Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Bustamante-Santos, Alonso J.; Flores-Macias, Rosa del Carmen
Las reflexiones de Andrea: un analisis microgenetico de la comprensión de la división en el contexto de un problema
Educación Matemática, vol. 29, núm. 1, abril, 2017, pp. 91-116
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

 DOI: 10.24844/EM2901.04

# Las reflexiones de Andrea: un análisis microgenético de la comprensión de la división en el contexto de un problema

## Andrea's Reflections: A Microgenetic Analysis of the Understanding of Division in the Context of a Problem

Alfonso J. Bustamante-Santos[1]
Rosa del Carmen Flores-Macías[2]

**Resumen:** En este estudio se describen los cambios en las significaciones de la representación escrita del algoritmo de la división en concordancia con un problema de partición, en Andrea, una estudiante de sexto grado de primaria de una escuela pública. Con base en la teoría de los campos conceptuales, se analizan diferentes teoremas y conceptos-en-acto con los que ella actúa en distintas situaciones problemáticas que se le plantean en una entrevista clínica durante la cual reflexiona y reformula sus ideas sobre las relaciones expresadas en los problemas, y su vínculo con el esquema de la división. El cambio más importante que se observa es en los principios que rigen la escritura de la división (teoremas-en-acto). Inicialmente, ella escribe el algoritmo guiada por ideas como que "el número mayor va adentro", sin que haya una relación conceptual con lo que expresa el problema, al final de la entrevista Andrea plantea la relación entre el dividendo y el divisor atendiendo a dicha relación. Asimismo, se observan cambios en cómo concibe la relación medida-magnitud. Se discuten las implicaciones educativas de tomar en consideración los conceptos y

**Fecha de recepción:** 5 de mayo de 2016. **Fecha de aceptación:** 15 de noviembre de 2016.

1 Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca, Instituto de Ciencias de la Educación, javierbtte@hotmail.com

2 Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Psicología, rcfm@unam.mx

teoremas-en-acto de los alumnos para fortalecer el aprendizaje de las matemáticas.

**Palabras clave:** *solución de problemas, división, proporcionalidad simple, conceptualización, representación gráfica.*

**Abstract:** This study describes changes in the meanings of the written representation of the division algorithm within a partition word problem in Andrea, a student from sixth grade in a public school. Through a clinical interview, she solves various word problems. Based on the theory of conceptual fields, we discuss the changes in different theorems-in-act and concepts-in-act that she uses. She reflects on the relationships between the components of the division, and reformulates her ideas on how these relationships must be expressed. The most significant change observed in Andrea during the interview is related to her understanding of the division algorithm; she initially writes it based on ideas like "the bigger number must be inside" but, at the end of the interview, she showed understanding of the relationship between the word problem and the written algorithm. Likewise, are observed changes in the way she conceives the measured-magnitude relationship. Discussion analyzes the relevance of taken into consideration student's concepts and theorems-in-act to strengthen the mathematic learning.

**Keywords:** *problem solving, simple proportionality, division, conceptualization, graphic representation.*

## INTRODUCCIÓN

El presente estudio tiene como antecedente el proyecto de investigación "Los lectores y sus contextos" (Vaca, Bustamante, Gutiérrez, Tiburcio, 2010), en el cual se establecieron relaciones entre los contextos familiares, escolares y culturales, al igual que la manera como los estudiantes de educación básica de algunas localidades del estado de Veracruz, México, enfrentan situaciones de lengua escrita y matemáticas. Los autores identificaron que algunas de las dificultades en matemáticas podrían estar relacionadas con la vinculación de los diferentes sistemas simbólicos implicados en los procesos de resolución, así como con una endeble construcción de conceptos matemáticos.

Al igual que el anterior, el presente estudio se enfoca en la solución a un solo tipo de problema, pues el foco principal es profundizar en los razonamientos y relaciones entre las distintas formas de simbolización y conceptuación implicadas en la solución del algoritmo de la división. El problema en cuestión es el siguiente:

> *Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?*[3]

De acuerdo con Vergnaud (1988), este es un problema de proporcionalidad simple, de partición, donde hay que identificar el valor de la unidad (tamaño de un paso) conociendo la correspondencia entre dos magnitudes de naturaleza distinta (metros y pasos). Los alumnos pueden recurrir a diversos procedimientos para solucionarlo, en este trabajo nos enfocaremos en la solución por medio del algoritmo de la división. Más adelante detallaremos el análisis que se hace de este tipo de problemas a partir de la teoría de los campos conceptuales.

Para contextualizar el presente estudio, brevemente presentamos resultados del análisis estadístico del estudio antecedente (Bustamante y Vaca, 2014): de un total de 329 estudiantes, 34% dio una respuesta correcta al problema (.5 metros o su equivalente); hubo diferencias significativas entre hombres y mujeres, los primeros lograron mejores resultados; más estudiantes de secundaria que de primaria dieron una respuesta correcta; no se encontraron diferencias significativas entre alumnos de escuelas rurales y urbanas; versiones del problema con valores numéricos distintos (20 metros, 40 pasos *vs* 35 metros , 70 pasos) no difieren significativamente en sus resultados; versiones del problema con y sin distractor (un dato irrelevante para la solución del problema) generaron diferencias significativas, un mayor número de estudiantes resolvió correctamente las segundas.

Las respuestas al problema fueron clasificadas en seis categorías. En los extremos se encuentran las categorías *Uno* y *Seis*: En la *Uno* se agruparon las respuestas que dan una aproximación correcta a la relación de proporcionalidad implicada (n = 113, 34.5%). En la categoría *Seis*, las respuestas no permiten identificar si se considera o no una relación de proporcionalidad, o bien son una

[3] Sabemos que la noción de promedio puede ser conflictiva, por lo cual nos preocupamos de asegurarnos de que fuera entendida por los estudiantes mediante la incorporación de frases equivalentes en la conversación: "aproximadamente".

aproximación intuitiva sin relaciones cuantitativas claras, pues presentan soluciones generales como "los pasos son 'grandes'", se emplean cifras distintas a las del problema o se hacen combinaciones de varias operaciones sin un sentido claro (n = 82, 24.9%). En las categorías intermedias de la *Dos* a la *Cinco* se clasificaron las respuestas que si bien muestran un resultado erróneo, también indican la intención por parte de los estudiantes de establecer una relación proporcional mediante la división (n = 134, 40.8%). Para este grupo, el análisis indica dos tipos de dificultades: a) Los niños dividen bien pero muestran dificultades en la relación medida-magnitud es decir, omiten las unidades de medida o estas se asignan de manera errónea; b) Invierten las relaciones entre dividendo y divisor, obteniendo como resultado "2", número al que le agregan o no, unidades de medida.

Según Harris (1999) el uso de algoritmos está relacionado con la sintagmática de la escritura matemática, o sea, con la organización de los elementos gráficos. En este caso, los algoritmos tienen la función de favorecer que la solución de los problemas sea eficaz y eficiente; cuando esto no ocurre y los alumnos cometen errores sistemáticos, es posible que tengan una concepción equivocada respecto del algoritmo; para orientar didácticamente al estudiante habrá que entender estos errores en el contexto en que ocurren (Brun, 1996).

