esa semicircunferencia es π*R donde R es su radio. Pero al interpretarla como recta hiperbólica, su longitud es infinita pues conecta dos puntos que se encuentran sobre la recta frontera que es inalcanzable. En las otras direcciones, alejándose del borde o dirigiéndose a derecha o izquierda dentro del semiplano, este se extiende indefinidamente. Sabemos entonces que las h-rectas son las semicircunferencias ortogonales al eje de las abscisas. Califican también como rectas las semirrectas (euclidianas) perpendiculares a la recta frontera –son como circunferencias ortogonales al borde que tienen radio infinito–. Es fácil comprobar que con estos acuerdos se cumplen los primeros cuatro postulados de Euclides, aclarando que los ángulos, por convención del modelo, se miden de la misma forma que se miden en la geometría euclidiana. Veamos que NO se cumple el postulado euclidiano de las paralelas, sino que por un punto exterior a una recta pueden pasar por lo menos dos paralelas. Para ilustrarlo elijamos como h-recta, la h-recta AB. Por el punto P podemos trazar las paralelas PA y PB; PA es la paralela a la izquierda de AB y PB es la paralela a la derecha de AB. Entonces por P pasan por lo menos esas dos paralelas: no se cumple el postulado euclidiano de las paralelas (Figura 4).

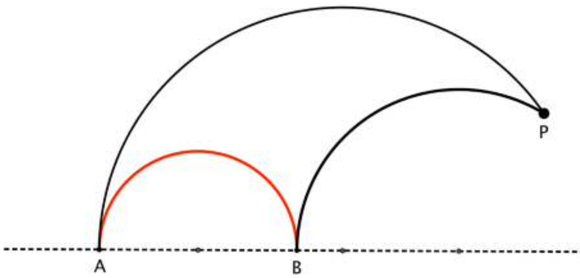

Figura 4. Por el punto P pasan al menos dos paralelas.

Ahora elijamos tres puntos A, B y C, y construyamos el h-triángulo que tiene vértices A, B y C como en la Figura 5. Se **ve** que la suma de los ángulos interiores de este triángulo es menor que 180 grados.

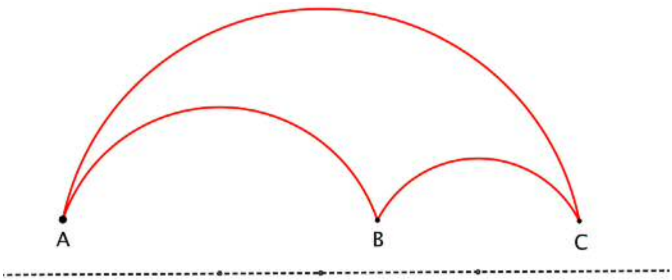

Figura 5. La suma de los ángulos interiores de un triángulo hiperbólico es menor que 180 grados.

Si en el triángulo anterior llevamos los tres vértices hasta el borde del semiplano, cada ángulo medirá cero, pues en cada vértice habrá un par de rectas ortogonales al borde que se encuentran en ese vértice: por lo tanto el ángulo que se forma entre ellas es cero (Figura 6).

Como el defecto de este triángulo es máximo (π) su área es máxima. Esta es una propiedad muy diferente de la que tiene el área euclidiana: un triángulo euclidiano que tuviera sus tres vértices en el infinito tendría área infinita.

La construcción básica que hemos empleado para las h-rectas es la *mediatriz* de un segmento euclidiano.

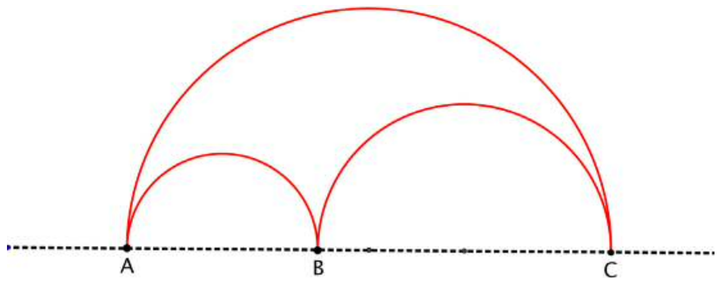

Figura 6. Un triángulo hiperbólico cuyos ángulos internos miden cero grados.

La narrativa que estamos desarrollando corresponde a la interacción en el salón de clases con los profesores que participaron durante los talleres en los que fuimos exponiendo estas ideas. Muchas de las explicaciones que aquí se ofrecen, responden a preguntas y discusiones colectivas de entonces. Desafortunadamente nuestro poder narrativo no hace plena justicia a la riqueza de las discusiones y debates en el salón de clases. Las construcciones que iremos realizando se hacen a partir de herramientas euclidianas y esos resultados los interpretamos como hiperbólicos ¿Qué consecuencias tiene esto? Que ¡*hemos creado un modelo de geometría hiperbólica dentro de la geometría euclidiana*!

Para los docentes, la idea de que una geometría pudiese estar viviendo en el seno de otra, resultó casi inexplicable. Si encontráramos una contradicción en la geometría hiperbólica entonces, como la hemos construído *dentro* del mundo euclidiano, se traduciría en una contradicción en dicho mundo. La conclusión es contundente: si el mundo hiperbólico no es consistente (*coherente*, le hemos llamado antes) entonces el mundo euclidiano tampoco es consistente. Pongámoslo en términos positivos: *si el mundo euclidiano es consistente, entonces el mundo hiperbólico también lo es*. A la luz de este resultado podemos apreciar la ironía en las intenciones de todos aquellos geómetras que creían poder demostrar que la geometría euclidiana era la única posible porque la hiperbólica era inconsistente.

