Samper, Carmen; Plazas, Tania

Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría

Educación Matemática, vol. 29, núm. 1, abril, 2017, pp. 37-60
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

 DOI 10.24844/EM2901.02

Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría

Types of Teacher Messages During the Production of a Geometry Proof

Carmen Samper[1]
Tania Plazas[2]

Resumen: En una clase de geometría plana euclidiana para profesores en formación, el profesor busca incentivar la participación de los estudiantes en la producción colectiva de demostraciones. Durante su interacción con ellos, profiere distintos tipos de mensajes. En este artículo presentamos una tipología de mensajes del profesor, surgida al analizar, desde una perspectiva semiótica, su discurso al interactuar con los estudiantes. Inicialmente, presentamos la teoría que sustenta el análisis semiótico de los diálogos; luego detallamos la tipología propuesta. A continuación, describimos el contexto y asuntos metodológicos del estudio. Como ejemplo del uso de la tipología, analizamos los mensajes del profesor durante una situación real de clase.

Palabras clave: *Actividad semiótica, demostración, mensajes del profesor, construcción de significado.*

Abstract: In a pre-service Euclidean plane geometry course, the teacher tries to encourage student participation in the collective production of proofs. During

Fecha de recepción: 3 de febrero de 2016. **Fecha de aceptación:** 5 de septiembre de 2016.
[1] Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, csamper@pedagogica.edu.co
[2] Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, tplazas@pedagogica.edu.co

his interaction with them, he delivers different types of messages. In this article, we present a characterization of teacher messages, which arose while analyzing, from a semiotic perspective, teacher and student interactions within the class. Initially, we present the theory that underlies the semiotic analysis of the dialogues; then we discuss in detail the proposed typology. We then describe the context and methodology of the study. As an example of the use of the characterization, we analyze the teacher's messages during a real class situation.

Keywords: *Semiotic activity, proof, teacher's messages, meaning making.*

INTRODUCCIÓN

Durante el proceso colectivo de producción de una demostración en un aula universitaria de geometría plana, para la formación inicial de profesores, la interpretación que el profesor hace de las verbalizaciones de los estudiantes lo impulsa a realizar ciertas acciones tangibles. A partir de ellas, es posible inferir diferentes intenciones relativas a la construcción de significado de elementos teóricos[3] y procesos involucrados en la actividad que se está realizando. El esfuerzo analítico de diferenciar esas intenciones posibilita la identificación de los mensajes que el profesor pretende comunicar en su interacción con los estudiantes. Esto resulta útil para entender la actividad semiótica en el aula.

En el marco de una investigación,[4] cuyo objetivo era ver cómo evolucionaban los significados de los estudiantes relativos a un cierto objeto matemático, se estudió un episodio que tuvo lugar en una clase de geometría de nivel universitario. Con el análisis se pretendía obtener información sobre el aprendizaje de los estudiantes, y así determinar si se debía modificar la propuesta didáctica. Para dicho análisis se adoptó la perspectiva semiótica de la enseñanza y el aprendizaje propuesta por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), que tiene como base la idea de signo tríadico formulada por Charles S. Peirce. A partir del análisis, reconocimos que el profesor daba mensajes de diferentes tipos durante el proceso de apoyo a los estudiantes para la construcción de significado de algún objeto matemático.

[3] El término "elementos teóricos" incluye definiciones, postulados o teoremas del sistema teórico que se conforma gradualmente en la clase.

[4] Investigación financiada por Colciencias (Instituto Colombiano para el Avance de la Ciencia) y por el instituto de investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

En este artículo caracterizamos tres tipos de mensajes que el profesor da para favorecer la participación eficaz de sus estudiantes, y propiciar que construyan con significado la demostración de un teorema. Específicamente, los mensajes buscan: favorecer la construcción de significado respecto al uso de elementos teóricos; promover la comprensión de la estrategia o del plan para producir la demostración; y propiciar la previsión o la determinación de las consecuencias que puede tener, en el desarrollo de la demostración, una u otra acción teórica. En primera instancia, exponemos, de manera somera, los referentes teóricos que fundamentan el análisis semiótico de la comunicación en el aula. En segundo lugar, presentamos e ilustramos la tipología emergente de los mensajes del profesor, generada a partir del análisis de su interacción con los estudiantes. En tercer lugar, describimos el contexto y la metodología de la investigación, y hacemos un análisis usando las categorías diseñadas. Finalmente, se exponen algunos comentarios.

REFERENTES TEÓRICOS

La interacción de profesor y estudiantes se analizó bajo la perspectiva semiótica propuesta por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), la cual tiene sus raíces en el signo triádico peirceano. Peirce concibe la semiosis como la actividad comunicativa o de pensamiento en la que se crean o se usan “signos”. El “signo” de Peirce, denotado SIGNO por Sáenz-Ludlow y Zellweger, consiste en la relación triádica que resulta de la integración inseparable de tres relaciones diádicas entre un *signo-objeto,* aquello a lo que se alude ya sea en la comunicación o en el pensamiento; un *signo-vehículo,* una representación del objeto (e. g., palabra, gesto, gráfica o combinación de estas); y el *signo-interpretante*, aquello producido en la mente de quien percibe e interpreta el signo-vehículo. Peirce descompone el signo-objeto en tres objetos: el Objeto Real, en este caso matemático, el objeto-dinámico, y el objeto-inmediato. El *Objeto Real Matemático* (*ORM*) es el objeto que acepta la comunidad de discurso matemático; el *objeto-dinámico* es una representación del *ORM*, generada en la mente del intérprete cuando recibe un signo vehículo y lo interpreta. El *objeto-inmediato* es una representación de uno o más aspectos específicos del *ORM* que se codifican y se expresan en un signo vehículo.

La siguiente es una descripción somera de cómo ocurre la semiosis en torno a un determinado *ORM*, en un intercambio verbal. En un acto de interpretación-inter (interacción con otros), la persona A (profesor o alumno) genera un *objeto-inmediato* seleccionando de su *interpretante* algún aspecto específico del *ORM* sobre el que quiere enfocar su comunicación, lo codifica y lo expresa en un *signo vehículo* dirigido a la persona B (profesor o alumno). En un acto de interpretación-intra (interacción consigo mismo) que tiene lugar en el contexto de su conocimiento y experiencia, B decodifica el *signo vehículo* emitido por A y genera un *interpretante* que determina un *objeto-dinámico* que puede estar en mayor o menor consonancia con el *objeto-inmediato* de A. En ese momento, B escoge un aspecto de su *signo-objeto* recién construido y el proceso se repite, siendo B el que emite y A el que recibe.

