Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

 DOI: 10.24844/EM2902.05

Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar

Stability and conceptual change about rate of change

Crisólogo Dolores Flores[1]
Javier García-García[2]
Angélica Gálvez-Pacheco[3]

Resumen. Este artículo da cuenta de una investigación cuyo objetivo se centró en estudiar la estabilidad y el cambio conceptual acerca de algunas razones de cambio en estudiantes de bachillerato. Para ello se diseñó, aplicó y valoró, una secuencia de aprendizaje que tuvo como escenario el salón de clase de una escuela de bachillerato tecnológico. Los resultados fueron valorados mediante una evaluación pre-post test, a través de la cual fueron contrastadas las ideas previas con las ideas manifestadas al final de la aplicación de la secuencia de aprendizaje. Los cambios conceptuales van, de interpretar a la velocidad en una gráfica distancia-tiempo "como punto" o como "magnitud de la distancia" a la concepción geométrica del "desplazamiento vertical" respecto del "desplazamiento horizontal"; de la fijación por la fórmula $v = d/t$ a la utilización del cociente de diferencias $v = \Delta s/\Delta t$. Se notó estabilidad en la concepción que asocia a las

Fecha de recepción: 17 de febrero de 2016. **Fecha de aceptación:** 11 de enero de 2017.
[1] Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo Guerrero, México. cdolores@uagro.mx
[2] Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo Guerrero, México. jagarcia@uagro.mx
[3] Centro de Bachillerato Tecnológico Agropecuario (CBTA) Núm. 125, Huamuxtitilán Guerrero, México. angelicagalvezpacheco@gmail.com

ordenadas de mayor magnitud de una gráfica tiempo-estatura, como las que representan la "mayor rapidez de crecimiento".

Palabras clave: *Cambio conceptual, Estabilidad, Razón de Cambio, Velocidad, Rapidez.*

Abstract. This article reports one research conducted with the aim of studying the stability and conceptual change about some rates of change in high school students. For this purpose, a learning sequence was designed, implemented, and evaluated, in an upper secondary education school. A pre-post assessment was used to evaluate the results of the study. The students' conceptions were compared. Changes entail transiting from interpreting speed in a distance-time graph as "a point" or as "a magnitude of the distance" to the geometrical conception of "vertical displacement" with respect to "horizontal displacement"; from being fixed by the formula $v = d/t$ to the use of the difference quotient $v = \Delta s/\Delta t$. Stability was noted in the conception associated with the ordinates of greater magnitude of a graphical time-height, as they represent the "faster growth".

Keywords: *Conceptual Change, Stability, Rate of Change, Speed, Rapidity.*

INTRODUCCIÓN

Esta investigación tiene como objetivo analizar la estabilidad y el cambio conceptual en estudiantes de bachillerato acerca de la idea de razón de cambio, a través de la puesta en práctica de una situación de aprendizaje.

De acuerdo con el currículo, las razones de cambio son estudiadas en México en el bachillerato en el curso de Cálculo Diferencial (Matemáticas IV) en el tratamiento del concepto de derivada (SEP, DGB, DCA, 2013: 24-26) y tiene como principal precedente al concepto de pendiente estudiado en el curso de Matemáticas III (Geometría Analítica) (DGB, DCA, 2013: 25-26). Por tanto, las investigaciones se han centrado en el papel de la razón de cambio en la construcción del concepto de derivada. En este sentido, Cortés (2006) reporta que es posible que los estudiantes la entiendan y la usen en la construcción de la función derivada. Sin embargo, Vrancken, Engler y Müller (2008) hallaron dificultades en el trabajo de los estudiantes al relacionar los registros de representación, cuando tratan con razones de cambio. Por otra parte, el uso de tecnología ha propiciado mejoras en el aprendizaje de la razón de cambio, según los reportes de Suh y Fulginiti (2011) quienes utilizando simulaciones reportan haber posibilitado la disipación de falsas ideas sobre la pendiente y tasa de cambio.