La intuición tanto como la organización lógica son componentes coextensivos del pensamiento matemático. Durante el trabajo con estudiantes y profesores, enfatizamos que el papel de las representaciones simbólicas es crucial para el desarrollo de las ideas matemáticas y para encontrar las formas de operarlas.

Después de la discusión de algunos resultados propuestos con el afán de que todos los participantes fuesen apropiándose de las ideas básicas y *desarrollando el significado no-euclidiano* de las proposiciones, pasamos a la exploración mediante un semiplano al que se le sumaron herramientas previamente construídas para hacer casi automático el trazado de una mediatriz y de una circunferencia hiperbólica por ejemplo. Ese “semiplano con herramientas” constituye un nuevo *mediador semiótico* para los docentes y estudiantes participantes con nosotros en esta aventura educativa. Las posibilidades de manipulación que se tienen en un medio digital, GeoGebra en este caso, generan un sentido de realismo que da significado a los objetos que van emergiendo y también a las situaciones en las que emergen.

LA VOZ COLECTIVA EN EL SALÓN DE CLASES

Una discusión por demás interesante se suscitó cuando uno de los docentes inquirió sobre la manera de trazar una h-circunferencia en el semiplano. Habíamos realizado sobre un pizarrón estático los cálculos conducentes a un resultado muy sorpresivo: *una h-circunferencia coincide con una circunferencia euclidiana, excepto que sus centros no coinciden en general*. Es decir, vemos en el espacio hiperbólico la misma forma circular con la que estamos familiarizados pero su h-centro está en otro lugar. El problema consistía en describir una manera de trazar dicha h-circunferencia. En ese momento habíamos presentado el “semiplano con herramientas” así que los docentes podían recurrir a las construcciones que el medio ya traía incorporadas. *Elaborar el modelo digital ha sido crucial en esta experiencia didáctica*. La Figura 7 ilustra el *medio dinámico enriquecido*:

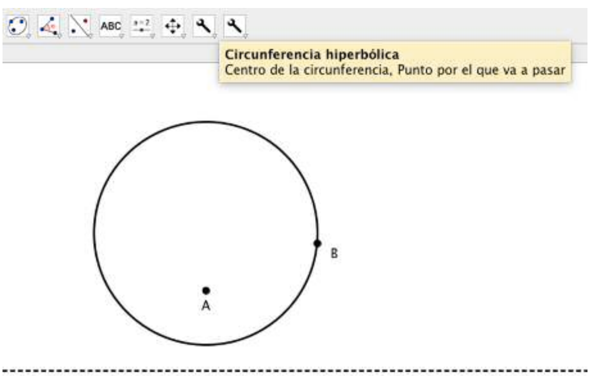

Figura 7. El medio dinámico enriquecido.

Vemos que, además de las herramientas usuales de GeoGebra, aparecen dos casillas adicionales. La primera sirve para trazar h-segmentos, h-semirrectas y h-rectas indicando básicamente un par de puntos. La segunda cuyo uso ilustraremos aquí, sirve para medir h-distancias y trazar una h-circunferencia señalando su centro y un punto por el que pasa dicha h-circunferencia.

En esta imagen abrimos la casilla donde residen las instrucciones para trazar la h-circunferencia (la última a la derecha). El centro es A y pasa por B. Cuando ilustramos estas acciones surgió la pregunta: ¿por qué el centro está "en otra posición" si la vemos como h-circunferencia? Después de un diálogo colectivo emergió la respuesta: "todos los puntos sobre la circunferencia equidistan de A" y un poco más adelante: "no estamos en un mundo euclidiano en este momento". Como la casilla tiene también el "metro hiperbólico", es decir, el criterio para medir las distancias hiperbólicas, los docentes decidieron medir las distancias desde A (el h-centro) hasta varios puntos sobre la h-circunferencia para verificar que esas distancias eran iguales a la h-distancia de A hasta B. El resultado, es la Figura 8:

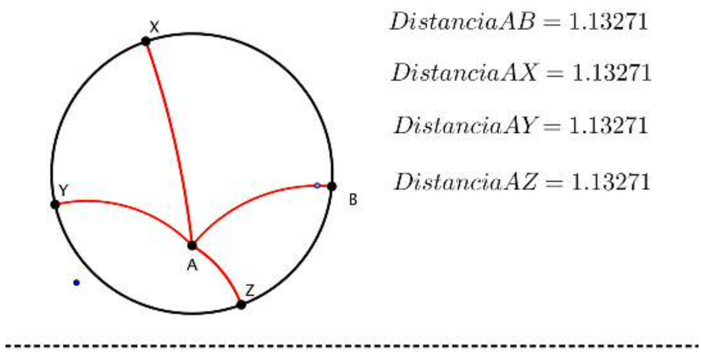

Figura 8. Varios h-radios de una h-circunferencia.

Intrigados, desplazaban cada uno de los puntos X, Y, Z, a lo largo de la h-circunferencia y podían ir verificando que esa distancia era constante: siempre el h-radio de la h-circunferencia.