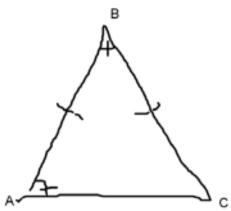
En la actividad semiótica del aula de matemática, dos o más personas (profesor-alumno o alumno-alumno) se comunican e interpretan SIGNOS de distintos sistemas semióticos (lingüístico, matemático y gráfico, principalmente). El modelo que proponen Sáenz-Ludlow y Zellweger concibe la enseñanza-aprendizaje de la matemática como actos semióticos de interpretación en el aula, siendo ello un proceso cambiante y progresivo de construcción de significados. En dicho proceso, bajo la guía de un profesor, los estudiantes forman sus concepciones y significados de conceptos matemáticos. El modelo enfatiza que el profesor debe ser consciente de la naturaleza evolutiva de tanto su proceso de interpretación como el de los estudiantes, para mantener una práctica dinámica y colaborativa de enseñanza y aprendizaje. Bajo este panorama, la *mediación semiótica* del profesor son las acciones interpretativas y deliberadas que él realiza con el propósito de lograr la convergencia de los *objetos-dinámicos* de los estudiantes hacia los *objetos-inmediatos* pretendidos del profesor.

Es importante notar que en el aula, los individuos que mantienen una conversación matemática tienen distintos niveles de conocimiento respecto al *ORM*. Así mismo, sus metas difieren: la del profesor es apoyar el proceso de construcción de significado de los alumnos; la del estudiante debe ser participar genuinamente en su proceso de construcción de significado. En cada acto de interpretación del profesor, en donde se enlazan las metas de enseñanza y de aprendizaje, él debe contemplar el *ORM* desde dos perspectivas: desde la matemática porque evoca los significados, que posee, de ciertos aspectos del *ORM* para usarlos como referencia para acciones específicas; desde la didáctica, dado que el objeto matemático que se está construyendo emerge de las acciones intencionadas del profesor y de los estudiantes. ¿Cuáles pueden ser los efectos en la mente del profesor, durante la interacción en el aula? Respecto a lo matemático: a) reconocer que la comprensión que tiene de un aspecto específico del *ORM* puede/debe mejorar; b) evocar el significado que tiene de algunos aspectos del *ORM* en discusión, o de otros que puedan apoyar el proceso de construcción de ese significado. Respecto a lo didáctico: a) evocar el significado que posee de ciertos aspectos del *ORM*, foco de la conversación, para usarlos como referencia de acciones específicas que pueden ayudar a sus estudiantes a lograr mayor compatibilidad con el concepto correspondiente que tiene la comunidad de discurso matemático; b) producir hipótesis respecto a la construcción de significado de sus alumnos; c) determinar si esta construcción está desarrollándose de manera aceptable; d) decidir cómo guiar la conversación con un propósito didáctico específico. Todas estas acciones están influidas por las creencias, el conocimiento y las experiencias previas del profesor. Por todo lo anterior y teniendo en cuenta que todo surge a partir del conocimiento que tiene el profesor del *ORM*, los *interpretantes* y los *objetos dinámicos* del profesor son más de naturaleza didáctica que matemática. Sus acciones de mediación tienen en cuenta sus interpretaciones de los *objetos dinámicos* de los alumnos respecto a aspectos particulares del *ORM* que está en juego. A partir de ello, genera un *objeto-dinámico* con la intención de facilitar la evolución de los *objetos-dinámicos* de los estudiantes. Denominamos este *objeto-dinámico* del profesor, emergente y que evoluciona, como *objeto-dinámico-didáctico* (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).

Con el siguiente ejemplo hipotético se pretende ilustrar lo anterior. Supóngase que en una clase se está trabajando el concepto de triángulo isósceles. Este sería el *ORM*. Imagínese que surge el siguiente diálogo entre el profesor y los estudiantes. Aunque el *objeto-inmediato* está presente (implícita o explícitamente) en el signo vehículo, tanto el *signo-interpretante* como el *objeto-dinámico* se infieren a partir del *objeto-inmediato*, porque ellos están presentes en la mente de la persona y no se manifiestan directamente. Por eso, es posible que existan otras interpretaciones diferentes a las aquí expresadas (Tabla 1).

Tabla 1. Ejemplo de análisis semiótico.

Sujeto	Signo-vehículo	Análisis
Profesor:	¿Cómo podemos definir triángulo isósceles?	*Objeto-inmediato:* La definición de triángulo isósceles.
Estudiante:	Es un triángulo que tiene dos lados congruentes y dos ángulos congruentes.	*Signo-interpretante:* Podría ser una representación icónica mental de un triángulo, que visualmente satisfaga la congruencia de dos lados y podría tener un recuerdo de la definición que estudió en algún momento.

Sujeto	Signo-vehículo	Análisis
		Objeto-dinámico: Exigencia de incluir la propiedad de congruencia de dos lados y de dos ángulos en la definición. *Objeto-inmediato:* Definición de triángulo isósceles en la que se incluye la congruencia de dos lados y dos ángulos.
Profesor:	(Dibuja en el tablero, un ΔABC indica con el símbolo gráfico de congruencia dos segmentos y dos ángulos congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\angle A \cong \angle B$)  ¿Es esta una representación de un triángulo isósceles?	*Signo-interpretante:* El estudiante no parece haber analizado la dependencia que existe entre las dos propiedades que menciona y, por lo tanto, cree necesario mencionar ambas. Tampoco ha tomado en cuenta que los ángulos congruentes deben ser opuestos a los lados congruentes. *Objeto-dinámico-didáctico:* Necesidad de hacer notar que los ángulos congruentes deben ser opuestos a los lados congruentes. *Objeto-inmediato:* Representación de un triángulo con dos lados congruentes y dos ángulos congruentes no opuestos a los lados congruentes.
Estudiante:	No. Porque los ángulos congruentes deben ser el $\angle A$ y el $\angle C$.	*Signo-interpretante*: Podría ser una representación icónica mental de un triángulo, que visualmente satisfaga la congruencia de dos lados y de los ángulos opuestos a estos. *Objeto-dinámico:* Representación errada de un triángulo isósceles porque los ángulos congruentes no se oponen a los lados congruentes. *Objeto-inmediato:* Representación de un triángulo isósceles, el cual tiene los ángulos congruentes opuestos a los lados congruentes.
Luego el profesor solicita a los estudiantes que construyan un triángulo isósceles con un software de geometría dinámica, y que escriban un reporte de los pasos de construcción. Después de examinar los reportes, se dirige a los estudiantes.		