En algunos trabajos se advierten de las dificultades y concepciones alternativas que suscita la enseñanza y aprendizaje de la razón de cambio. Carlson, Jacobs, Larsen y Hsu (2002), Herbert y Pierce (2008), Thompson (1994), Ubuz (2007), y Wilhelm y Confrey (2003), reportaron que los estudiantes en los distintos niveles tienen dificultades para conceptualizar la idea de la tasa de cambio. Teuscher y Reys (2010) comentan que los estudiantes entienden los términos: pendiente, razón de cambio e inclinación, como tres conceptos diferentes e inconexos. Señalan además una falta de comprensión en la interpretación de tasas de cambio en estudiantes de Cálculo Avanzado; ellos pueden calcularlas en funciones lineales, pero no en funciones no lineales; lo mismo ocurrió al modelarla sobre una gráfica e interpretarla en un contexto del mundo real (Teuscher, Reys, 2012). Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) demostraron que las interpretaciones de los estudiantes acerca de la razón de cambio son confusas, a pesar de haber cursado y aprobado Cálculo Diferencial. Dolores (2004) descubre concepciones alternativas en estudiantes de bachillerato que obstaculizan el análisis del comportamiento de funciones y por ende la interpretación de la razón de cambio, estas concepciones alternativas son producto del escaso desarrollo del razonamiento covariacional sugerido por Carlson *et al.* (2002).

Por otro lado, Díaz (2013) revela que existe nula comprensión de la razón de cambio en profesores mexicanos de prescolar y primaria, y es poco significativo en los de secundaria. También en profesores y estudiantes de bachillerato Dolores *et al.* (2002) hallaron confusiones y concepciones alternativas: interpretan *mayor velocidad media* como la representación gráfica de la *ordenada de mayor altura*. Cuando hacen *estimaciones de la velocidad media* en una gráfica dan la magnitud de la ordenada. Asocian la velocidad negativa con una gráfica cuyas ordenadas son negativas, algo parecido ocurre cuando se pide a los estudiantes la menor rapidez media. Confusiones similares fueron detectados por Billings y Klanderman (2000) en futuros profesores norteamericanos: combinan las propiedades gráficas de la velocidad media con las de la velocidad instantánea, confunden distancia con la velocidad media, no se dan cuenta que la inclinación de una recta en una gráfica distancia *vs* tiempo implica velocidad.

Hoy día, las razones de cambio han cobrado importancia en la educación matemática, por la utilidad que proporcionan en la resolución de problemas de la vida real. Varios investigadores advierten la presencia de dificultades y la persistencia de concepciones alternativas, sin embargo, pocas investigaciones se hacen en México y en el salón de clase para estudiarlas. Por eso en este trabajo la pregunta de investigación se centra en indagar:

¿Qué cambios conceptuales o estabilizaciones se producen en estudiantes de bachillerato respecto de la idea de razón de cambio, si son instruidos a través de una secuencia de aprendizaje diseñada ex profeso?

MARCO CONCEPTUAL: LA RAZÓN DE CAMBIO Y EL CAMBIO CONCEPTUAL

La **razón de cambio** se define como el cociente de diferencias: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, donde $y = f(x)$. Δx representa lo que cambia x de x_1 a x_2, que se cuantifica mediante la diferencia: $\Delta x = x_2 - x_1$ y Δy los cambios en $f(x)$ que se cuantifican también con las diferencias: $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ (Stewart, 2012: 147-148). En términos geométricos la razón de cambio se interpreta como la pendiente de la recta secante a la curva f que corta a ésta en los puntos P y Q (Figura 1). Pendiente, velocidad y rapidez son conceptos estrechamente vinculados, se consideran como casos particulares de razones de cambio. La velocidad (Figura 2) es una razón de cambio de distancia sobre el cambio en el tiempo, la rapidez es un caso particular de la velocidad que admite sólo valores positivos.

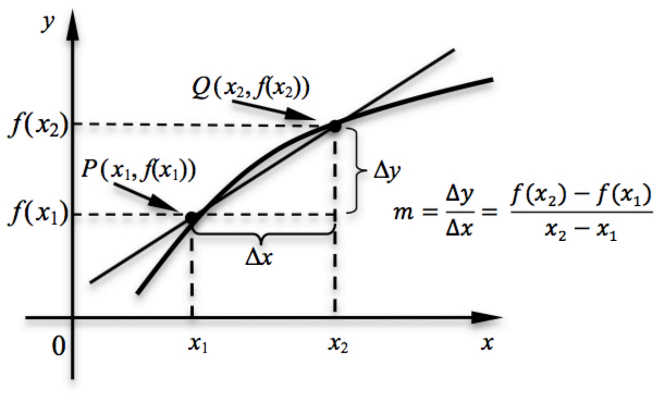
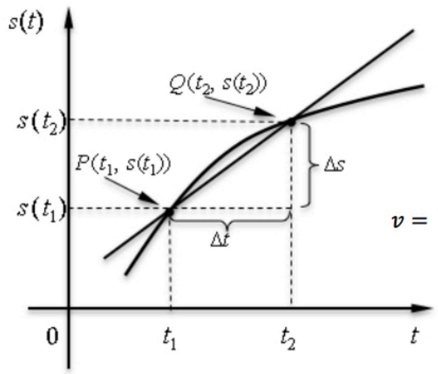