Es difícil trasladar a esta narrativa el estado casi de conmoción que despiertan este tipo de experiencias vivas en el salón de clases, aun cuando (o ¿precisamente por eso?) los participantes activos sean docentes; esto quedó claro cuando se formuló la siguiente pregunta: "¿Y dónde está el otro centro?". Pedimos entonces replantear la pregunta y finalmente llegamos a este acuerdo: intentar re-construir con las herramientas (euclidianas) del medio digital, la h-circunferencia que se produce mediante la herramienta h-circunferencia que se acababa de emplear. La figura de la que se parte es la de una h-circunferencia con h-centro A y h-radio AB (Figura 9).

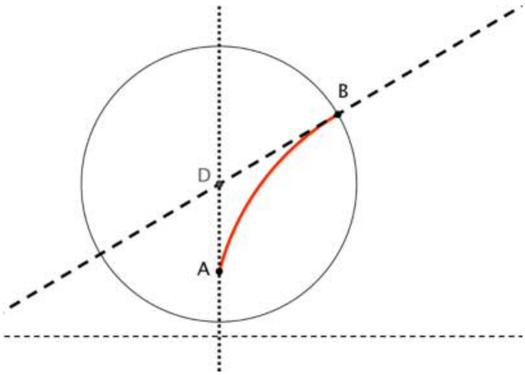

Figura 9. h-circunferencia con h-centro A y h-radio AB.

Para determinar el punto D, el centro euclidiano de la circunferencia, se procedió de la siguiente manera: trazamos la tangente por B y la perpendicular por A al borde del semiplano. El punto de intersección es D. Ahora, GeoGebra permite "llamar" a la herramienta circunferencia (euclidiana) de centro A y al realizar la acción vemos que al fijar B como punto sobre dicha circunferencia, coincide con la h-circunferencia original. En este punto del debate emergió una objeción: *acabábamos de describir, a partir de la h-circunferencia dada una manera de hallar el centro euclidiano, pero ¿cómo "sabía" la herramienta adicionada al GeoGebra la manera de trazar la h-circunferencia?*

Todas las casillas de GeoGebra suministran *vías rápidas* para trazar la mediatriz de un segmento, la bisectriz de un ángulo, una elipse, el lugar geométrico de un punto, etcétera. Cada una de ellas encapsula una construcción euclidiana que podemos adelantar, usualmente, con regla y compás. Una vez realizada la construcción, el medio digital permite sintetizar dicha construcción. Esta manera de ver los menús del GeoGebra faculta un acercamiento efectivo al conocimiento del medio digital. En el caso de la casilla añadida que lleva a la construcción de una h-circunferencia, la construcción es un poco más compleja porque involucra un tratamiento cuidadoso de la distancia hiperbólica. Pero eso no está al nivel de la interfase que los estudiantes y docentes van a manipular. Al nivel de la interacción con el *GeoGebra enriquecido*, la herramienta ya está lista. Acordamos, por estas consideraciones, que tomaríamos como *dada* y, sin discusión por el momento, la herramienta para trazar h-circunferencias. Terminada esta discusión emergió más adelante una conclusión interesante: bajo ese acuerdo, la reconstrucción del centro euclidiano de la h-circunferencia (que habíamos presentado previamente) *podía tomarse como una demostración*. Insistimos: no se trata de una demostración como se entiende en un contexto deductivo, formal. Se trata de abrir camino a la producción de una comprensión del hecho matemático. A este respecto citemos a René Thom (1973, pp. 159-209):

> El verdadero problema que confronta la enseñanza de las matemáticas no es el rigor sino el problema del *desarrollo del significado, de la existencia de los objetos matemáticos* (énfasis añadido).

Esta conclusión es muy importante porque permitió, con los estudiantes (cuyas edades estaban entre los 15 y 16 años) generar una *línea argumentativa* tomando las herramientas del GeoGebra original como afirmaciones validadas en el medio. De este modo llegamos a la idea de ***demostración contextual***.

Ahora, los docentes plantearon la pregunta recíproca: *si tenemos una circunferencia euclidiana, ¿podemos encontrar su centro como h-circunferencia?*

Para responder había que tomar un acuerdo: trataríamos de responder la pregunta en el contexto del GeoGebra enriquecido. Tratando de inducir una solución, propusimos a los docentes que analizaran el diagrama de la solución de la identificación del h-centro a partir del centro euclidiano para ver si se podía llegar a dicho diagrama de otra manera. La dificultad mayor que presentó esta actividad, consistió en el cambio de interpretación despertado por el vaivén entre la circunferencia como euclidiana y la circunferencia como hiperbólica. Pero había allí una buena oportunidad de fortalecer ambos marcos conceptuales. Ya no estábamos en el terreno de cuál geometría era verdadera o representaba mejor al espacio físico. Para entonces, estábamos sumergidos en los modelos y el razonamiento se basaba, más que en el razonamiento intuitivo, en las reglas de operación del nuevo medio digital. La figura a la que habíamos llegado antes la reproducimos a continuación (Figura 10):

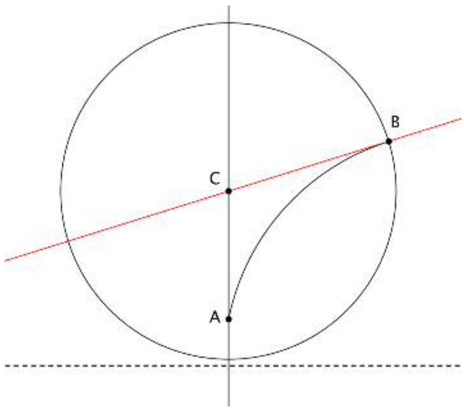

Figura 10. h-circunferencia con h-centro A y extremo de su h-radio B.