Diferentes autores han analizado los errores de los estudiantes con el algoritmo de la división (en México se realiza por columnas y empleando una galera); este algoritmo implica varios procedimientos que para los alumnos pueden ser opacos, es decir que no obtienen cabal comprensión de ellos de manera inmediata (Block, Martínez y Moreno, 2002), lo cual puede dar lugar tanto a errores de cómputo en las operaciones involucradas en la división, como a equivocaciones en la organización de los pasos a seguir, o en la forma como se acomodan los datos en las columnas.

Al respecto J. Brun y colaboradores (Brun 1996; Conne y Brun, 1990, Brun *et al.*, 1994a, Brun, Conne, Lemoyne y Portugais, 1994b), en el contexto de la teoría de los campos conceptuales, plantean que los algoritmos son esquemas, formas de organización de la conducta que permiten actuar sobre una situación. En este sentido, algunos de los errores de los alumnos al dividir pueden ser evidencia del proceso de construcción de un esquema en el que aún no está consolidada la comprensión de las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y residuo. Algunas situaciones que ponen a prueba los esquemas desarrollados son: a) El dividendo es igual al divisor, un ejemplo de error es considerar que solo es posible dividir cuando el dividendo es mayor que el divisor; b) El residuo parcial es mayor que el divisor, un ejemplo de error es considerar que el residuo parcial puede ser mayor que el divisor o pasar por alto las reglas del valor posicional; c) El dividendo es más pequeño que el divisor. Estos autores también plantean que se pueden presentar errores de cálculo en las operaciones intermedias y errores en la sintaxis de la división, es decir, las reglas para la representación gráfica del algoritmo y para su resolución.

También puede ocurrir que los alumnos no estén atendiendo las relaciones del problema y solo pongan en juego lo que ellos saben del algoritmo por la práctica escolarizada del mismo (por ejemplo, el dividendo debe ser más grande que el divisor para que la división sea posible) y que operen bajo un estereotipo como el que, en la división, la primera cifra que escribes en el texto del problema "es la de afuera (de la galera) y la que va después es la de adentro", o no logren identificar la unidad de medida de las cifras de un problema y por lo mismo las omitan, lo cual muestra un pobre entendimiento de las relaciones implicadas entre los datos del problema y del vínculo con otros conocimientos, no matemáticos, expresados de forma oral o escrita en lenguaje natural (Flores-Macías, 2005).

El que algunos de los estudiantes muestren dificultades para escribir la división (colocar adecuadamente los datos en la galera) o dificultades para resolverla, así como el que omitan las unidades de medida, nos lleva a pensar en un endeble conocimiento conceptual. Para tratar de comprender el origen de estas dificultades, en el encuadre teórico nos apoyamos en el trabajo de Gérard Vergnaud.

## TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

La teoría de los campos conceptuales es una teoría del desarrollo que busca: 1) Describir y analizar la complejidad progresiva de las competencias matemáticas y 2) Vincular dos formas de conocimiento, la operatoria que consiste en actuar en el mundo físico y social, y la predicativa que trata las expresiones lingüísticas y simbólicas. Un campo conceptual es un conjunto de conceptos que derivan sus significados de las situaciones a las que están vinculados y, por lo mismo, solo pueden ser entendidos como sistemas entrelazados (Vergnaud, 2009).

Vergnaud (1990, 2009) propone que para comprender la actividad del individuo ante una situación o problema hay que entender cómo se adaptan sus formas de organización de la actividad, sus esquemas. En lugar de la clásica relación sujeto-objeto, él propone la de esquema-situación. Vergnaud (2009) enriquece la noción de esquema piagetiano con los siguientes componentes:

- El propósito, que involucra una o varias metas que pueden ser desarrolladas en sub-metas y anticipaciones.
- Las reglas para generar la actividad, concretamente, la secuencia de acciones, la toma de información y los controles.
- Los referentes epistémicos, involucran las *invariantes operatorias*: conceptos-en-acto y teoremas-en-acto. Su principal función es recoger y seleccionar información relevante, e inferir de ella metas y reglas.
- La elaboración de inferencias para operar sobre las situaciones.

Desde esta perspectiva, al comprender un problema, el alumno organiza su actividad conforme a determinado esquema, pero en el curso de la actividad este puede ser sustituido, reconformado o creado en función de su relación con los esquemas que dieron lugar al entendimiento original del problema (Vergnaud, 2009).

Vergnaud (2006) propone la noción de invariantes operatorias porque menciona que dicha terminología "permite no prejuzgar el carácter explícito o no, consiente o no, de los conocimientos elaborados" (párr. 133). Vergnaud (1990) se refiere a ello como *conceptos-en-acto* y *teoremas-en-acto* "que no pueden ser llamados 'conceptuales' ya que el conocimiento conceptual es necesariamente explícito" (p. 20). Surgen en la práctica y no son ni conocimientos formales ni explícitos:

Los teoremas-en-acto son afirmaciones que guían el comportamiento de un sujeto en cierto rango de situaciones, y que se asumen como verdaderas (Vergnaud, 1996). Conforme a esta perspectiva, de las afirmaciones y acciones de un estudiante se pueden deducir o develar sus teoremas-en-acto.

Por otro lado, un concepto-en-acto es una categoría que posibilita seccionar la información del mundo en distintos elementos y aspectos para acercarse a una situación y actuar en ella, puede ser pertinente o no pertinente a la situación, pero no puede considerarse verdadero o falso (Vergnaud, 1996).

Complementando la relación entre invariantes, este mismo autor plantea la necesidad de analizar y clasificar la variedad de significantes lingüísticos y simbólicos usados cuando nos comunicamos y pensamos en distintas situaciones. Es decir que las situaciones matemáticas varían en complejidad, por ello Vergnaud (1994) señala la importancia de atender a la dificultad comparativa de diferentes clases de problemas y procedimientos y de las diferentes expresiones orales y escritas producidas por los estudiantes.

Para explicar la transformación en los conocimientos matemáticos a partir de la interacción con alguien más experto, Vergnaud retoma la noción de Zona de Desarrollo Próximo, propuesta por Vygotski (1996), definida como la distancia entre el nivel de desarrollo actual y el nivel de desarrollo potencial, en la que el aprendiz puede realizar una tarea con la ayuda de alguien más experto. Vergnaud (2006) considera que el desarrollo actual sería el repertorio de esquemas que un sujeto tiene para enfrentar determinadas situaciones, y el desarrollo potencial estaría conformado por aquellos que podría robustecer o generar para enfrentar un conjunto de situaciones novedosas. "El maestro dispone entonces de más posibilidades: la elección de las situaciones, el entrenamiento en la actividad, la ayuda a la selección de la información de los esquemas y de los invariantes operatorios" (párrafo 122).

En conjunción con el concepto de Zona de Desarrollo Próximo, es pertinente también aludir a la noción de andamiaje, término propuesto por Jerome Bruner en 1976 para explicar el tránsito dentro del desarrollo actual al potencial. Se define como las formas de apoyo diferenciado que brinda el experto para que el alumno realice una tarea más compleja que la que sus actuales estructuras cognitivas le permiten. En este proceso el alumno modifica sus esquemas hasta lograr la autonomía en la tarea.

En síntesis, desde la perspectiva de la teoría de los campos conceptuales, cuando un estudiante enfrenta un problema observamos: cómo actúa o se anticipa ante la situación, los esquemas que moviliza, su entendimiento de las diferentes formas de simbolización (gráficas y lingüísticas) y las invariantes operatorias con las cuales actúa. De esta forma podemos determinar cómo se entrelazan situaciones, invariantes y representaciones.