Figura 1. Razón de cambio promedio, como pendiente de la secante PQ.



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Figura 2. Velocidad promedio.

El cambio conceptual. En el campo educativo el cambio conceptual ha sido estudiado principalmente en las ciencias naturales y relativamente poco en educación matemática. Sin embargo, la enseñanza deliberadamente pretende producir aprendizaje, independientemente de la disciplina o asignatura de la que se trate. Por eso se ha acuñado el término *cambio conceptual intencional*, el cual se define como el intento deliberado de una persona por lograr un cambio radical de un sistema conceptual a otro porque son seducidos por el poder de ese nuevo sistema conceptual, o porque perciben algún defecto profundo en su visión actual (Ferrari y Elik, 2003).

Una concepción tiene cierto estatus en una persona, caracterizado por la inteligibilidad, plausibilidad y utilidad, pero cuando esa persona adquiere un nuevo conocimiento, este puede entrar en contradicción con alguna concepción que ya tiene en su estructura mental. Su aceptación requiere, que el estatus de la nueva concepción crezca y que disminuya el de la antigua (Carrascosa, 2005). Es posible que la concepción que tenga una persona pueda desencadenar en conceptos erróneos, los cuales deben ser *cambiados* en alguna forma, pero pocos han sido los estudios ocupados por provocar un cambio de concepciones en los estudiantes (Bostan, 2016), sobre todo, en el campo de la educación matemática.

El aprendizaje visto como un proceso de cambio conceptual es una perspectiva que ha tenido un gran impacto (Canedo-Ibarra, Castelló-Escandell, García-Wehrle, Gómez-Galindo y Morales-Blake, 2012). Este constructo teórico ha sido entendido, desde posturas muy radicales hasta posturas más ligeras. Bostan (2016) plantea que el cambio conceptual se puede lograr de dos maneras: espontánea, donde las ideas de los estudiantes pueden acercarse hacia el conocimiento científico sin interferencia y, como un cambio conceptual propiciado por la enseñanza en las ideas de los alumnos para acercarlas al conocimiento científico. Las posturas radicales del cambio conceptual plantean modificaciones en teorías análogas a las revoluciones científicas, en este trabajo no se aspira a tanto, utilizamos este marco para explicar los cambios de algunas concepciones entre las cuales se encuentran las concepciones alternativas. Éstas, difieren del conocimiento que se propone sea aprendido (Mevarech, Kramarsky, 1997) y, por tanto, difiere del aceptado en la matemática. Por ello, con frecuencia, algunos conocimientos de los estudiantes son incompatibles con las nociones matemáticas que se desean adquirir, lo cual limita su comprensión (Tirosh y Tsamir, 2004). De ahí la necesidad de cambiarlas. Canedo-Ibarra *et al.* (2012) consideran que éste es un proceso en el que los alumnos reorganizan sus conocimientos con el objeto de comprender los conceptos y los procesos de la ciencia de forma cada vez más completa.

MÉTODO

Este trabajo es de naturaleza interventiva en el aula de matemáticas y comprende desde el diseño, la aplicación hasta la valoración. Es de naturaleza cualitativa ya que utilizamos algunos aspectos del experimento de enseñanza planteado por Steffe y Thompson (2000), en virtud de que nos interesa comprender el progreso cualitativo de los estudiantes respecto de sus concepciones.

Diseño. Para dar alcance al objetivo, se diseñó una secuencia de aprendizaje para ser aplicada en el salón de clase. Secuencia asumida en el sentido expresado por Tobón, Pimienta y García (2010, p. 20) y Díaz Barriga (2013), como "un conjunto articulado de actividades de aprendizaje y evaluación con la mediación de un docente que buscan la consecución de determinadas metas". Se estructuró en tres fases: Apertura, Desarrollo y Cierre.