Está dada la h-circunferencia con h-centro A y extremo de su h-radio B. Para encontrar C, el centro euclidiano, trazamos la tangente euclidiana en B, y la perpendicular euclidiana al borde por A. El punto de intersección, C es el centro euclidiano.

Ahora bien, si tenemos la circunferencia euclidiana con centro C y extremo del radio euclidiano B, *¿cómo podemos construir el h-centro A?*

Resultó de alta complejidad asimilar esta pregunta. Tenemos la recta CB y necesitamos construir el h-radio AB, o sea necesitamos A. Pero, euclidianamente el arco AB es una parte de una circunferencia euclidiana que tiene a la recta CB como tangente. Para que el arco AB sea una h-recta (debe serlo porque es un h-radio) la circunferencia tangente a CB deberá ser ortogonal al borde y por lo tanto deberá tener su centro en el borde.

¿Cómo lograrlo? Respuesta: su centro debe ser el punto de intersección de la recta euclidiana perpendicular a CB con el borde. Queda así (Figura 11):

La recta perpendicular al borde por C es un trazo inmediato. Así queda determinado A y ahora una pequeña comprobación: invocando la casilla adicional para trazar h-circunferencias, trazamos la que tiene centro A y pasando por B y vemos que coincide con la que ya habíamos trazado como circunferencia

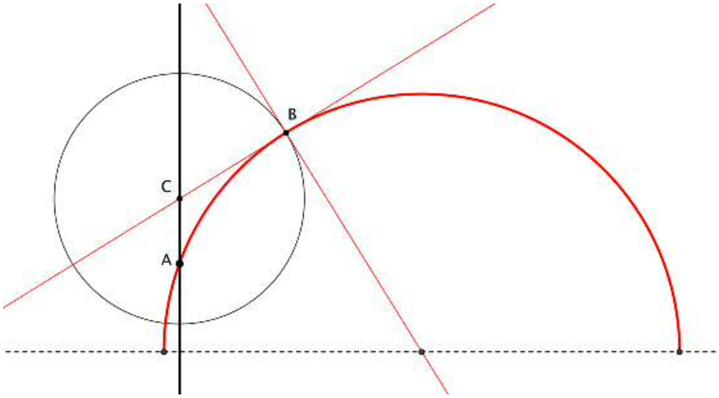

Figura 11. El centro debe ser el punto de intersección de la recta euclidiana perpendicular a CB con el borde.

euclidiana con centro C. Varias horas de trabajo que aquí reproducimos de modo simplificado. Desde luego, no se trata aquí de una demostración formal, no es nuestra intención. La educación matemática no se preocupa solamente de las demostraciones formales. Hay una amplia literatura sobre el tema de la demostración en los contextos educativos que involucra, aparte de los contenidos matemáticos por sí mismos, aspectos cognitivos y socioculturales de la mano de la mediación instrumental; en nuestro caso, se trata de la mediación de la geometría dinámica y más específicamente, del modelo digital del semiplano de Poincaré.

Vamos a comentar ahora sobre las actividades de los estudiantes con los que trabajamos. Ellos eran estudiantes de segundo semestre que tomaban el curso de Geometría y Trigonometría en un Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) del Instituto Politécnico Nacional, en la Ciudad de México. La aplicación de estos cuestionarios se llevó a cabo entre el 15 de marzo de 2016 y el 9 de junio de 2016, en las dos últimas unidades del semestre. Aparte de las sesiones ordinarias durante las clases, tuvimos sesiones extra con un grupo seleccionado, aleatoriamente; el grupo final consistió de 14 estudiantes. Durante el curso ellos se familiarizaron con los elementos básicos del GeoGebra mediante la construcción de objetos centrales de la geometría euclidiana como las mediatrices, bisectrices, construcción de triángulos equiláteros, incentros, circuncentros etcétera. Más adelante, con el grupo especial sobre todo, se brindó instrucción respecto a los elementos más significativos del semiplano de Poincaré. Veamos ahora algunas de las actividades planteadas, comenzando con la construcción de la h-mediatriz de un h-segmento en el semiplano de Poincaré.

El estudiante entrevistado respondió de esta manera:

- Se traza un segmento hiperbólico AB en el semiplano de Poincaré.
- Se trazan dos circunferencias con radio AB, una con centro en A y otra con centro en B.
- Se marca la intersección de estas circunferencias generando los puntos O y N. Se unen estos puntos mediante un segmento hiperbólico y, entonces, este segmento es la mediatriz hiperbólica del segmento AB (Figura 12).

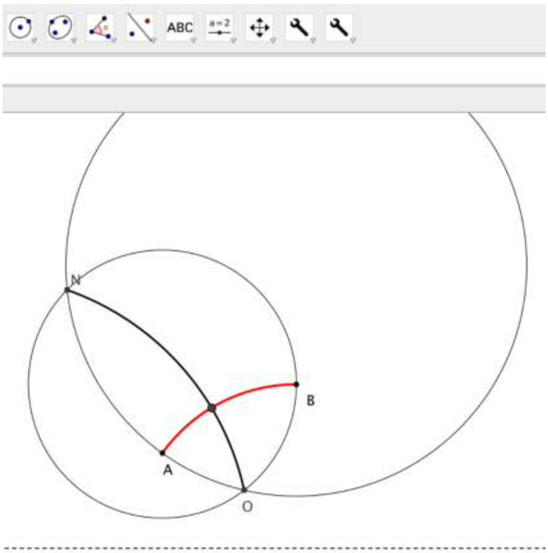

Figura 12. Construcción de la h-mediatriz.