Ahora bien, dos herramientas metodológicas que permitirán realizar un acercamiento a las soluciones de los alumnos son el método clínico o crítico y el de análisis microgenético, que se expondrán brevemente.

## EL MÉTODO CLÍNICO

El método clínico/crítico propuesto por Piaget (1978) ha sido uno de los principales instrumentos para recabar datos en las investigaciones psicogenéticas de la escuela ginebrina. Mediante la entrevista clínica se puede dar seguimiento a los razonamientos de los estudiantes para entender los esquemas que emplean, e inferir y explicitar los teoremas y conceptos-en-acto durante la solución de un problema. Se indagan los conocimientos del alumno y la forma como los legitima, al igual que la coherencia y contradicción en su empleo para ello; se pueden plantear situaciones contra-intuitivas que lleven al entrevistado a reflexionar sobre su conocimiento e interpretaciones de la situación, pero que de entrada pueden parecer absurdas (Blanche-Benveniste y Ferreiro, 1998). La entrevista clínica también es el contexto para el análisis microgenético.

## EL ANÁLISIS MICROGENÉTICO

La evolución de la psicología genética se orientó al estudio de los procesos de construcción de los conocimientos por parte del sujeto “epistémico” a través de los grandes periodos del desarrollo (estadios); más recientemente, estudia los microprocesos de adquisición de conocimientos por un sujeto “psicológico” mediante el estudio de *las microgénesis:* “En la noción de microgénesis se encuentra la idea de trabajar a otra escala temporal que la de la macrogénesis, pero sobre todo la de analizar las conductas cognitivas en el más pequeño detalle y en toda su complejidad natural” (Inhelder y Caprona, 2007: 20).

La microgénesis se define primero por el análisis de las estructuras de conocimiento: “el estudio de los procesos de adquisición de conocimientos en un tiempo corto y en una situación particular entre las situaciones posibles de adquisición, resolviendo los problemas por instrucción, por exploración libre, etc.” (Nguyan-Xuan, 1990: 197, citado en Saada-Robert y Balslev, 2015). Posteriormente, se agrega también una dimensión didáctica y situada:

> puede ligarse con la explicación de los microprocesos de adquisición de conocimientos. En cuanto al carácter situado de las microgénesis, remite a la dimensión didáctica de esa adquisición, dicho de otra manera, al estudio triádico de la construcción de los saberes de enseñanza y de aprendizaje tal como ellos funcionan *in situ*. Más precisamente, las microgénesis situadas se ocupan de la dimensión didáctica a través del análisis de la progresión de los saberes vinculados con el intercambio de las significaciones entre participantes, en tiempo y lugar reales (Saada-Robert y Balslev, 2015: 344).

En el contexto dialógico de la entrevista, el entrevistador, además de indagar los conocimientos y razonamientos del entrevistado durante el proceso de resolución de un problema, también puede adoptar el papel de maestro y crear las condiciones para un aprendizaje, es decir un cambio en los esquemas de actuación.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una explicación plausible de las dificultades de los estudiantes para el empleo de la división en un problema de proporcionalidad, evidenciadas en el estudio antecedente, sería que aún no han logrado establecer la correspondencia entre la relación de proporcionalidad expresada en un problema de división-partición y los términos de la división; por lo mismo, les resulta difícil asignar unidades de medida al resultado obtenido. Nos planteamos identificar la validez de esta explicación y analizar cómo, en el contexto de la entrevista, pueden surgir nuevas significaciones que lleven a una solución adecuada. Es importante que el lector tenga en mente que la actuación de la alumna devela sus esquemas (en el sentido que les da G. Vergnaud), y que durante la entrevista clínica se describe la microgénesis del conocimiento.

La participante es Andrea (11 años, 3 meses), quien al momento de la entrevista cursaba el último bimestre de sexto grado en una escuela pública de la capital del estado de Veracruz. Es importante mencionar que en el estudio antecedente, Andrea dio una respuesta considerada como correcta (ver Imagen 1). Si bien tuvo a su disposición una calculadora, no la usó.

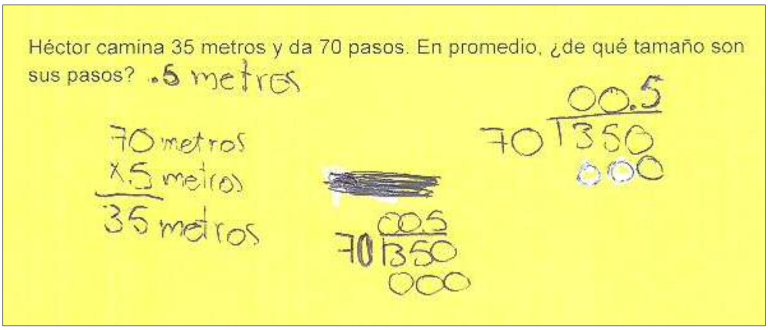



**Imagen 1.** Producción de Andrea durante la fase de aplicación grupal, primer estudio (Bustamante y Vaca, 2014).

La respuesta que da Andrea es ".5 metros", la obtuvo a través del algoritmo de la división, operación que hizo dos veces obteniendo el mismo resultado, además hizo una comprobación por medio de una multiplicación; corroboró reiteradamente su resultado, por lo que es pertinente preguntarse si esta solución le convencía.

## DISEÑO METODOLÓGICO

El problema con el cual se trabaja es el mismo que en el estudio antecedente (Bustamante y Vaca, 2014), es de división-partición, donde se desconoce el valor de la unidad:

> *Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?*

Pertenece al campo conceptual de las estructuras multiplicativas, definido como el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones (Vergnaud, 1990). En la Figura 1 se presentan los diferentes tipos de problemas a que dan lugar.

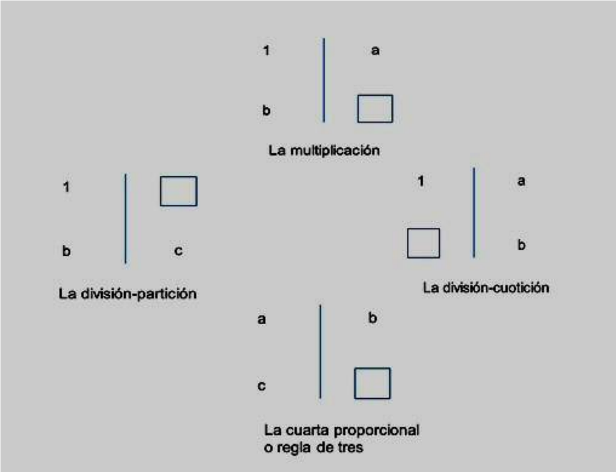



**Figura 1.** Esquemas de relaciones del campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1990).

De manera particular, la Figura 1 esquematiza dos procedimientos para resolver el problema que nos ocupa con la división (Vergnaud, 1988; 2004):

1) Si conocemos tres cantidades de las cuatro relacionadas: la unidad (1), b (70 pasos) y c (35metros), podemos deducir la cuarta. En la columna de los pasos (la de la izquierda) se ubica el escalar, es decir, el operador que hace pasar de 1 paso a 70 pasos, en este caso es x70. En la columna de la derecha solo tenemos 35 metros, para calcular la incógnita se aplica el inverso del escalar anterior: ÷70. La operación es 35÷70, lo que da como resultado .5 metros (ver Figura 1 división-partición).
2) El otro procedimiento, en lugar usar los operadores escalares, se emplea el operador *función proporcional*, que hacen pasar de una columna a la otra. Por ejemplo, 70 pasos divididos entre 2 metros/paso nos da como resultados 35 metros. Aplicando el mismo operador función (÷2 metros/paso) a la unidad (un paso), se obtiene equivalente en metros, es decir .5 metros. Este procedimiento es de mayor complejidad (ver Figura 1, cuarta proporcional o regla de tres).