Sujeto	Signo-vehículo	Análisis
Profesor:	Según lo que reportan, la mayoría construyó, usando circunferencias, un triángulo con dos lados congruentes, ambos radios de la misma circunferencia. ¿Alguno también construyó los ángulos congruentes?	*Signo-interpretante*: El estudiante no parece haber analizado la dependencia que existe entre las dos propiedades que menciona y por lo tanto, ve necesario mencionar ambas. *Objeto-dinámico-didáctico:* Necesidad de hacer notar la dependencia entre las dos propiedades: lados congruentes implica ángulos opuestos congruentes. *Objeto-inmediato*: Construcción de un triángulo con dos lados congruentes.
Estudiante:	No fue necesario porque así quedaron.	*Signo-interpretante*: La congruencia de los ángulos en la representación del triángulo. *Objeto-dinámico:* La congruencia de los ángulos es consecuencia de la congruencia de los lados. *Objeto-inmediato:* Representación de un triángulo isósceles, en el cual los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

En este ejemplo, en el cual el *ORM* es el concepto de triángulo isósceles, el objeto-inmediato pretendido del profesor es la definición económica de esta figura geométrica. Parece que sus objetos-dinámicos-didácticos se relacionan con la necesidad de que los estudiantes noten dos asuntos: (I) si se decide que la congruencia de dos ángulos es una propiedad que debe incluirse en la definición de triángulo isósceles, también se requiere incluir en esta la identificación de los ángulos que son congruentes, y (II) la dependencia que existe entre esa propiedad y la congruencia de dos lados del triángulo permite eliminarla de la definición. Además, se evidencia la evolución del objeto-dinámico de triángulo isósceles de por lo menos un estudiante cuando él se da cuenta de que es suficiente construir un triángulo con dos lados congruentes para que sea isósceles porque necesariamente los ángulos opuestos a esos lados serán congruentes.

TIPOLOGÍA Y EJEMPLOS

El uso del marco teórico de Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) para realizar el análisis de la interacción en el aula, nos obligó a tener mayor minuciosidad cuando estudiamos el *signo-vehículo*, tanto del profesor como de los alumnos, lo que llevó a imaginar posibles interpretantes del profesor que pudieran tener relación con el *signo-vehículo* que emite inmediatamente. Gracias a esto se logró determinar que el profesor trató de comunicar mensajes de diferente tipo, que incluyen *signos-dinámicos-didácticos*. Se identificaron tres tipos de mensajes en términos de su foco, que pueden ser: el uso experto de elementos teóricos, el plan para construir la demostración, o la previsión que se requiere cuando se sugiere el uso de algún elemento teórico en la demostración. Este último foco tiene que ver con la conveniencia de atender necesidades futuras en el proceso de demostración. Presentamos a continuación una descripción de la tipología de mensajes del profesor que emergió en este análisis.

1. Enfocados en el uso experto de elementos teóricos

Estos mensajes los emite el profesor con el fin de favorecer la construcción de significado de los elementos teóricos, utilizados como garantías en una demostración. Algunos componentes que, desde nuestro punto de vista, forman parte del significado pretendido de los elementos teóricos son: (I) reconocer su estatus teórico (Duval, 2007) en un sistema axiomático; (II) reconocer su estatus operativo (Duval, 2007) cuando se usan; (III) identificar su estructura lógica; (IV) traducir su contenido en términos de los objetos involucrados en una situación específica; (V) reconocer cuándo tiene sentido usarlos; y (VI) usar el lenguaje geométrico correcto cuando se refiere a ellos. Como el estatus teórico de postulados, teoremas y definiciones es distinto, vemos necesario diferenciar lo que entendemos por saber usar cada uno de ellos, en la producción de una demostración.

- Saber usar un *postulado o teorema* incluye principalmente dos acciones: (I) reconocer la viabilidad de su uso para la situación que se tiene entre manos (resolver un problema, formular una conjetura, producir una demostración). Es decir, reconocer que la información que tiene corresponde al antecedente del postulado o teorema. (II) Reconocer que su uso permite obtener lo que se busca porque está relacionado con el consecuente del postulado o teorema. Así identifica que ese postulado o teorema es la garantía en su argumento.
- Saber usar una *definición* consiste en desencapsular o encapsular propiedades según el tipo de información que provee la situación en la que se

va a usar. (I) Si se tiene el término que designa al objeto, se *desencapsulan* las propiedades poniéndolas en juego. (II) Si se tienen las propiedades que definen al objeto se *encapsulan* mediante el uso del término correspondiente.

Por ejemplo, el uso experto de la definición de *triángulo isósceles*[5] consiste, por un lado, en manifestar que un determinado par de lados de un triángulo son congruentes (desencapsular) teniendo como información que tal triángulo es isósceles; por otro lado, consiste en declarar que un triángulo dado es isósceles (encapsular), teniendo como información la congruencia de dos de los lados del mencionado triángulo. El uso experto del Teorema del Triángulo Isósceles (TTI)[6] consiste en reconocer que si los datos incluyen un triángulo isósceles, tiene sentido usar el teorema si se quiere concluir que el triángulo tiene dos ángulos congruentes. O, si se quiere demostrar la congruencia de dos ángulos, basta determinar si son ángulos de un mismo triángulo para tratar de justificar que es isósceles.

2. Enfocados en el plan

Por medio de estos mensajes, el profesor busca que los estudiantes propongan y comprendan la estrategia que se debe seguir para producir la demostración, y cuál debe ser su estructura; es decir, que tengan un plan para hacer la demostración. Es importante resaltar que este tipo de mensajes surge al comienzo de la demostración o en el desarrollo de la misma, cuando los estudiantes se estancan y no recuerdan el camino que se trazó al inicio del proceso.