Para comprobarlo, el estudiante marcó el punto en la intersección del segmento hiperbólico AB con el segmento ON generando el punto C (véase la Figura 13). Usando la herramienta de medición programada en el semiplano, mide las distancias de los segmentos AC y CB, y verifica que estas distancias son iguales. Además, mide la distancia del segmento original AB y observa que este segmento mide el doble que los segmentos AC y CB.

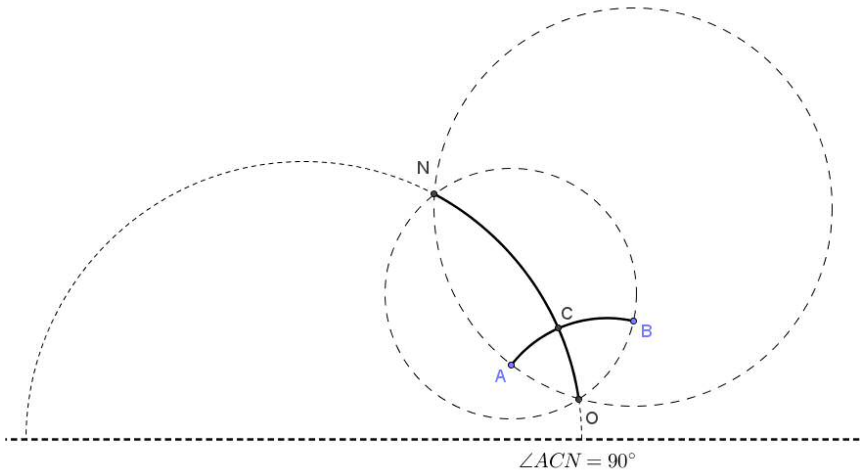

Figura 13. El estudiante usa las herramientas de medición para validar su construcción.

El investigador (uno de nosotros) interviene y le pregunta al estudiante sobre la definición de mediatriz. Este responde:

- Estudiante: "Es la recta que pasa por el punto medio de un segmento"
- Investigador: "¿Es necesario que forme un ángulo especial?"
- Estudiante: "Sí, de 90°".
- Investigador: "¿Ese [*ángulo, refiriéndose al ángulo ACN*] es de 90°?"

El estudiante mide el ángulo y la respuesta arrojada por el sistema de medición incorporado lo convence inmediatamente de que el ángulo en cuestión efectivamente es un ángulo recto. Con ello, concluye que su construcción es adecuada.

Durante el periodo de familiarización con GeoGebra, los estudiantes revisaron la construcción de la mediatriz euclidiana. Por ello, el estudiante de esta entrevista recordaba la construcción y la aplicó en el caso hiperbólico recurriendo al GeoGebra enriquecido. A pesar de tener todas las herramientas para trasladar la construcción euclidiana al caso hiperbólico, la novedad de esta geometría indujo al estudiante a *comprobar* que su construcción era correcta en la nueva geometría. La fase de *internalización*, de apropiación del nuevo sistema, está en marcha pero no alcanza aún la estabilidad deseada.

Teniendo en cuenta la complejidad del proceso de internalización del semiplano con su geometría extraña, decidimos mostrar la construcción del triángulo equilátero hiperbólico. Es bien conocido que la construcción de un triángulo equilátero es la primera proposición del libro I de los Elementos de Euclides. La construcción de la mediatriz presentada anteriormente, es esencialmente equivalente.

Se traza un h-segmento AB (véase la Figura 14). Los tres lados del triángulo por construir deben tener la h-longitud de AB. Entonces, trazamos las h-circunferencias con radio AB y centro en A y en B. Tomamos la intersección C de estas h-circunferencias. Esto determina dos h-segmentos AC y BC de igual h-longitud que AB. Por lo tanto, el triángulo ABC es equilátero. La construcción es idéntica a la euclidiana.

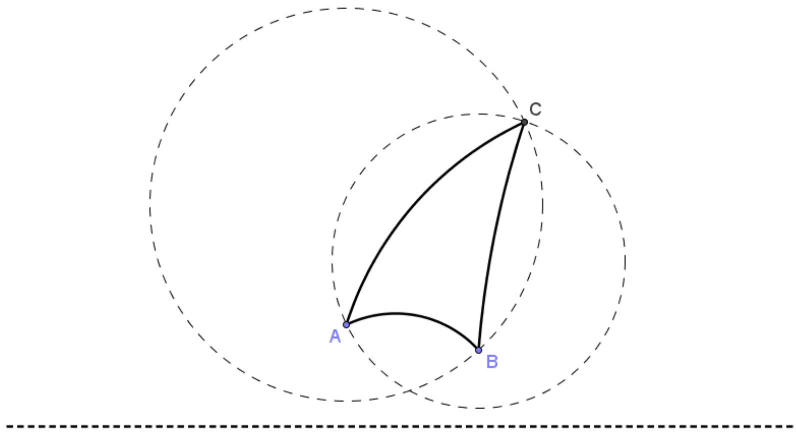

Figura 14. El triángulo equilátero hiperbólico.