La fase de Apertura tuvo como objetivo familiarizar a los estudiantes con los fenómenos y procesos básicos de la variación. Incluye el estudio de situaciones de variación elementales, de las cuales se obtienen los conceptos de variable y función. La conexión entre sus expresiones analíticas, representaciones gráficas, numéricas y verbales, son utilizadas para estudiar los procesos de variación y cambio.

La fase de Desarrollo, se centra en la formación del concepto de razón de cambio.[4] Se parte de la cuantificación del cambio, por medio de diferencias [$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$], que emergen del estudio de situaciones de variación. Las diferencias son los elementos matemáticos centrales en torno de las cuales se organiza la formación del concepto en cuestión. En principio se analizan los cambios y su relación de dependencia, luego se estudian los cambios relativos particulares como la rapidez y la velocidad media, hasta llegar a una conceptualización general de la razón de cambio.

La fase de Cierre, tiene como objetivo la ampliación y generalización de las propiedades de la razón de cambio. Por una parte, se trabaja en diferentes contextos para lograr su ampliación y por otra, se estudian sus propiedades en relación con el comportamiento de las funciones. Estas se centran en el estudio de las relaciones existentes entre función: creciente, decreciente o constante y el signo de sus razones de cambio.

Las actividades de aprendizaje fueron diseñadas utilizando los registros de representación semiótica: verbal, numérico, gráfico y analítico. Propiciando siempre el tránsito entre ellos y poniendo en tela de discusión las ideas previas de los estudiantes y sus concepciones alternativas. Los métodos más utilizados fueron el expositivo, de trabajo independiente y de elaboración conjunta, sugeridos en Ballester *et al.* (2000: 168-178). En el primero, juega un papel importante la actividad informativa del profesor, así como su dirección en la actividad cognoscitiva de los estudiantes. En el segundo, el profesor propició que los alumnos realizaran las actividades de forma más o menos independiente. En el tercero, se utiliza con frecuencia la conversación o diálogo, definido como un proceso de pensamiento colectivo, destacando así la participación del profesor y los alumnos en la adquisición de conocimientos, mediante el papel dirigente del primero de forma inquisitiva, que exige una respuesta por parte de los alumnos. Los criterios de evaluación utilizados fueron principalmente: realización de las actividades, trabajo en equipo e individual, argumentación de ideas y resultados, comunicación correcta de sus ideas de forma oral y escrita y, asistencia oportuna a las sesiones.

Aplicación. La secuencia de aprendizaje se llevó a la práctica en 10 sesiones de dos horas, tres veces por semana, una sesión por día. Se realizó en

[4] Los términos razón de cambio y razón de cambio promedio son utilizados en este artículo indistintamente, de igual manera se utilizan los términos velocidad promedio, velocidad media o velocidad. Igual trato recibe el término rapidez.

condiciones escolares ordinarias en las que participaron 24 estudiantes (de 16 a 17 años de edad) del cuarto semestre de una escuela de bachillerato tecnológico ubicada en una comunidad rural de la región centro del estado de Guerrero. Las sesiones fueron dirigidas por el profesor titular auxiliado por los investigadores. La metodología de enseñanza utilizada procuró mantener en actividad continua a los estudiantes favoreciendo la realización conjunta o individual de las actividades planteadas en las lecciones. Se proporcionó a todos los estudiantes el texto de Dolores (2013) que fue material de uso obligatorio. El papel del profesor fue de guía; los estudiantes realizaban y discutían las actividades de las lecciones propuestas, posteriormente participaban voluntariamente dando a conocer los resultados. Las presentaciones de los estudiantes fueron discutidas y revisadas por el resto del grupo, al final el profesor buscaba la elaboración de consensos acerca de la realización de las actividades.

Evaluación. Para la valoración de resultados de la puesta en práctica de la secuencia de aprendizaje se utilizó el método pre - post test (Hernández, Fernández-Collado y Baptista, 2006, p. 187), cuyo diseño consiste en aplicar una prueba previa al estímulo o tratamiento experimental y, después de la intervención se aplica la misma prueba (cuestionario en nuestro caso) para medir los cambios conceptuales o en su defecto, identificar los casos en que existe estabilidad en las concepciones de los participantes sobre la idea de razón de cambio. El hecho de utilizar el mismo cuestionario como pre y post-test permitiría identificar con mayor claridad qué ideas cambian y cuáles permanecen después de poner en escena la secuencia de aprendizaje.