Respecto a la estrategia, los estudiantes tienen que reconocer si lo que van a demostrar es: igualdad de conjuntos, pertenencia de un elemento a un conjunto, una propiedad específica o la existencia de un objeto geométrico específico. Además deben determinar los núcleos de la demostración y los elementos teóricos pilares (definiciones, teoremas, postulados) que apoyan esos núcleos, determinar cómo se van a usar y por qué se usan. Denominamos *núcleo de una demostración* a las ideas principales que forjan el camino hacia el consecuente que

[5] **D. Triángulo isósceles:** Si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces es un triángulo isósceles.

[6] **T. Triángulo Isósceles:** Dado un ΔABC con $\overline{AB}$ congruente con $\overline{BC}$, entonces los ángulos A y C son congruentes.

se busca justificar. Puede haber uno o varios núcleos. Llamamos *elementos pilares de los núcleos* a los principales elementos del sistema teórico que proveen la justificación de cada núcleo. La demostración completa consiste en desglosar cada núcleo propuesto en pasos específicos.

En cuanto a la estructura de la demostración, los estudiantes deben determinar el tipo de demostración que se va a realizar y por qué; es decir, si conviene hacer una demostración directa, usar el método de la contrarrecíproca, hacer estudio de casos, o usar el método de reducción al absurdo. También deben decidir qué construcciones auxiliares permitirán enriquecer la situación para que surjan nuevas figuras geométricas o situaciones especiales que ayudarán a construir la demostración, porque estas permiten el uso de los elementos teóricos pilares.

Por ejemplo, la demostración del Teorema del Triángulo Isósceles exige reconocer que se va a demostrar una propiedad específica, que el núcleo es la congruencia de dos triángulos, lo cual requiere como construcción auxiliar una de las líneas notables del triángulo (altura, mediana o bisectriz de un ángulo) para determinar dos triángulos, y que los pilares teóricos son los criterios de congruencia de triángulos (Hipotenusa Cateto (HC), Lado, Lado, Lado (LLL), Lado, Ángulo, Lado (LAL), respectivamente) y las definiciones de líneas notables del triángulo. Esta demostración es de tipo directo.

3. Enfocados en previsión

Estos mensajes tienen que ver con las posibles consecuencias de una decisión, respecto a asuntos teóricos, en el desarrollo de una demostración. Pretenden comunicar que la actividad de justificar no discurre simplemente generando paso a paso varios argumentos que se encadenan y que juntos componen la demostración; es imprescindible, para no perder tiempo en ensayos poco útiles, ir analizando el posible efecto posterior de algunas decisiones que se toman en aquellos pasos en los que se tienen opciones y la autonomía para escoger alguna de ellas. Además, son mensajes que buscan que se desarrolle el plan establecido para hacer la demostración, a partir de un análisis de las situaciones que se presentan teniendo en cuenta las posibilidades que hay y las consecuencias de tomar uno u otro camino. Es decir, es tener en cuenta que la decisión que se tome en algún momento influirá en los elementos teóricos que se deben usar posteriormente.

Estos mensajes surgen cuando es posible tomar decisiones respecto a los núcleos y, por lo tanto, a los pilares que se van a usar o al tipo de demostración que se va a desarrollar. Un ejemplo está en las demostraciones en las que se involucran expresiones algebraicas y se escogen convenientemente valores para simplificar el manejo algebraico correspondiente. Otro ejemplo son las demostraciones en las que existe la opción de usar cualquiera de dos elementos teóricos, pero usar uno requiere más elaboración que usar el otro. Un tercer ejemplo, consiste en determinar si conviene hacer una demostración directa o usar el método de reducción al absurdo.

Por ejemplo, para la demostración del TTI se establecieron como pilares las definiciones de las líneas notables del triángulo y los criterios de congruencia. La previsión consiste en decidir qué línea notable usar y prever qué criterio de congruencia es el adecuado. Así, si los estudiantes deciden usar la mediana del triángulo, entonces deberán usar el criterio de congruencia LLL; si escogen usar la altura, entonces el hecho geométrico que se ha de utilizar será el criterio HC; si eligen la bisectriz, el criterio que se ha de usar es LAL. La elección dependerá del sistema teórico que se tiene a disposición en ese momento. Es posible que no se tenga alguno de esos criterios en el sistema y, por tanto, no se pueda utilizar la respectiva línea notable.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio del que surgieron los elementos que dieron lugar a la tipología que presentamos en este artículo forma parte de la investigación *Conjeturas y organización del contenido matemático en clase*, esta tuvo como escenario el curso Geometría Plana impartido durante el segundo semestre de 2013. Se analizó la interacción entre los miembros de la comunidad de clase (profesor y alumnos), durante dos sesiones de clase consecutivas en las cuales se enuncia y se demuestra, ajustado al sistema teórico que se ha conformado, el Teorema Localización de Puntos (TLP).[7] Este hecho geométrico permite localizar un punto en un rayo a una distancia dada del extremo del rayo. En esas sesiones de clase, el Objeto Real Matemático fue la demostración del TLP. Enfocamos la atención en la interacción en torno a los núcleos y pilares que dan soporte a la demostración del

[7] **Teorema Localización de Puntos**: Dados un rayo *CT* ($\overrightarrow{CT}$) y un número positivo *z*, existe un único punto *X* tal que *X* pertenece al $\overrightarrow{CT}$ y la distancia de *C* a *X* es *z*.

TLP, en la estrategia principal para su demostración, y en la previsión de las decisiones teóricas tomadas en el trascurso de la producción de la misma.

La selección de fragmentos significativos para el análisis se hizo a partir de la trascripción completa de dos clases. En el análisis retrospectivo de esa trascripción se evidenció que en la construcción colectiva de la demostración de un teorema, el profesor emite mensajes de los diferentes tipos descritos. Los núcleos y los pilares de la demostración determinaron los diferentes fragmentos en los que se separó la transcripción, teniendo siempre cuidado de incluir en cada uno de ellos lo necesario para hacerlos autosuficientes.