Vale la pena mencionar, y esto se hizo durante el trabajo con los docentes, que Euclides, ante una posible inquietud por el estado del postulado de las paralelas, parece evitarlo y no lo utiliza sino hasta la proposición 29 del libro I. Esta proposición nos dice que *dadas dos rectas paralelas y una transversal a ellas, los ángulos alternos internos son iguales.* En el caso hiperbólico esto falla como ilustra la Figura 15.

Las h-rectas p, q son paralelas y los ángulos alternos internos formados mediante la transversal, no son iguales. Este es un lugar donde la geometría euclidiana y la hiperbólica toman rutas distintas.

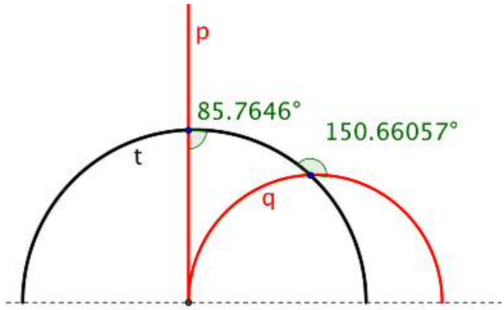

Figura 15. Los h-ángulos opuestos por el vértice no son iguales.

Más adelante los estudiantes llevaron a cabo diversas construcciones hiperbólicas entre las que destaca la del h-cuadrado. Desde luego, no todos los ángulos de un h-cuadrado pueden ser ángulos rectos pues eso equivaldría al postulado de las paralelas. En la geometría euclidiana los ángulos de un cuadrilátero siempre suman 360 grados (pues se pueden descomponer en dos triángulos, por ejemplo). No es el caso para los h-cuadriláteros y un par de estudiantes produjeron el siguiente ejemplo (Figura 16):

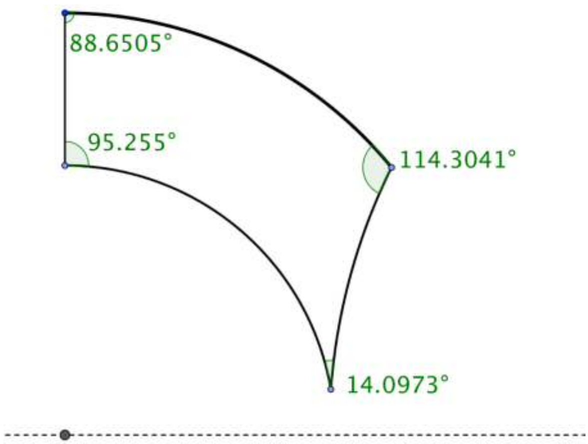

Figura 16. Construcción de un h-cuadrilátero.

La suma total es 342.3069 grados, algo alejado de los 360 grados. Esta construcción ya denotaba un progreso en la comprensión a partir de las *convenciones* pues comenzaban a dominar las reglas del juego hiperbólico. Sorprendidos con este ejemplo, después de una larga sesión, construyeron la Figura 17:

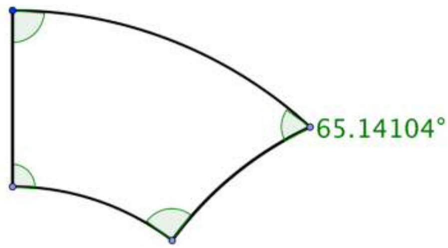

Figura 17. Cuadrilátero de Lambert construido por un estudiante.

Un cuadrilátero con tres ángulos rectos. Esta es una figura clásica de la historia de la geometría hiperbólica pues uno de los intentos de *demostrar* como teorema el postulado de las paralelas siguió este camino: construir un rectángulo con cuatro ángulos rectos. Es el famoso cuadrilátero de Lambert, uno de los precursores de las geometrías no-euclidianas.

En este punto, el investigador cuestiona a uno de los estudiantes (uno de los dos que produjeron este cuadrilátero) sobre la definición de cuadrado:

- Investigador: "¿Cómo defines un cuadrado?"
- Estudiante: "En la geometría euclidiana es una figura de cuatro lados que tiene todos sus ángulos iguales y que sumados dan 360 grados y sus longitudes también se mantienen iguales. En la geometría hiperbólica es diferente; sí mantiene la longitud de sus lados pero los ángulos no son ni de 90 grados ni suman 360 grados, *siempre son variables*" [Recordemos que los triángulos hiperbólicos pueden tener la suma de sus ángulos internos tan cercana a cero o tan cercana a 180 grados sin alcanzar estos valores cuando los vértices no están, en el modelo, sobre el borde]
- Investigador: "Pero, ¿cómo son entre sí los cuatro ángulos?"
- Estudiante: "Son semejantes, son iguales" (¿?)
- Investigador: "Entonces, teniendo ángulos iguales y distancias iguales, ¿definirías de alguna nueva forma lo que es un cuadrado de manera general?"

- Estudiante: "Sería una figura de cuatro lados cuyos lados y cuyos ángulos tienen la misma medida".

Es decir, estudiante es capaz de proporcionar una definición más general del cuadrado.