Para dar seguimiento a las reflexiones y razonamientos de Andrea, integramos la entrevista clínica y el análisis microgenético. La entrevista se video-grabó con el propósito de registrar las expresiones verbales y gestuales de Andrea durante la resolución del problema, e identificar el orden y la direccionalidad de sus producciones gráficas. Se llevó a cabo en una pequeña sala donde dos profesoras platicaban, lo que por momentos dificulta escuchar con claridad las expresiones de Andrea. Para hacer la entrevista y filmarla (sin grabar el rostro) se contó con la aprobación de las autoridades de la escuela y de Andrea.

Tres semanas después de solucionar el problema por primera vez, se lleva a cabo la entrevista. Andrea se presenta muy segura y con disposición para responder a las preguntas, expresa lo que piensa mientras lo resuelve y dice estar convencida de su resultado. Se muestra inquieta y motivada por no quedarse con dudas, cuando encuentra contradicciones en sus razonamientos. Es por esta razón que la entrevista se prolonga a 59 minutos, pero constantemente se monitorea si se encuentra fatigada.

## ANÁLISIS MICROGENÉTICO DE LOS PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCIÓN DE ANDREA

Los siguientes apartados están relacionados con los momentos durante la entrevista en los que el entrevistador identifica conocimientos de Andrea, y orienta sus razonamientos y reflexiones para propiciar un cambio en sus esquemas.

## RESOLUCIÓN INICIAL

Andrea lee el problema e indica que Héctor camina 70 pasos y al hacerlo recorre una distancia de 35 metros. Expresa con tono de duda "¿debo dividir 35 metros entre 70?... para que me dé el resultado de cuánto mide cada paso", sin embargo, escribe una relación distinta $35\overline{)70}$.[4]

> Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos? [¿Qué le entendiste?] Yo digo que él camina en 70 pasos 35 metros, entonces ¿**debo dividir 35 metros entre 70**?... para que me dé el resultado de cuánto mide cada paso [ajá] (**divide** 70÷35 y obtiene 2) y da a dos [Y da, dos... y dos, ¿qué será? Escribe tu respuesta] **Dos metros** [¿Dos metros?] Sí [Ok, ¿qué opinas de tu resultado?] Pues ¿que **están muy grandes los pasos**? [Cómo de dónde a dónde] (Señala una distancia aproximada a 2 metros) [Entonces sí están muy grandes, pero eso dio] Ajá

Andrea divide 70÷35 y obtiene como cociente 2; no anota las unidades de medida. A petición del entrevistador las expresa y escribe, y reconoce que están muy grandes los pasos. No considera la posibilidad de comprobar si el resultado es correcto o no (como hizo la primera vez), tampoco se da cuenta, al hacer la división, de la diferencia entre lo que dice y lo que escribe. Menciona: "treinta y cinco" y escribe <u>35</u> como divisor, "entre" (dibuja la galera de la división) "Setenta" y escribe el <u>70</u> como dividendo. Más adelante se identifica que Andrea parte de la idea muy común entre los estudiantes de primaria de que "el número mayor va dentro de la casita". En todo caso, lo que es evidente al escribir la división es

[4] Código de transcripción: entre corchetes las expresiones y producciones del entrevistador, fuera de ellos las del estudiante. Se subrayan las producciones escritas. Entre paréntesis algunas aclaraciones o comentarios, y se resaltan con negritas algunas expresiones clave en el análisis.

que Andrea no la está vinculando con las relaciones explicitadas en el problema.

Cuando da la respuesta de dos metros, se le pide que compruebe su resultado. Para hacerlo, construye una tabla de correspondencias (Ver Imagen 2).

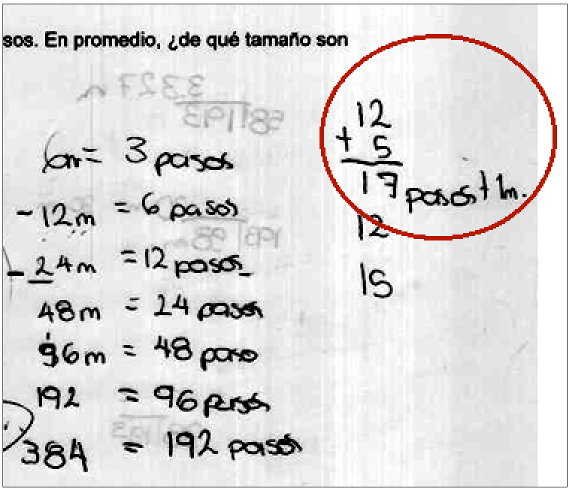



**Imagen 2.** Tabla de correspondencias entre dos categorías de medidas.

Se puede inferir a partir de esta tabla que en su interpretación del problema Andrea considera la relación de proporcionalidad entre pasos y metros (concepto-en-acto), pero no tiene clara su relación con el dividendo y divisor, es decir, su esquema del problema no es coherente con su esquema de la división. Mantiene la idea de que la respuesta correcta es 2 metros y busca la forma de justificarla, termina afirmando que como 2 × 17.5 es igual a 35 su respuesta de dos metros por paso es correcta. No es sino hasta que el entrevistador le muestra de nuevo el texto del problema original, cuando ella deduce que la división $35\overline{)70}$ es incorrecta.

> [¿Qué dice el problema?] Héctor camina 35 metros y da 70 pasos en promedio, de qué tamaño son sus pasos. [Dice que camina 35 metros y ¿cuántos pasos da?] Sería que en lugar de 17 pasos sería 17... [¿pero cuántos pasos da para avanzar 35 metros?] ¿17? No... sí [pero aquí en el problema dice ¿cuántos pasos?] setenta [y aquí ¿cuántos dio?] 17 pero es que aquí está fácil porque esto (35) es lo doble que esto (70) entonces

como son 35 metros yo pensé que eran de dos metros cada uno y ya lo dividí (señala la división 70÷35) o tal vez está mal la división.

## NUEVO INTENTO DE RESOLUCIÓN: FORZAR UN RESULTADO

Andrea emprende de nuevo la solución, menciona que inicialmente consideró la posibilidad de dividir 35÷70, pero la descartó porque pensó que no se podía, porque *"el número mayor va adentro"* (se trata de una división con dividendo menor al divisor); luego, para ajustar la operación a su teorema-en-acto, transforma la división convirtiendo (erróneamente) los metros a centímetros, pues afirma que son 350 cm (y no 3500 cm); hace la operación y obtiene 50 (Imagen 3a) pero piensa que está mal, la tacha y dice que "*no cree que dé pasos de 50*", duda, cambia de parecer y dice que sí puede ser, porque son 50 centímetros. Escribe cm junto al 50 (Imagen 3b) y luego escribe un punto decimal a la izquierda del 50 y una m en el extremo derecho, mientras dice que "*sería punto cincuenta metros*" (Imagen 3c). Al hacer la división, realiza los ajustes que considera pertinentes y si bien parece saber dividir, no es claro su entendimiento del vínculo entre las relaciones de proporcionalidad del problema y la que hay entre dividendo y divisor.