CONTEXTUALIZACIÓN

Geometría Plana es un curso del segundo semestre del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria,[8] en la Universidad Pedagógica Nacional. Tiene como fin que los estudiantes aprendan a demostrar y entender un teorema, al participar en la conformación de un sistema teórico de geometría plana euclidiana, lo cual implica entender los teoremas, concibiendo teorema como la tripla formada por el enunciado, el sistema teórico que lo sustenta y la demostración (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, y Garuti, 1997). Específicamente "entender un teorema", según Molina (2014), es tener un significado amplio que incluye comprender: (I) la estructura y el contenido del enunciado, (II) la demostración, (III) su relación con otros elementos teóricos (comparación de enunciados de postulados u otros teoremas y sus respectivas demostraciones) y (IV) el uso experto del teorema en diversos contextos.

Generalmente, la metodología de trabajo que usa el profesor en el curso consiste en proponer un problema geométrico abierto de conjeturación, para que a partir de las conjeturas propuestas por los estudiantes, se extraigan los elementos teóricos que se quieren abordar en esa sesión de clase. Un problema abierto es una tarea en la cual se hace una pregunta sin revelar o sugerir la respuesta pretendida (Arsac *et al.*, 1999; Silver, 1995, citados en Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010) y es de conjeturación cuando se debe expresar la relación de dependencia entre dos conjuntos de propiedades como proposición condicional, que se constituye en la conjetura (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010).

[8] Programa Curricular Licenciatura en Matemáticas.

Los problemas propuestos generalmente requieren del uso de software de geometría dinámica para representar y explorar la situación correspondiente, de tal forma que se pueda llegar a formular una conjetura como solución al problema. Estas conjeturas dan lugar a una actividad de verificación de lo propuesto y a la modificación de los enunciados formulados (si se requiere) para establecer una sola conjetura, ya sea para que ésta se convierta, después de demostrarla, en un elemento más del sistema teórico, o para que en el proceso de justificarla surja la necesidad de introducir válidamente un elemento al sistema teórico.

El sistema teórico que se va conformando es, en esencia, el que propone Euclides. Sin embargo, en este curso, se introducen dos postulados siguiendo la propuesta de Birkhoff (1932) de hacer tangibles la regla y el transportador, cuestiones que Euclides no considera. Se escogió esta propuesta porque permite el uso de un software de geometría dinámica como herramienta para construir y explorar situaciones, con la intención de descubrir hechos geométricos. Este tipo de software está esencialmente regido por los postulados de la geometría euclidiana y, por tanto, modelan sustancialmente dicha geometría. Los postulados que se introducen son: Puntos de Recta- Número Reales (PPR-NR)[9] y Rayos – Número.[10] Estos permiten validar de manera formal algunas de las ideas que están inmersas en la teoría de Euclides, pero que no se abordan en ella de manera explícita, como la infinitud de puntos en la recta, existencia del punto medio, entre otros. Particularmente, en el caso del TLP, el primer postulado juega un papel central en su demostración. El TLP permite prescindir del PPR-NR para desarrollar el resto del sistema axiomático.

Para poder seguir comprensivamente los trozos de la interacción entre profesor y estudiantes, presentamos los elementos claves en el desarrollo de la demostración (Tabla 2).

---

[9] **Postulado Punto de Recta – Números Reales:** Dada una recta, se puede establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tales que: I) a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real, II) a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta. El número que le corresponde al punto se denomina coordenada del punto.

[10] **Postulado Rayo - número:** Dada una recta *AB* y un punto *C* tal que *C* no pertenece a la recta. Se puede establecer una correspondencia entre todos los rayos con extremo en *A* y un punto en el semiplano determinado por la recta donde está *C* con los números reales entre 0 y 180 tal que: (I) A cada rayo con un punto en ese semiplano le corresponde un único número entre 0 y 180, (II) a cada número entre 0 y 180 le corresponde un único rayo con un punto en el semiplano, (III) al rayo *AB* le corresponde 0 y (IV) al rayo opuesto del rayo *AB* le corresponde el número 180.

Tabla 2. Núcleos y pilares de la demostración del TLP.

Teorema Localización de Puntos		
Núcleos	**Pilares**	**Consecuencia del uso del elemento teórico**
1. Usar coordenadas para encontrar el punto X.	a) Usar el PPR-NR (I).	Asignar coordenada 0 (cero) al origen del rayo (C) y $t > 0$ al punto que lo determina (T).
	b) Usar definición de distancia para determinar un número real positivo z, relacionado con las coordenadas escogidas para localizar al punto X.	Verificar que se cumpla que la distancia del origen del rayo al punto localizado sea z.
	c) Usar el PPR-NR (II).	Asignar como X al punto que corresponde al número obtenido anteriormente.
2. Establecer las interestancias entre los puntos que se tienen, de acuerdo a lo que exige la definición de rayo.	a) Usar la tricotomía de números reales para determinar condiciones del número z con respecto a las coordenadas que ya se tienen.	Estudiar las cuatro posibilidades para z: $c < z < t$, $c < t < z$, $z < c < t$ o $t = z$
	b) Usar el T. Interestancia-orden* para analizar las relaciones de orden entre las coordenadas en el contexto dado.	Asegurar que el punto X pertenece al $\overrightarrow{CT}$. Se descarta $z < c < t$. Si $c < z < t$ o $c < t < z$ o $t = z$, entonces X está entre C y T o T está entre C y X, o $X = T$, es decir $X \in \overrightarrow{CT}$.

* **T. Interestancia – orden:** Dados los puntos A, B y C. Si B está entre A y C entonces $c(A) < c(B) < c(C)$ o $c(A) > c(B) > c(C)$. c (A) simboliza la coordenada del punto A.

ANÁLISIS DE UN EPISODIO DE CLASE

A continuación se presenta un ejemplo real donde se evidenciaron mensajes de cada tipo, cuando se institucionalizó el enunciado del TLP y se demostró con el fin de incorporarlo al sistema teórico que se estaba conformando. En clases anteriores, se había propuesto un problema cuya solución requería el uso de un software de geometría dinámica. A partir de las soluciones propuestas por los estudiantes surgió el enunciado. Posiblemente, también emergieron ideas para la justificación del teorema (Tabla 3).

Tabla 3. Fragmento 1. Desarrollo del Núcleo 1a.