Otro objeto que se exploró con los estudiantes fue la bisectriz. En geometría euclidiana es una construcción clásica (proposición 9 del Libro I de los Elementos) que se planteó durante el trabajo en el salón de clases. Los estudiantes, imitaron la construcción en el caso hiperbólico. Dado un ángulo, para construir la bisectriz, primero trazamos una h-circunferencia con centro en el vértice A de los lados y marcamos los puntos de intersección con dichos lados B, C (ver la Figura 18). Entonces, con centro en B trazamos una h-circunferencia de h-radio BC y, con centro en C, una h-circunferencia con el mismo h-radio. Tomamos el punto de intersección de estas dos últimas h-circunferencias y lo denotamos D. Entonces la h-semirrecta AD es la h-bisectriz del ángulo CAB. En la clase se continuó discutiendo esta construcción y varios estudiantes (tal vez un poco incrédulos, pues la figura no permite una verificación "al ojo" como ellos dijeron) decidieron medir los ángulos BAD y DAC, para comprobar que en efecto, AD es la h-bisectriz.

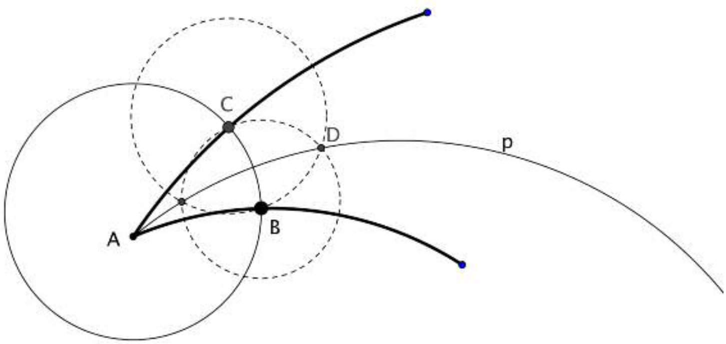

Figura 18. Construcción de la h-bisectriz.

La manera de medir ángulos que teníamos hasta este momento era, por ejemplo, tomar con vértice en A, las tangentes a BA y CA y medir el ángulo entre estas tangentes, como ilustra la Figura 19.

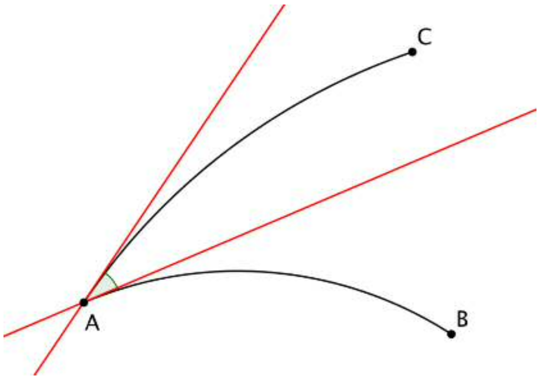

Figura 19. Verificación de la construcción de la h-bisectriz.

Recordemos que las primeras 28 proposiciones del Libro I de los Elementos valen también para la geometría hiperbólica puesto que no usan el postulado de las paralelas. Es el caso con los problemas de levantar una perpendicular a una recta dada y bajar una perpendicular a una recta desde un punto exterior dado. En el primer caso, para levantar una perpendicular al h-segmento AB por un punto cualquiera D, un estudiante recurrió a la construcción previa de la mediatriz. Trazó una h-circunferencia con centro D y h-radio DA (ver Figura 20).

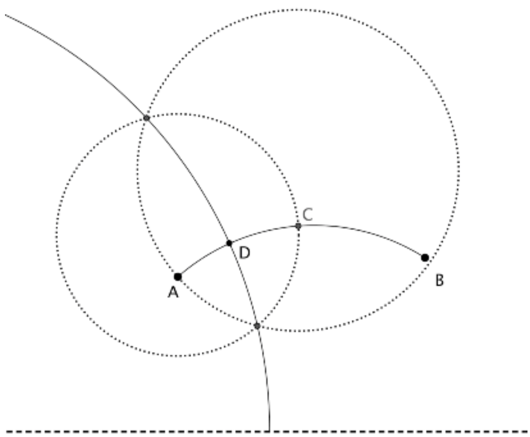

Figura 20. Levantar una h-perpendicular.

De ese modo determinó el punto C de suerte que D es el punto medio de AC. Ahora, trazó sendas h-circunferencias con centros A y C ambas de h-radio AC. Por los dos puntos de intersección de estas dos h-circunferencias pasa una única h-recta que es perpendicular al h-segmento AB por un punto D. Aquí ya se veía una mayor confianza en las construcciones pues eran esencialmente iguales a las euclidianas. Podríamos aquí hablar de *transferencia de contexto* del euclidiano al hiperbólico.

Recordando el asombro que había causado entre los docentes la estrecha vinculación entre la geometría euclidiana y la hiperbólica con respecto a su interdependencia lógica –una de ellas es consistente si y sólo si la otra es consistente–, y las dificultades para explicar este hecho crucial, recurrimos ahora a minimizar los objetos hiperbólicos para ver que se iban pareciendo cada vez más a los euclidianos. Es decir, cuando las dimensiones son muy pequeñas, los objetos hiperbólicos parecen euclidianos. Veamos unos ejemplos. Si tomamos un h-segmento AB y lo hacemos muy pequeño, se ve entonces como un segmento euclidiano (Figura 21):

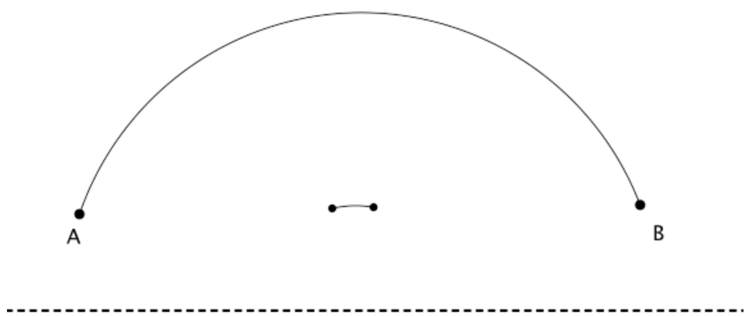

Figura 21. Un h-segmento pequeño parece un segmento euclidiano.