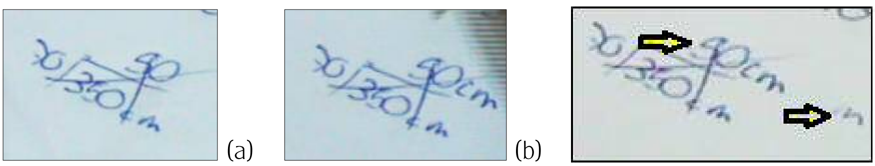

(a) (b) (c)

**Imagen 3.** Secuencia de precisiones.

La siguiente intervención se orienta a que reflexione sobre las unidades de medida, para que más adelante lo haga sobre la forma cómo se escribe la división. El entrevistador busca que Andrea reflexione sobre el error inicial: que 35 metros equivale a 350 centímetros y no a 3500 cm.

[Platícame por qué pusiste 350 (en la división)] porque son 35 metros y equivale a 350 centímetros [¿a poco? ¿Cómo sabes eso?] Porque los metros tienen 100 centímetros... [Ajá] ah no... entonces sería tres punto cincuenta, tres punto cinco metros para ser 350, entonces sería otro cero (agrega un cero al dividendo para convertirlo en 3500)...

Andrea nuevamente escribe la división de izquierda a derecha, siguiendo el orden en que la expresa. De la misma manera, cuando lee el algoritmo escrito de la división muestra sus conocimientos sobre la misma, primero enuncia el divisor, después la galera por medio de la expresión “entre” o “sobre” y finalmente el dividendo:

> (describe lo que escribe) 70 entre 3500 (lo escribe en ese orden de izquierda a derecha, pero representa $70\overline{)3500}$) [¿a ver entre cuánto?] entre 3500 [aquí qué división hiciste, cómo lo podrías decir, ¿qué escribiste? (señalo la primer división $35\overline{)70}$)] (ella lo dice invirtiendo el dividiendo y el divisor) 35 entre 70 [¿y acá? $70\overline{)350}$] lo mismo que aquí (señala la división $70\overline{)3500}$) pero como me equivoqué ¿cómo lo lees?] son los 70 entre 350 (De manera invertida) [¿aquí qué escribiste? ($70\overline{)3500}$)] 70 entre 3500.

Andrea presenta dudas en la asignación de las unidades de medida:

> [¿Cómo le haces para resolver una división de estas?] no creo que el 3 quepa en el 3 [¿que el 3 no quepa en el 3?] no, en el 70 [¿que el 3 no cabe en el 70?] bueno, sí cabe, pero no se puede sum... entonces vemos si da para el segundo, sería 35 pero tampoco da porque es la mitad de 70 entonces sería 350 y sería 5 (en el cociente) porque cabe 5 veces y sobra cero y bajamos el cero y no da nada, sería 50 (escribe un cero en el cociente) [bueno] y ahora el 50 [¿qué es ese 50, qué significa?] 50 metros por paso (agrega una m), no, 50 centímetros por paso (agrega una c antes de la m). (Imagen 4).

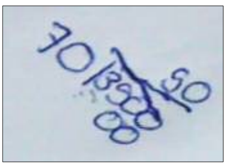
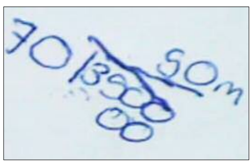
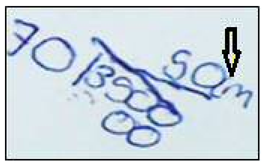

(a)

(b)

(c)

**Imagen 4.** Corrección de metros a centímetros.

También se le solicita comprobar si el resultado es correcto. El entrevistador le hace ver que el resultado obtenido es el mismo que obtuvo en una división diferente (Imagen 4ª). Se busca que anticipe lo que realizará, y ella menciona que puede comprobar el resultado haciendo una multiplicación.

[Muy bien; pues ya nos dio lo mismo que te había dado aquí ¿no? (Véase Imagen 4a)] ajá [bueno ahora vamos a comprobarlo] ajá [¿cómo podemos saber qué es eso?] ¿**multiplicando**? [¿Qué multiplicarías?] **50 por 70** [¿cuánto debe dar?] **debe dar 35** [¿a ver?] **no, 3500 porque son centímetros**. **Pero no da, no creo que dé** [¿por qué?] a ver... (multiplica 50*70=3500) no, sí da [¿sí da?] sí, porque son centímetros (agrega "cm" al resultado de la multiplicación) **y no sobra nada**.

Andrea se sorprende de haber obtenido un resultado que comprueba su división. El entrevistador le solicita hacer una revisión de sus diferentes opciones de resultados, y que elija el que le parezca más adecuado.

[Entonces ¿cuál de todo lo que hiciste te convence más?] este que salió a dos (señala la primer división (70÷35=2 m) y esta (3500÷70=50 cm), **pero creo que me convence más esta** (hace una marca junto a la división y a la multiplicación que la comprueba) [¿Sí?] Sí [¿Cuál sería la respuesta a la pregunta?] punto cinco (escribe 0.5 junto a la pregunta del problema) [Punto cinco ¿qué?] Metros (agrega una m junto al 5) [metros, ¿por qué si estabas usando 50 y ahora...?] **porque son centímetros (señala las últimas operaciones) entonces yo lo pasé a metros.**

La forma como Andrea procede en este segmento de la entrevista indica que su proceder está orientado por lo que le parece más razonable; asimismo da muestras de comprender que el problema trata de una relación de proporcionalidad, pero su dominio de la relación entre la cantidad y la unidad de medida no es claro. Otro hecho importante es que ella transforma los 35 metros para que el dividendo sea mayor que el divisor y cumplir con su supuesto de que "*el número mayor va a adentro*".

Dada la disposición de Andrea, se le plantearon una serie de problemas en función de las ideas que iba formulando para que, en interacción con el entrevistador, construyera nuevas explicaciones relacionadas con la forma como se escriben los datos en la división, y su relación con lo que se enuncia en el problema.

## LA DISTANCIA VA ADENTRO (DE LA CASITA) Y LO DEMÁS AFUERA...

En su actuación Andrea da muestras de entender que para solucionar el problema hay que establecer una relación entre los pasos dados y la distancia recorrida, pero muestra dificultades al expresar esta relación mediante el algoritmo de la división; después de varios intentos fallidos, Andrea expresa sus dificultades para emplearlo:

> [De la división, qué es lo... ¿qué se te dificulta más?] **Se me dificulta a veces que no sé en dónde colocar los datos en la división, pero me ha sucedido en pocas veces** [Si eso se te dificulta ¿cómo decides qué escribir adentro y qué escribir afuera?] **Porque sería la distancia... porque si es de distancia el problema sería la distancia adentro y los pasos o lo que sea afuera, la distancia que ya tienes completa sería adentro.**

Esta respuesta parece mostrar que, para Andrea, es necesario colocar el número mayor adentro de la galera. En este punto de la entrevista, el entrevistador establece un andamiaje por medio de preguntas específicas, señalamientos y contra-sugestiones que permiten a Andrea focalizar su atención en las relaciones expresadas en el problema y en su representación mediante la división. Pasa de una preocupación por saber cómo "acomodar" los datos en la división escrita (desarrollo actual), a preocuparse por representar adecuadamente las relaciones matemáticas expresadas en el problema. En la transición, el entrevistador pone a prueba las ideas de Andrea para que pueda modificarlas hasta llegar a un teorema-en-acto más general y pertinente (desarrollo potencial).