Emisor		Signo vehículo	Tipo de mensaje
1.	Profesor:	¿Qué es lo que necesitamos hacer en esencia para que aparezca *X*? ¿Cómo hacemos para que aparezca con las condiciones que tenemos acá? (En el enunciado escrito en el tablero señala las condiciones que forman parte de la tesis.)	Plan: Núcleos 1 y 2 y sus pilares.
2.	Laura:	Una recta.	
3.	Profesor:	Una recta. ¿Para qué necesitas la recta?	Plan: Núcleo 1 Pilar a
4.	Laura:	Para poder dar coordenadas.	
Establecen teóricamente la existencia de la recta.			
6.	Profesor:	Listo, ya tenemos la recta *CT*. ¿Para qué queremos la recta?	Plan: Núcleo 1 Pilar a Uso experto: PPR-NR
7.	Antonio:	Para asignar las coordenadas, con uno de los puntos en cero	
8.	Profesor:	Sea la coordenada de *C*. ¿Cuál quieres que sea la coordenada de *C*?	Previsión: Asignar coordenadas convenientes para facilitar cálculos algebraicos.
9.	Antonio:	Cero.	
10.	Profesor:	Cero. Ya sabemos que eso nos facilita el asunto. ¿Quieres alguna otra coordenada?	Previsión: Decisión hecha facilitará el proceso algebraico
11.	Antonio:	La de *T*.	
12.	Profesor:	La coordenada de *T*. Y la coordenada de *T*, que sea ¿quién?	Uso experto: PPR-NR (i)
13.	Laura:	*t*.	

	Emisor	Signo vehículo	Tipo de mensaje
14.	Profesor:	*t*. Vale, yo hago lo que ustedes me digan. ¿Alguna condición especial?	Previsión: Deben escoger propiedad de la coordenada *t*, para facilitar el proceso.
15.	Molly:	Que *t* sea mayor a cero.	

Por medio de sus preguntas [1], el profesor busca que los estudiantes propongan un plan, es decir que establezcan los dos núcleos de la demostración. A partir de las propuestas de Laura [2,4] y las preguntas del profesor [3,6], queda establecido el primer núcleo de la demostración y desarrollado parcialmente, hasta usar la primera parte del PPR-NR. En lo que ha transcurrido hasta el momento, parece que lo que interpretan los estudiantes de los mensajes del profesor concuerda con el objeto-inmediato del profesor, el cual parece ser el uso experto del PPR-NR para iniciar el desarrollo del primer núcleo. Los objetos directos de los estudiantes son aspectos del Objeto Real Matemático. Sin embargo, ese no es siempre el caso en una clase.

A continuación se evidencia cómo la propuesta de un estudiante modifica el desarrollo del primer núcleo y, por ende, cómo ello trastoca el plan para la demostración. El profesor permite que se desarrolle la idea, posiblemente con la intención de que los estudiantes se den cuenta del efecto que tiene en el plan utilizar lo propuesto (Tabla 4).

Tabla 4. Fragmento 2. Propuesta errónea para hallar a *X*.

	Emisor	Signo vehículo	Tipo de mensaje
16.	Profesor	Entonces aparecieron coordenadas. ¿Ahora qué hacemos? Insisto con la pregunta, ¿qué es lo que necesitamos que aparezca?	Plan: Núcleo 1 Pilar b
17.	Molly	Un punto.	
18.	Profesor	El punto *X*. ¿Cómo hacemos para que aparezca *X*?	Plan. Núcleo 1 Pilar c
19.	Ernesto	Con el Teorema Punto a un Lado.*	

	Emisor	Signo vehículo	Tipo de mensaje
20.	Profesor	Queremos que aparezca el punto *X*. Ernesto dice que usemos el Teorema Punto a un Lado. ¿A qué lado quieres ponerlo?, ¿a este lado o a este lado? (Señal en la representación de la $\overleftrightarrow{CT}$, un punto a la izquierda de *C* y luego un punto a la derecha de *T*.) 	Uso experto: T. Punto a un lado. Previsión: Determinar la interestancia que es conveniente para asegurar la pertenencia al rayo.
21.	Ernesto	A este lado (Señala un punto a la derecha de *T*).	
22.	Profesor	 Listo lo dejamos a este lado. Aparece acá el punto *X*. Queremos que ese punto *X* esté en el rayo y ya está en el rayo. Perfecto. ¿Qué otra condición queremos que tenga *X*?	Uso experto: D. Rayo Plan: Núcleo 1 Pilar c
23.	Ernesto	Que la distancia sea igual a *z*.	
24.	Profesor	Que la distancia de *C* a *X* sea *z*. Con esta construcción del Teorema Punto a un Lado, ¿podemos garantizar que esta distancia de *C* a *X* sea *z*?, ¿lo podemos garantizar? Con lo que dice Ernesto de encontrar a *X* con el (teorema) Punto a un Lado, ¿puedo garantizar que la distancia de *C* a *X* es *z*? ¿Sí o no?	Previsión: Se tiene una de las condiciones de la tesis, falta asegurar la otra. Uso experto: D. Distancia
25.	Molly	Sí se puede porque *z* es mayor que cero.	
26.	Antonio	No sabemos cuál es la coordenada de *X*.	
27.	Profesor	Ese es punto del asunto. Como aún no sabemos cuál es la coordenada de este punto *X*, entonces yo no puedo saber cuál es la distancia entre *C* a *X*. Este *X* puede estar en cualquier lado y no podemos saber si la distancia entre *C* y *X* es *z*. Entonces ustedes podrían decir pongamos el *X* con el Teorema de Punto a un Lado y pongámosle coordenada *z*. ¿Puedo hacerlo o no? Pues no, por eso no debe usar el Teorema Punto a un lado.	Previsión: Consecuencias de propuesta en relación a las dos condiciones solicitadas en la tesis.

* **Teorema Punto a un Lado:** Dados dos puntos *A* y *B*, existe un punto *C* de la $\overleftrightarrow{AB}$ tal que *B* está entre *A* y *C* o *A* está entre *B* y *C*.