El pre y el post-test (que son en realidad el mismo cuestionario) se estructuró de 8 situaciones, en tres ellas se desprenden varias preguntas. Cada pregunta tiene como objetivo explorar concepciones específicas asociadas a la razón de cambio como: velocidad, rapidez o la razón de cambio propiamente dicha. En la situación 1 (P1) se explora el cálculo numérico de la razón de cambio (velocidad). En la situación 2 (P2) se explora cómo el estudiante estima la velocidad a partir del análisis de la gráfica distancia que modela cierto fenómeno; se pide estimar la velocidad (diferente de cero) en un intervalo (P2A) y en un intervalo donde la velocidad es cero (P2B). En P3 se indaga la identificación de la mejor representación algebraica de las razones de cambio. En la situación P4 se pide analizar, a partir de la representación gráfica, la razón de cambio en un contexto particular (el caso de un corredor): se pide indicar dónde lleva una velocidad de 0.5 m/s (P4A) y el intervalo donde su razón de cambio es cero (P4B). En P5 se requiere de interpretar la razón de cambio en una situación concreta de variación de estaturas, se cuestiona sobre la mayor rapidez de crecimiento (P5A y P5B) y, sobre la estimación de la rapidez en cierto intervalo (5C, 5D). Mediante P6 se examina la resolución de un problema rutinario referido a la obtención de la velocidad en un intervalo de tiempo. A través de P7 se analiza la relación de generalización entre la razón de cambio positiva, la función positiva y el crecimiento de las funciones. En P8 se explora la resolución de un problema no rutinario que requiere del cambio de la razón de cambio: de la rapidez de vaciado a la rapidez de descenso de la altura de una alberca (ver Anexo A).

La evaluación de los resultados se llevó a cabo mediante los siguientes procedimientos: las respuestas fueron extraídas de ambos test, escaneadas y almacenadas en una matriz en Excel de respuestas *vs* estudiantes. Mediante el método de Análisis del Contenido (Bardin, 2002, p. 87) fueron analizadas las producciones de los estudiantes al realizar las actividades solicitadas en el pre test (aplicado antes de la intervención docente) y en el post-test (aplicado después de poner en escena la secuencia de aprendizaje).

RESULTADOS OBTENIDOS EN EL PRE-TEST

Cálculo numérico de la velocidad (P1). Más de la mitad de los estudiantes consideran que con la expresión: $v = d/t$ (o una variante de esta: $v = 3^2/2$) pueden calcular la velocidad media, arguyendo que únicamente "se trata de sustituir valores", un tercio indica que se puede calcular "sustituyendo los dos valores del tiempo en la fórmula $5t^2$" y calculando la diferencias (Tabla 1). Ninguno optó por el cociente de las diferencias presentes en el inciso c, en cambio tres lo hicieron por el cociente de diferencias señaladas en el inciso e.

Tabla 1. Cálculos numéricos propuestos por los estudiantes.

Opciones	a) $v = d/t$	d) $v = 5(2)^2 - 5(3)^2$	e) $v = \frac{5(2)^2 - 5(3)^2}{3-2}$	b) $v = 5(3)^2/2$	c) $v = \frac{5(3)^2 - 5(2)^2}{3-2}$
Frecuencia	11	8	3	2	0

Estimación de la velocidad positiva en una gráfica (P2A). Prácticamente todos los estudiantes utilizan la fórmula: $v = d/t$. Más de la mitad operan con las abscisas u ordenadas de los puntos involucrados para hacer la estimación.

Algunos dividen la ordenada entre la abscisa de B, es decir: $v = \frac{4}{3} = 1.33$, otros hacen lo mismo, pero con las coordenadas de A, v = 0.5, dos estudiantes utilizaron estos resultados y los restaron, $v = 1.33 - 0.5 = 0.83$; otros dos estudiantes dividen la abscisa de B entre la abscisa de A, $v = 3/2 = 1.5$; otro divide la ordenada de B entre la abscisa de A, $v = 4/2 = 2$; finalmente, un estudiante se queda con el valor de la ordenada de B (Tabla 2), argumentando que "recorren 4 en 1 minuto". Nueve estudiantes utilizaron la fórmula de la velocidad para dar la velocidad media: $v = 3/1$, resultado que es aceptable; solamente uno de ellos argumentó su respuesta explicando "utilicé las diferencias de distancia y tiempo".