A partir de este nuevo teorema-en-acto de Andrea (la distancia va adentro, lo demás afuera), el entrevistador le presenta algunas situaciones problemáticas en donde ella pueda, por cuenta propia, reconocer que en el algoritmo de la división al cambiar la posición de los datos, el resultado también es diferente, y que la distancia no siempre será el dividendo.

> [A ver, vamos a hacer algunos ejercicios] ¿Un ejemplo? [Por ejemplo de distancia, ¿qué se te ocurre?] Un niño cualquiera puede tener ciento noventa y tres metros en una carrera 193 m pero **se dividen entre** cincuenta y ocho estaciones 58 entonces sería 193÷58 (**escribe primero el dividendo**, **después dibuja la galera y al final anota el divisor**, ver Imagen 5) [aquí está la calculadora] (acepta usar y digita los datos en el orden apropiado, y escribe el resultado que le arroja 3.327) [Entonces cada estación sería de...] Tres punto treinta y dos metros.

En este problema inventado por Andrea, para el que no menciona explícitamente una pregunta, se pueden observar varios puntos interesantes: en primer lugar, ella crea un problema de la misma estructura que el de los pasos (de partición) pero con un contexto distinto, se trata ahora de una carrera en la que

**Imagen 5.** Representación gráfica convencional de la división enunciada verbalmente.

hay estaciones; aunque no lo menciona, se entiende que debe buscar la distancia entre cada estación. En segundo lugar, mantiene la idea de que el dividendo es mayor que el divisor, pero ahora escribe la división con una direccionalidad de derecha a izquierda, primero escribe el dividendo, luego dibuja la galera y al final el divisor, a la par que se expresa verbalmente. Hubo un cambio con relación a la direccionalidad en la escritura del algoritmo que revela una mejor comprensión de la relación entre dividendo y divisor en el contexto de su problema. Finalmente, interpreta el resultado como la expresión de una relación entre medida y magnitud "tres punto treinta y dos metros", ya no es necesario preguntarle por las unidades de referencia, como ocurrió al principio.

En una siguiente intervención el entrevistador, a través de la pregunta *¿qué pasaría si lo hubieras hecho al revés?,* intenta que ella afirme la relación entre la cantidad y la unidad de medida, pero identifica que Andrea, si bien expresa un resultado con unidades de medida, no mantiene esta asociación. Ella contesta que le daría un resultado que estaría mal. Lo escribe y divide con la calculadora y obtiene ".30", que interpreta como ".30 metros", los cuales luego cambia a centímetros.

El entrevistador pretendía que Andrea se diera cuenta de que la cantidades están asociadas a una unidad de medida y que esta relación se conserva aun cuando se invierte el orden de los datos; sin embargo, ella no aprecia esta relación y desliga las cantidades de su unidad de medida, aplica la idea de "hacer al revés" a la cantidad, pero no a la unidad de medida.

## INTEGRACIÓN DE LAS NOCIONES DE PROPORCIÓN Y MEDIDA

A continuación el entrevistador, considerando la idea de campo conceptual, retoma un conjunto de situaciones afines, plantea problemas de partición en varios contextos y con distintos tipos de cantidades, para que Andrea identifique la relación entre dividendo y divisor, y el vínculo entre cantidad y unidad de medida. Incluso se proponen divisiones que no son posibles en la vida real, como dividir niños entre pasteles, con la intención de confrontar sus ideas y que reflexione sobre los significados que atribuye al dividendo y divisor.

Se le pregunta cómo escribiría la división si tuviera que dividir tres barras de chocolate entre dos niños. Primero ella expresa verbalmente "dos entre tres", la relación inversa a la indicada. Luego piensa un momento, al dibujar la galera, en primer lugar expresa que ha tomado conciencia del conflicto que debe resolver ¿cuál cifra corresponde al dividendo y cuál al divisor? Decide correctamente ubicar el número 3, que representa la cantidad de barras de chocolate, como dividendo y el número 2 como divisor, que representa a los niños. Una vez que ha establecido la relación entre los datos, resuelve el algoritmo correctamente: obtiene como cociente parcial 1 y como residuo también 1, agrega un punto decimal y "baja un cero", entonces completa el cociente, que interpreta como "una barra y media".

## LAS RELACIONES ENTRE DIVIDENDO Y DIVISOR

Se le propone repartir paletas entre niños, y además con el dividendo mayor que el divisor.

> [Ahora divide... eh... diez paletas entre cinco niños] (En una hoja de papel nueva comienza a hacer la operación, anotando en primer lugar el dividendo y después el divisor) <u>10÷5 = 2</u> ya está [Esta fácil, ¿no?] **Sí, ya me di cuenta que la primera palabra es la de adentro.**

Andrea expresa que se ha percatado de que la primera palabra enunciada en el problema es el dividendo y, en consecuencia, la siguiente cifra es el divisor; reconoce esta como invariante, y la hace explícita. Se le proponen más divisiones con las relaciones anteriores, cambiando los contextos, y Andrea las resuelve correctamente.

Más adelante en la entrevista, identifica que en los problemas que se le plantean primero en un sentido y luego en el sentido inverso, la relación entre cantidad y unidad de medida se conserva.

Durante la entrevista Andrea descarta su primera idea de que "*el número mayor es el de adentro*" y da prioridad a la segunda, "*lo primero que me dices es lo que va a adentro*", identifica en el contexto de los problemas que ha estado resolviendo, cuál cifra es el dividendo y cuál el divisor; también reconoce que es equivocado separar la medida de la magnitud, como lo afirma enseguida:

> [Bueno entonces vamos a hacer un recorrido, ¿primero pensabas que los metros iban adentro y lo demás afuera?] Sí, después dije que lo primero que decías es lo que iba adentro y lo demás iba afuera (señala la operación realizada), **ahí sí ya está bien** [Sí, ahí está bien] **Pero lo que está mal es que dije que si cambian las cosas sigue siendo lo mismo**, **pero no, cambian las cosas...**

A partir de este recorrido es posible percatarse de los avances en las significaciones de la alumna. Se requirió de un acercamiento a los procesos de resolución de Andrea para identificar sus teoremas y conceptos-en-acto, confrontar sus ideas y, en la medida de lo posible, propiciar su reformulación.