El mensaje del profesor en [16,18] motiva la continuación del desarrollo del Núcleo 1 del plan para la demostración; eso es su objeto-inmediato. Él espera que los estudiantes propongan el uso del PPR-NR (II) para localizar al punto *X*. Sin embargo, inicialmente [19,21], el signo-interpretante de Ernesto parece centrarse sólo en la posición del punto *X* en la recta para que cumpla la pertenencia al rayo; por ello su objeto-inmediato es asegurarlo teóricamente. Su objeto-dinámico es que el uso del Teorema Punto a un Lado valida la creación del punto *X*. Coincide parcialmente con el objeto-inmediato del profesor en cuanto a que ambos están buscando la justificación teórica de la existencia del punto *X*, pero Ernesto ignora, en ese momento, que su propuesta no conducirá a la otra propiedad que debe satisfacer: la distancia al extremo del rayo debe ser *z*. El profesor reconoce que la propuesta de Ernesto, de tomar al azar cualquier punto *X* del rayo, para cumplir con la interestancia, llevará a tener que forzar en él la propiedad de distancia requerida; esto sería parte de su signo interpretante. Lo que propone Ernesto es un procedimiento espontáneo que los estudiantes usan cuando deben demostrar la existencia de objetos geométricos especiales. Se requiere la intervención explícita del profesor para que ellos entiendan por qué no es válido (Samper, Perry, Camargo, Saénz-Ludlow y Molina, 2016). Es por ello, posiblemente, que el profesor impulsa el desarrollo de la idea de Ernesto en sus siguientes mensajes [20,22], con los que busca que los estudiantes usen de manera experta el PPR-NR (II) y la definición de rayo (objeto-inmediato). Su objeto-dinámico didáctico es que los estudiantes deben reconocer la invalidez del procedimiento que sugiere Ernesto. Al constatar, por medio de la respuesta de Ernesto [21] que por lo menos el signo interpretante de este incluye una representación correcta de rayo, y que él es consciente de la condición de distancia que debe tener *X*, el siguiente mensaje del profesor tiene que ver con previsión. A través de sus preguntas [24], el profesor espera que el signo interpretante de los estudiantes incluya la definición de distancia y la consecuencia que acarrea tomar al azar el punto *X*, pues de manera esquemática en su intervención [27] lo expresa.

Creyendo que los estudiantes han reconocido que el camino elegido por Ernesto no es el adecuado, el profesor se esfuerza por encaminar nuevamente la demostración para completar el Núcleo 1, que se había desarrollado parcialmente, y para que propongan el Núcleo 2 (Tabla 5).

Tabla 5. Fragmento 3. Desarrollo Núcleo 2b.

	Emisor	Signo vehículo	Tipo de mensaje
28.	Profesor:	Ernesto, si ya sabemos que no podemos utilizar el Teorema Punto a un Lado, entonces ¿cómo hacemos para que aparezca *X*?	Plan: Núcleo 1 Pilar b y c.
29.	Ernesto:	Asignándole un número a la coordenada (que será de) *X*.	
30.	Profesor:	¿Cuál sería ese número?	Previsión: Condiciones requeridas para establecer la interestancia y asegurar el uso del antecedente.
31.	Molly:	*z*	
32.	Profesor:	El *z*. Por eso está dado desde el principio y miren que acá dice que es mayor que cero; es decir, coincide con la condición que puso Molly donde *t* es mayor que cero. Eso va arreglando las cosas por el camino. Bueno. Ya tenemos el número. ¿Cómo hacemos para que finalmente aparezca el punto? ¿Cómo es que escribimos? Con otra afirmación. Existe un único [punto] *X*. ¿En dónde está?	Previsión: Importancia de escoger la coordenada *t* con el mismo signo del número *z*. Uso experto: PPR-NR (II)
33.	Antonio:	En la recta.	
34.	Profesor:	Que pertenece a la recta *CT*.	Uso experto: PPR-NR (II)
35.	Antonio:	Y la coordenada de *X*.	
36.	Profesor:	Y la coordenada de *X* es igual a...	Uso experto: PPR-NR (II)
37.	Antonio:	Es igual a *z*.	
38.	Profesor:	Es igual a *z*. Para eso es que nos dan ese *z*. Listo. Y ¿cuál sería la garantía en este caso?	Previsión: Relación del número *z* dado con lo hecho hasta ahora. Uso experto: Reconocer que se tiene el antecedente del PPR-NR (II) y se está concluyendo el consecuente de este.

	Emisor	Signo vehículo	Tipo de mensaje
39.	Molly:	Postulado Puntos de Recta- Números Reales, dos.	
40.	Profesor:	Listo apareció el punto. Pero acá tengo otra dificultad. ¿Ese punto dónde debe estar?	Plan: Núcleo 2 Pilar b
41.	Molly:	En el rayo.	
42.	Profesor:	¿Y dónde apareció? En la recta. De alguna forma tenemos que garantizar que ese punto esté en el rayo y no en la recta.	Plan: Núcleo 2 Pilar b
Después de establecer que la distancia de *C* a *X* es *z*, se concentran en demostrar que *X* efectivamente pertenece al rayo *CT*, como lo solicita la tesis del TLP.			
44.	Profesor:	¿Cuáles son las posibilidades que tiene *X*? Tenemos fijo *T* y *C*.	Plan: Núcleo 2 Pilar a Uso experto: T. Tres Puntos*
45.	Juan:	Que X esté entre *C* y *T*, que *C* esté entre *T* y *X*, que *T* esté entre C y *X*.	
46.	Profesor:	Que *C* esté entre *T* y *X*. Pero... ¿por qué hay un pero ahí? ¿Por qué este caso no tiene sentido?	Uso experto: T. Interestancia – orden.
El profesor muestra, en los pasos de la demostración ya consignados en el tablero, las relaciones de orden entre las coordenadas establecidas en la primera parte de ésta.			
47.	Dina:	Porque las coordenadas (se refiere a *t* y *z*) son mayores que cero.	

* **T. Tres Puntos:** Dados los puntos *A*, *B*, y *C* de una misma recta, entonces *B* está entre *A* y *C*, *A* está entre *B* y *C* o *C* está entre *A* y *B*.