Tabla 2. Estimación de la velocidad positiva en un intervalo de tiempo.

Respuestas	3/1	4/3 = 1.33	0.5	1.5	1.33 − 0.5 = 0.83	4/2 = 2	0.33	4
Frecuencia	9	5	3	2	2	1	1	1

Estimación de la velocidad en una sección horizontal de la gráfica (P2B). Nuevamente los estudiantes tienden a operar con las coordenadas de los puntos involucrados tomando como referente la fórmula: $v = d/t$. Once dividieron la ordenada entre la abscisa del punto D: $v = 5/7 = 0.714$; cuatro hicieron los mismo con las coordenadas de C: $v = 5/4 = 1.25$, además efectuaron la resta con ambos resultados: $v = 1.25 - 0.71 = 0.54$ (Tabla 3). Dos estudiantes dieron como respuesta: $v = 1.5$, procediendo así: $v = (7 - 4)/2 = 1.5$, utilizando la idea de media aritmética, argumentaron "avanza tres y su media es 1.5". Un estudiante la calculó de la siguiente manera: $v = 5/(7 - 4) = 1.66$, nótese que utilizó la diferencia en el tiempo. Seis estudiantes dieron la respuesta correcta, $v = 0$, sólo uno de ellos utilizó la razón de diferencias: $v = \frac{d}{t} = \frac{5-5}{4-4} = \frac{0}{0} = 0$, otro estudiante de este grupo argumentó que "la velocidad es la misma ya que del punto C al D no presenta cambios, es cero".

Tabla 3. Estimación de la velocidad cero.

Respuestas	$v = 5/7 = 0.714$	0	$v = 1.25 - 0.71 = 0.54$	$v = (7 - 4)/2 = 1.5$	$v = 5/(7-4)$ 1.66
Frecuencia	11	6	4	2	1

Identificación de las mejores representaciones de razones de cambio (P3). La fórmula tradicional de la velocidad tuvo 21 elecciones, la del cociente de incrementos 13, la de la pendiente tuvo seis elecciones, por la expresión: 100 km/h, seis estudiantes lo hicieron (Tabla 4). Puede apreciarse la fuerte predilección por la fórmula tradicional de la velocidad que se utiliza en la escuela secundaria. Sin embargo, es significativa la cantidad de estudiantes que se inclinan por el cociente de incrementos y no es despreciable quienes también lo hacen por la fórmula de la pendiente.

Tabla 4. Expresiones que mejor representan las razones de cambio.

Opciones	a) $v = \frac{d}{t}$	e) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	f) v = 100 km/h	d) $v = \frac{1}{2}$	b) $A = \pi r^2$
Frecuencia	21	13	6	6	3	2

Análisis de la representación gráfica para la velocidad de 0.5 m/s (P4A). Catorce estudiantes colorean la recta AB, uno la recta DE, cinco todos los intervalos y cuatro no contestaron (Tabla 5). Ninguno colorea el intervalo correspondiente a la recta BC. La marcada preferencia por el segmento AB se debe a la contigüidad que el segmento tiene con el origen, sugiriendo con ello que su valor (0.5 m/s) está cercano al cero del origen. Se percibe una concepción de velocidad asociada a puntos o valores de la recta real y no como pendiente, inclinación o razón de cambio.

Tabla 5. Análisis de la representación gráfica de la velocidad.

Opciones	(A, B)	Todos	No contestó	(D, E)	(B, C)	(C, D)
Frecuencia	14	5	4	1	0	0

Análisis de la representación gráfica para la razón de cambio "cero" (P4B). Ocho estudiantes contestaron que en el punto A la velocidad es cero m/s, argumentando "porque es el punto de inicio", siete contestaron que en la sección (A, B) (ver Tabla 6). Estos dos grupos de estudiantes que constituyen más de la mitad del grupo, hacen esta elección porque (similar a la anterior concepción) asocian el valor cero con el origen. Seis contestaron que en el intervalo (C, D) utilizando argumentos tales como: "ahí su cambio es cero porque no tuvo movilidad", "la distancia está en 30 metros, sólo el tiempo sigue avanzando", "porque en 10 segundos no recorrió distancia alguna".