Si tomamos una h-circunferencia con h-centro A y centro euclidiano B, entonces al hacerla *pequeñísima*, los dos centros parecen coincidir (Figura 22).

Esto no es tan sólo un fenómeno visual. Es un hecho profundo, estructural, que tiene que ver con la coexistencia de ambas geometrías y que revela el porqué de su imbricación lógica de cara a la consistencia de ambos sistemas.

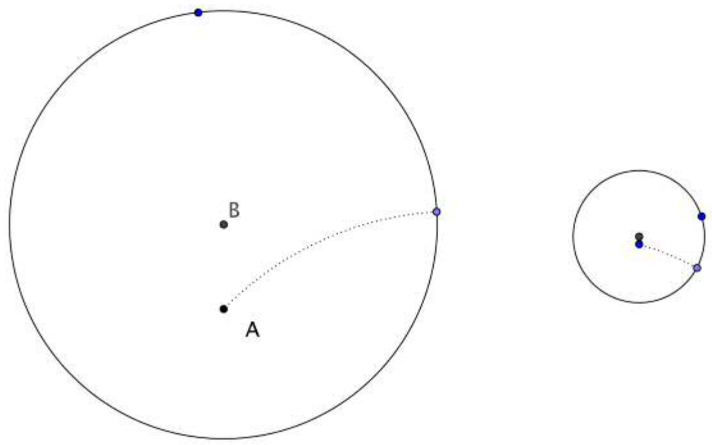

Figura 22. Si una h-circunferencia es pequeña, su h-centro parece coincidir con el centro euclidiano de la circunferencia euclidiana.

A MODO DE CONCLUSIÓN: COMENTARIOS FINALES

La primera parte de este escrito narra momentos cruciales en el desarrollo de la geometría. La segunda parte esboza nuestros esfuerzos por transformar esos contenidos en materia educativa. Para esa transición elegimos un medio digital debido a que las representaciones en ese medio gozan de una propiedad excepcional: son representaciones *ejecutables*. Desde luego, el papel no revela la riqueza inherente al medio dinámico. Sin embargo, las experiencias con maestros y estudiantes dan cuenta del efecto transformador de concebir el movimiento como una dimensión del objeto geométrico. Nuestra intención durante la parte experimental-didáctica ha sido, y continúa siendo, explorar cómo puede darse curso al desarrollo de la intuición sobre un tema que, en primera instancia, parecía tan abstruso y, que ahora, teniendo como *instrumento de mediación* el semiplano de Poincaré y la ayuda de construcciones euclidianas, veremos aflorar una cierta *naturalidad* para esta nueva geometría. Es un ejercicio que en cierto momento nos lleva de lo formal a lo intuitivo, camino a contracorriente de lo que parecía y todavía parece, lo más natural: ir de lo intuitivo a lo formal.

El movimiento que adquieren las representaciones revela gradualmente lo que yace debajo de la apariencia de la representación: la estructura. En el curso histórico la estructura estaba atrapada en la convicción de la *veracidad* de la geometría, es decir, en la supuesta coincidencia del territorio con su mapa. *Despegar* la representación del territorio hizo viable la constitución de un modelo como *instrumento de mediación*. A partir de allí se explicita el problema para la educación, a saber, cómo diseñar una trayectoria de aprendizaje que facilite la apropiación, el aprendizaje, de estas ideas. El proceso de apropiación lo hemos diseñado a partir de un modelo de segunda generación: el modelo del sistema *postulacional*. Para ello hemos recurrido al semiplano de Poincaré instalado en un medio digital que suministra la dimensión del movimiento como revelador de la estructura, como hemos dicho antes. Ahora se sigue una ruta inversa: partiendo del modelo dinámico que estimula un cierto realismo en los objetos hiperbólicos, y por lo tanto disminuye la distancia cognitiva con ellos, se trata de inducir un proceso de elaboración de significados para dichos objetos. La forma de existencia y la producción de significados, eje central del aprendizaje, se filtran a través de la criba digital. El trabajo con docentes y estudiantes del que hemos esbozado tan sólo unos momentos, para no perder la visión holística del presente escrito, está documentado cuidadosamente en el trabajo doctoral, en marcha, de uno de los autores (RER). Este trabajo se inscribe en una línea de investigación que denominamos *epistemología aplicada*, nuestra manera de ver lo que debe ser *la educación a través de las matemáticas.*

REFERENCIAS

Bonola, R. (1955). *Non-Euclidean geometry.* New York: Dover Publications.

Efimov, N.V. (1980). *Higher Geometry.* Moscow: Mir Publishers.

Poincaré, H. (1905). *Science and Hypothesis.* New York: Walter Scott Publishing.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: does it exist? En: A.G. Howson (ed.) *Developments in Mathematics Education*, Cambridge, CUP.