Por medio de su intervención [28], el profesor quiere que los estudiantes vuelvan al plan inicial, es decir trabajen con coordenadas. Interpretamos que su objeto-inmediato es el uso de la segunda parte del PPR-NR, cuestión que Ernesto [29] y Antonio perciben [35,37], al sugerir que *X* es el punto que corresponde al número real *z*, y que Molly expresa explícitamente [39]. En este caso, sus objetos dinámicos están en consonancia con el objeto-inmediato del profesor. En su mensaje, a través de las intervenciones [32,38], el profesor pretende que, en sus interpretantes, los estudiantes relacionen la decisión hecha anteriormente [15], respecto al signo de t con la que están tomando en ese momento al asignar como X al punto que corresponde al número z. Dado que desde el principio de la demostración [8,10,12,14], el profesor ha insinuado a los estudiantes prever que las decisiones acerca de las coordenadas tendrán un efecto perentorio en algún momento de la demostración, su expectativa no carece de fundamento. Él sabe que dicha información será esencial para desarrollar el Núcleo 2. Ese es el objeto-dinámico didáctico del profesor. En su signo vehículo [40], el objeto-inmediato del profesor es el Núcleo 2 de la demostración, cosa que expresa explícitamente, en su intervención [42]. El objeto-inmediato en sus preguntas [44,46] es el uso experto de un teorema que es pilar del Núcleo 2: T. Interestancia-Orden. Los estudiantes interpretan parcialmente su objeto-inmediato, proveyendo la tesis del T. Tres Puntos [45] que debe dar lugar a la introducción del T. Interestancia-Orden, para justificar así la imposibilidad de que el punto C esté entre T y X [47]. Sin embargo, como se vio, en lo que sigue de la construcción de la demostración, no fue tan evidente para los estudiantes la relación entre las coordenadas de los puntos; aunque fue establecida por ellos mismos, no parecen haber sido realmente conscientes de las consecuencias futuras respecto a la pertenencia de X al rayo CT.

COMENTARIOS

Con sus mensajes, el profesor buscó mediar semióticamente para que los estudiantes construyeran, con significado, la demostración; es decir, para que propusieran un plan, desarrollaran y proveyeran argumentos para sustentar sus ideas, usaran de manera experta los elementos teóricos y lograran prever las consecuencias de sus propuestas. La meta del profesor era que los estudiantes adquirieran significado del teorema que se estaba estudiando. Para ello, promovió la construcción social del conocimiento, siendo él el experto que guiaba el proceso. No desarrolló la demostración completamente mientras los estudiantes escuchaban, como sucede con frecuencia.

Los estudiantes tenían que interpretar los mensajes del profesor, porque es así como evocan lo que saben para formar interpretantes relacionados con el objeto real matemático que se está tratando en clase. Fue a través de las interacciones con los estudiantes, la interpretación de los signos vehículo de ellos, y sus mensajes, como el profesor fue impulsando la generación de ideas y la participación activa. Las respuestas a sus preguntas le permitieron dilucidar si se acercaban al significado pretendido de los elementos teóricos involucrados en la demostración y del proceso de esta. En este caso, el uso experto de los elementos teóricos, en especial de las definiciones, fue el tipo de mensaje que más profirió el profesor. Estos deben apoyar la construcción de significado de cada uno de los elementos teóricos en juego y el papel del sistema teórico en la demostración. Los otros dos tipos de mensajes apuntan al proceso mismo de la demostración. Cobran suma importancia cuando se pretende que los estudiantes lleguen a construir demostraciones de manera autónoma, lo cual usualmente es uno de los objetivos en cursos universitarios de matemáticas. En este caso, los mensajes del profesor tuvieron que ver más con el plan para la demostración que con la previsión que se debe tener.

Según Ben-Zvi y Sfard (2007), aprender matemáticas significa asimilar comprensivamente los objetos y procesos matemáticos involucrados, y modificar y extender el discurso propio acerca de ellos. Aseguran, además, que esto no se logra sin contar con la interacción con una persona competente. Acorde con esto, con sus distintos mensajes, el profesor buscó que: se establecieran los núcleos y sus respectivos pilares; se siguiera un plan propuesto por los estudiantes hasta determinar si era viable y útil; se explicitaran las razones para proponer el uso de un elemento teórico; utilizaran estos elementos adecuadamente; y se dilucidaran las consecuencias de su uso. También, buscó que los estudiantes entendieran la importancia de la previsión en la construcción de una demostración, específicamente, la conexión que existe entre la información dada en la hipótesis del teorema, $z > 0$ y haber asignado cero y un número positivo como las respectivas coordenadas de los puntos C y T. Sin embargo, se requería que el profesor directa y explícitamente expusiera en qué consiste la previsión, máxime porque esto era una cuestión nueva para los estudiantes. En este caso, eso no sucedió.

El análisis de los mensajes del profesor, nos muestra la importancia tanto de prever cuidadosamente las preguntas y la información que se quiere proveer (objeto-dinámico-didáctico), como de desentrañar lo que comunican los estudiantes en sus signos vehículo. Lo primero, porque no se trata de presentar la demostración sino de dar pautas para que sean los estudiantes quienes la generen; lo segundo, porque posiblemente debe modificar su siguiente objeto-dinámico-didáctico para favorecer la evolución y convergencia de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia el aspecto del ORM que se está tratando. En ocasiones, ello implica dejar que los estudiantes prosigan con el desarrollo de una propuesta que el profesor sabe es errónea, para que sean ellos quienes descubran porque no es adecuada. Hay que resaltar que la mediación semiótica que se pretende requiere de mayor esfuerzo del profesor, de más preparación, tiempo y paciencia, pero es así como se puede asegurar construcción significativa de conocimiento.

REFERENCIAS

Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M.A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*, 225-253.

Ben-Zvi, D. & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings, and the learner's autonomy. *Education & Didactique*, *1*(3), 117-134.

Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, *33*(2), 329-345. Recuperado de http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/ahg/1932_Birkhoff.pdf)

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). The Netherlands: Sense Publishers.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 180-195). Lahti, Finlandia: Universidad de Helsinki.

Molina, Ó. (2014). Enunciado de un teorema: ¿único componente del significado teorema?. En P. Perry (Ed.), *Relevancia de lo inadvertido en el aula de Geometría.* (pp.11-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. & Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan, (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, *IV*, 409-416). Vancouver, Canadá: PME.

Sáenz-Ludlow, A. & Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. In Pre-proceedings of the 12th ICME. Recuperado de http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Saénz-Ludlow, A., & Molina, Ó. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, *93* (1), 35-50. doi: 10.1007/s10649-016-9683-x