Tabla 6. Análisis de la representación gráfica de la razón de cambio "cero"

Respuestas	A	(A, B)	(C, D)	No contestó
Frecuencia	8	7	6	3

Interpretación de la mayor rapidez (mujeres respecto de los hombres) (P5A). Más de la mitad de los estudiantes contestaron que de los 10 a los 13 años (Tabla 7), argumentando que "la gráfica se va hacia arriba"; tres que de los 11 a los 12 años, de los cuales sólo uno argumentó: "porque la gráfica se muestra más elevada"; cuatro respondieron que, a los 12 años, con argumentos como: "porque la gráfica está más cerca a los 160 cm que la de los chicos", "porque la línea de las mujeres está por encima que la de los hombres".

Tabla 7. Interpretación de la mayor rapidez (mujeres respecto de hombres)

Repuestas	(10, 13)	12	(11, 12)	(13, 15)	20
Frecuencia	15	4	3	1	1

Interpretación de la mayor rapidez (hombres respecto de las mujeres) (P5B). Aquí las respuestas son similares a las dadas a la pregunta anterior. Quince estudiantes refieren que hay mayor rapidez en cuanto a crecimiento de hombres respecto de las mujeres de los 13 a los 20 años de edad (Tabla 8), solamente dos de ellos argumentaron así: "porque la gráfica de los chicos está por encima del de las chicas", cinco sugieren el intervalo de los 14 a 20 años, sólo uno argumentó que "la gráfica está encima". Dos respondieron que de los 0 a los 10 y de los 13 a los 20 años, dieron argumentos similares al anterior. Los restantes eligen los intervalos de 13 a 15 y de 0 a 10, intervalos en donde las ordenadas de gráfica de las chicas son mayores que la de los chicos.

Tabla 8. Interpretación de la mayor rapidez (hombres respecto de mujeres)

Respuestas	(13, 20)	(14, 20)	(0, 10) y (13, 20)	(0, 10)	(13, 15)
Frecuencia	15	5	2	1	1

Estimación de la rapidez (el caso de los hombres) (P5C). Trece estudiantes contestan que los chicos crecen 6 cm por año; cuatro, que 13 cm en 2 años; dos, que 15 cm en dos años; uno, que 7 cm por año (Tabla 9). No hubo argumentos a las respuestas. Cuatro no contestaron.

Tabla 9. Estimación de la rapidez (crecimiento de hombres)

Respuestas	6 por año	6.5 cm/año	NC	15 x 2 años	7 cm/año
Frecuencia	13	4	4	2	1

Estimación de la rapidez (el caso de las mujeres) (P5D). Siete sólo argumentaron "las chicas están más lentas que los chicos" y no hicieron estimaciones; tres respondieron que "la rapidez es constante" y no presentaron cálculo alguno. Tres no contestaron, diez estudiantes hicieron estimaciones aceptables: seis 2 cm/año; dos 1.5 cm/año y, otros dos 2.5 cm/año (Tabla 10).

Tabla 10. Estimación de la rapidez (crecimiento de mujeres)

Respuestas	"Chicas más lentas que los chicos"	2 cm/año	Conste.	NC	1.5 cm/año	2.5 cm/año	1.7 cm/año
Frecuencia	7	6	3	3	2	2	1

Resolución de problemas. El caso de la velocidad de un cuerpo lanzado hacia arriba (P6). La mitad de los estudiantes no dieron solución. Siete dieron como respuesta: $v = 5$ m/s, que obtuvieron mediante la evaluación para $t = 1$ y $t = 2$ en $s(t)$ y calculando la diferencia, los restantes hicieron cálculos como este: $v = 20(1) - 5(2)2 = 20(1) - 5(4) = 20 - 20 = 0$ (Tabla 11).

Tabla 11. Velocidad de un cuerpo lanzado hacia arriba.

Respuestas	NC	5 m/s	-3	0	375 m/s
Frecuencia	12	7	2	2	1

Relación entre la razón de cambio positiva y el comportamiento de la función (P7). Si las razones de cambio son positivas: para once estudiantes $f(x) > 0$, para ocho $f(x) = 0$, para cuatro la función decrece, para igual número no crece ni decrece, sólo dos estudiantes consideran que la función es creciente (Tabla 12).