## CONCLUSIONES

Los datos anteriores nos permiten hacer algunas inferencias sobre las dificultades de los estudiantes al resolver el problema en el primer estudio (Bustamante y Vaca, 2014). Según el análisis realizado, las dificultades de los estudiantes con la división y con la relación medida-magnitud podrían estar vinculadas con los esquemas que Andrea puso en acción para resolver las tareas propuestas durante la entrevista. En concordancia con los planteamientos de Vergnaud (2009), resaltamos las siguientes dificultades:

- El propósito de los alumnos al solucionar el problema puede ser ajeno a las relaciones matemáticas enunciadas, y predominar las ideas previas del estudiante sobre la división.
- Las reglas de acción con las que opera, vinculadas a sus ideas previas sobre la división, pueden ir en contra de una solución adecuada del problema (*v. g.* la cifra mayor siempre es "la de adentro", las cifras de la división se escriben en el orden que se dicen y de izquierda a derecha), al comprenderse los conceptos, estas cambian (*v. g.* "va adentro lo que dices primero") y son adecuadas para expresar mediante la división las relaciones de proporcionalidad.
- Las invariantes operatorias que el alumno pone en juego pueden no ser válidas o pertinentes al problema. Recordemos que en un problema de

partición se trata de establecer el valor de la unidad conociendo la medida de dos magnitudes de naturaleza distinta. Considerando lo anterior, la dificultad puede atribuirse a: el desconocimiento de la relación entre unidad y medida de las magnitudes, de estas entre sí y a un conocimiento incompleto de las relaciones entre enteros y decimales. Lo anterior resulta en planteamientos equivocados como: expresar el valor de la unidad como una cifra, sin establecer la relación medida-magnitud; supeditar la relación entre dividendo y divisor al tamaño de las cifras (*v. g.* si la distancia es la cantidad mayor, la distancia es el dividendo, independientemente de lo que exprese el problema); desligar una medida de su magnitud (*v. g.* una medida puede pasar del dividendo al divisor, pero la magnitud asociada permanece en el dividendo); considerar que una cifra es mayor independientemente de las unidades en que se exprese (si los metros se transforman en centímetros, entonces la cifra ya es mayor); emplear conocimientos irrelevantes (*v. g.* en la escritura de la división se sigue la direccionalidad del sistema alfabético de escritura).

- Las inferencias sobre el problema pueden estar supeditadas a las ideas equivocadas o parciales sobre la división, o a las experiencias vividas en situaciones de reparto, y no tanto a lo que dice el problema (*v. g.* solo se puede repartir un objeto que en la vida real es divisible; si la cifra mayor está en el dividendo, el resultado tiene que ser correcto; la magnitud asociada a una medida se puede cambiar para que el resultado sea adecuado; ver Imagen 4).

Con base en el análisis microgenético del proceso de resolución de Andrea, ahora podemos inferir nuevas explicaciones de por qué los estudiantes, al resolver el problema aquí analizado, optan por la división $35\overline{)70}$ en lugar de $70\overline{)35}$ (no solo porque es más fácil) y por qué les resulta difícil asignar unidades de medida a los resultados numéricos obtenidos.

Nos parece importante atender a la interacción entre dos esquemas en construcción, el del algoritmo de la división y el de los problemas de partición; en este intercambio, los estudiantes deben confrontar ideas que sostienen respecto a uno, y que son cuestionadas por su experiencia en el otro. En este sentido, es importante destacar la intensa actividad operatoria de Andrea, que se nota en la puesta en práctica de invariantes, en la construcción de reglas de acción y de su posterior generalización o reformulación mediante inferencias. Andrea nos muestra cómo emplea los diferentes sistemas simbólicos, opera con ellos y trata de darle sentido a lo que hace cuando se percata de un error. Es decir, realiza operaciones conceptuales sobre los significados y los significantes (Vergnaud, 2004).

A través de la entrevista se constató que las dificultades experimentadas por Andrea se asocian a una endeble construcción de los conceptos pertinentes para la resolución del problema; sin embargo, ella deduce, con el apoyo del entrevistador, nuevas relaciones y reglas a partir de las que va constatando, y pasa de un plano a otro de representación. Asimismo, se muestra que al solucionar un problema se coordinan diversos esquemas que interactúan (Vergnaud, 2004), en este caso el de la división y el de las relaciones de proporcionalidad; como vimos, los errores en la comprensión del algoritmo de la división dificultaban el establecimiento de la relación de proporcionalidad.

Si bien lo anterior se observa en un problema de partición, de la misma manera puede suceder en problemas de agrupamiento que corresponden a la misma clase de situaciones. Se requiere entonces un trabajo didáctico a largo plazo, que permita a los estudiantes percatarse de las restricciones de sus concepciones sobre los algoritmos, para modificarlas y consolidar sus esquemas. A través del enfrentamiento constante a situaciones en las que logren vincular el habla común con la escritura convencional de los algoritmos, encontrarán regularidades y al mismo tiempo identificarán sus diferencias.

Nos parece que, en parte, las dificultades de los alumnos se pueden deber a las prácticas pedagógicas de enseñanza de la aritmética, que se centran en enseñar el algoritmo desligado de la solución de problemas relacionados con la vida de los alumnos, práctica que contribuye a la generación de teoremas-en-acto y conceptos-en-acto que son obstáculos en la comprensión del significado de las relaciones matemáticas implícitas en los problemas y del algoritmo empleado para su solución.

Aquí cabría reflexionar cómo es más conveniente enseñar el algoritmo de la división partiendo del hecho de que los alumnos conocen diferentes procedimientos "no algorítmicos" para solucionar los problemas de partición y agrupamiento. Al respecto, Gravemeijer (1997) sugiere, desde la perspectiva de la "educación matemática realista", que es necesario centrar la enseñanza en problemas contextualizados en las experiencias de los alumnos, y partir de sus procedimientos espontáneos de solución; en este sentido los problemas de agrupamiento[5] se

[5] Gravemeijer se refiere a los problemas de agrupamiento como "ratio division" y a los de reparto como "distribution division".

relacionan más fácilmente con sus procedimientos informales y con el algoritmo convencional de la división, que se basa en la sustracción repetitiva.

Por otra parte, el empleo de herramientas como la calculadora es útil siempre y cuando su empleo sea acompañado por la discusión de las relaciones matemáticas implícitas en los problemas, y vinculándola con el aprendizaje de los algoritmos.

Es importante resaltar que fue a través del andamio provisto por el entrevistador, mediante las preguntas específicas ante las dificultades observadas o errores cometidos por Andrea, que ella explicita sus teoremas y conceptos-en-acto, y los pone a prueba. De otra manera, pudieron permanecer durante largo tiempo y, por tanto, generar reglas de acción poco productivas en la resolución de situaciones pertenecientes al mismo campo conceptual.

En términos de Saada-Robert y Balslev (2015), tanto el entrevistador como Andrea se encuentran en una zona de comprensión, ambos comparten la misma significación y por ello comparten el mismo objetivo: reflexionar sobre el problema. Este proceso de andamiaje es posible gracias a que el entrevistador tiene un referente de cómo evolucionan las relaciones entre conceptos y teoremas-en-acto que llevan a la comprensión de un problema, así como de la influencia de los aspectos conceptuales que dan lugar a que los problemas tengan un diferente nivel de complejidad (Flores-Macías, 2005).

La responsabilidad del maestro de formarse para dominar con suficiente profundidad los contenidos que pretende enseñar es ineludible. Este ha sido un reto que encaran las didácticas de las diferentes disciplinas, pero en particular la de las matemáticas. Es decir, la manera más eficiente en la que ellos pueden orientar la actividad de los estudiantes para que enfrenten situaciones que los orienten en la construcción del conocimiento esperado por parte de las instituciones educativas.

Se requiere que los profesores, además de conocer los contenidos matemáticos que serán enseñados a los estudiantes, conozcan la didáctica de dichos contenidos y cómo evolucionan los estudiantes en el conocimiento de los mismos, entender el significado de sus aciertos y errores. Los errores que cometen los estudiantes al enfrentar un problema aritmético, como se observó con Andrea, muestran una actividad cognitiva compleja, orientada a dar sentido a la situación enfrentada. Sería muy importante que los profesores develaran los razonamientos subyacentes y, a partir de ello, propusieran nuevas situaciones que ayuden al estudiante a confrontar sus ideas y transformarlas.

Este acercamiento a las formas de pensamiento de los alumnos significa para el profesor una tarea ardua, sobre todo si consideramos las condiciones de trabajo en las que labora: el número de estudiantes en cada grupo, la gran cantidad de contenidos por abordar en tiempos reducidos, las actividades extra-clase y la doble jornada laboral (Vaca *et al.*, 2010). Sin embargo, estas limitantes podrían subsanarse si se incorporara a la enseñanza la solución de problemas que hicieran referencia a las experiencias de los estudiantes en su entorno; asimismo, si se incorporaran a la clase diferentes formas de aprendizaje mediado por la interacción social, como la enseñanza recíproca o la tutoría entre pares, o si se diseñaran materiales instruccionales basados en las formas cómo evoluciona el conocimiento matemático de los alumnos.

Por último, queremos señalar un hecho evidente en la entrevista con Andrea, relacionado con los vínculos que los alumnos establecen entre diferentes formas de simbolización: ante situaciones que involucran conceptos, nociones y procedimientos matemáticos aun no consolidados, los estudiantes emplean teoremas-en-acto de otros ámbitos que ya dominan, como los del sistema de escritura alfabética, lo cual provoca que escriban la división siguiendo el orden de lo que dicen y confundiendo la relación entre dividendo y divisor (Harris, 1999; Slobin, 1987). En futuras investigaciones sería valioso analizar este vínculo y cómo se transforma; al final, el alumno necesita coordinar el lenguaje hablado y escrito con el lenguaje matemático, para poder comprender las relaciones matemáticas del problema.

El lenguaje de la matemática está ligado al lenguaje común, pero cada uno cuenta con sus propias reglas y convenciones que deben ser reconstruidas mediante homomorfismo, para entrelazarlos y emplearlos adecuadamente como herramientas que apoyen el razonamiento, favorezcan la reflexión, permitan mantener el control de la actividad durante el proceso de resolución y posibiliten comunicar adecuadamente los procedimientos y resultados obtenidos. En palabras de Vergnaud (2004), establecer homomorfismos entre diferentes formas de simbolización es un indicador claro de la evolución del conocimiento.

## REFERENCIAS

Blanche-Benveniste, C. y Ferreiro, E. (1988). Peut-on dire mots à l´enverse? Une réponse morphologique des enfants de quatre et cinq ans. *Archives de Psychologie*, 5, pp. 155-184.

Block, D., P. Martínez y T. Mendoza (2013). *Repartir y comparar.* México: SM Ediciones.

Brun, J., Conne, F., Cordey, A., Floris, R., Lemoyne, G., Leutenegger, F. y J. Portugais (1994a). Erreurs systématiques et schèmes algorithmes. En: M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Travignot (eds.). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France,* Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud (pp. 203-209). Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Brun J., Conne F., Lemoyne G. y Portugais J. (1994b). La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit. *Cahiers de la Recherche en Éducation*, vol. 1, no. 1, 1994, Éditions du CRP Faculté d'Éducation, Université de Sherbrooke, pp. 117-132.

Brun, J. (1996). The Theory of Conceptual Fields and its Application to the Study of Systematic Errors in Written Calculation. En: H. Mansfield, N. Pateman, y N. Bednarz (eds.). *Mathematics for Tomorrow´s Young Children* (pp. 120-134). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Bustamante-Santos, A. y Vaca, J. (2014). El papel de los sistemas de representación en las dificultades experimentadas por los estudiantes al resolver un problema del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. *CPU-e Revista de Investigación Educativa,* (18), 25-57. Consultado el 3 de febrero de 2014 en: http://revistas.uv.mx/index.php/cpue/article/view/755

Flores-Macías, R. C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática, 17 (2)*, pp. 7-34.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between Concrete and Abstract. En: T. Nunes y P. Bryant (eds.). *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp. 315-345). Hove: Psychology Press.

Harris, R. (1999). *Los signos de escritura*. Barcelona: Gedisa.

Inhelder, B. y De Caprona, D. (2007). Hacia un constructivismo psicológico. ¿estructuras? ¿procedimientos? los dos indisociables. *CPU-e: Revista de Investigación Educativa,* enero-junio 2007, (4), pp. 1-66. Consultado el 25 de mayo de 2010 en: https://www.uv.mx/cpue/num4/inves/inhelder_constructivismo_psicologico.html

Piaget, J. (1978). El método clínico. En: Delval, J. (comp.). *Lecturas de psicología del niño* (pp. 265-287). Madrid: Alianza Editorial.

Saada-Robert, M. y Balslev, K. (2015). Las microgénesis situadas. Estudios sobre la transformación de los conocimientos. En: Vaca, J., Aguilar V., Gutiérrez, F., Cano A., y A. Bustamante. *¿Qué demonios son las competencias? Aportaciones del constructivismo clásico y contemporáneo* (pp. 342-373).

Slobin, D. (1987). *Introducción a la psicolingüística*. México: Paidós.

Vaca, J., Bustamante, A., Gutiérrez, F., y C. Tiburcio (2010). *Los lectores y sus contextos*. Xalapa: Biblioteca Digital de Investigación Educativa, Universidad Veracruzana. Consultado el 14 de junio de 2013 en: http://www.uv.mx/bdie/general/8-los-lectores-y-sus-contextos/

Vergnaud, G. (2015). Cálculo relacional y representación calculable. En: Vaca, J., Aguilar V., Gutiérrez, F., Cano A., y A. Bustamante. *¿Qué demonios son las competencias? Aportaciones del constructivismo clásico y contemporáneo* (pp. 187-206). Xalapa: Biblioteca Digital de Investigación Educativa, Universidad Veracruzana. Consultado en: http://www.uv.mx/bdie/general/236/

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En: J. Hiebert y M. J. Behr. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Reston, VA: NCTM.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques, 10 (2)*, pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual Field: What and Why? En: G. Harel (ed.). *The Development in Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 41-61). Albany: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1996). The Theory of Conceptual Fields. En: L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin y B. Greer (eds.). *Theories of Mathematical Learning* (pp. 219-240). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Vergnaud, G. (2004). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Vergnaud, G. (2006). *Representación y actividad: dos conceptos estrechamente relacionados*. Primer Congreso Internacional Lógico-Matemática –en Educación Infantil– Abril 2006, Madrid. Consultado el 14 de agosto de 2010 en: http://www.waece.org/cdlogicomatematicas/ponencias/geradvernaurd_pon_es.htm

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development, 52 (2)*, pp. 83-94.

Vigotsky, L. (1996). *Pensamiento y lenguaje: teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*. México: Ediciones Quinto Sol.