Tabla 12. Signo de la razón en relación con el comportamiento de funciones

Opciones	a) $f > 0$	d) $f(x) = 0$	e) f decrece	f) f no crece ni decrece	c) f crece	b) $f < 0$	g) f tiene máximo
Frecuencia	11	8	4	4	2	0	0

Resolución de un problema no rutinario que implica cambio de variable (P8). Para el caso del problema de la alberca que se está vaciando, trece estudiantes sólo calcularon su volumen, nueve dieron como solución la misma rapidez que fue dada como dato (Tabla 13). No se dieron cuenta que, lo que se pedía era la rapidez con que desciende la altura del nivel del agua. En cuatro estudiantes se detectaron manifestaciones de pensamiento proporcional ya que describieron la razón a la que sale el agua en tiempos cada vez crecientes: en 1 minuto salen 0.25 m^3, en 4 minutos 1 m^3, en 40 minutos salen 10 m^3, en 60 minutos salen 15 m^3, dando este último como solución.

Tabla 13. Resolución de un problema no rutinario

Respuestas	Vol.	r = 0.25 m^3/min	NC	r = 15 cm^3 / h	r = 2.1
Frecuencia	13	9	4	3	0

RESULTADOS OBTENIDOS EN EL POST-TEST

Cálculo numérico de la velocidad (P1). Todos los participantes consideran que con la expresión: $v = \frac{5(3)^2 - 5(2)^2}{3-2}$, pueden calcular la velocidad solicitada.

Estimación de la velocidad positiva en una gráfica (P2A). Los veinticuatro estudiantes utilizan las diferencias para calcular la velocidad promedio, así: $v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{4-1}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$. Cinco se auxilian de los cálculos numéricos de las diferencias: $\Delta d = d_f - d_i$ y $\Delta t = t_f - t_i$, seis utilizan triángulos característicos de catetos Δd y Δt, uno se auxilia del registro numérico y geométrico, el resto se atiene sólo a la visualización de la gráfica.

Estimación de la velocidad en una sección horizontal de la gráfica (P2B). Todos los estudiantes la calcularon utilizando la razón de las diferencias: $v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{5-5}{7-4} = \frac{0}{3} = 0$. Esgrimieron argumentos tales como: "no hay cambios en la velocidad, sólo en tiempo", "no cambia la distancia, cambia sólo en t", "no existe ningún cambio"; "no avanza en su movimiento, entonces su velocidad es 0".

Identificación de las mejores representaciones de razones de cambio (P3). Todos seleccionaron la fórmula de la pendiente, aunque todavía 17 eligieron la fórmula elemental de la velocidad, una evidencia que refuerza esta elección es que prácticamente todos eligieron la expresión v = 1/2. Llama la atención que nadie eligió la fórmula de la velocidad como cociente de incrementos (Tabla 14).

Tabla 14. Expresiones que mejor representan razones de cambio

Opciones	c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	d) $v = \frac{1}{2}$	a) $v = \frac{d}{t}$	b) $A = \pi r^2$	f) v = 100 km/h	e) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
Frecuencia	24	22	17	5	1	0

Análisis de la representación gráfica para la velocidad 0.5m/s (P4A). Los veinticuatro estudiantes colorearon la recta BC que viene siendo la hipotenusa del triángulo característico, además colorearon los catetos que representan el incremento de distancia (Δs) y tiempo (Δt). Esto indica la utilización por parte de los estudiantes de la idea del desplazamiento vertical sobre el desplazamiento horizontal, la concepción "rise over run" sugerida por Moore-Russo (2012) como una concepción geométrica de la pendiente. Por otra parte, el señalar la hipotenusa indica la persistencia de asociar a su magnitud como indicador de la velocidad.

Análisis de la representación gráfica para la razón de cambio "cero" (P4B). Veintitrés estudiantes contestan que en el segmento CD la velocidad es cero, utilizando cálculos del estilo: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d_f - d_i}{t_f - t_i} = \frac{30-30}{40-30} = \frac{0}{10} = 0$. Esgrimieron argumentos tales como: “porque no hay cambios en la distancia sólo en el tiempo”, “porque se mantiene, es lo mismo”, “porque su razón de cambio es cero”, “porque es constante, no sube, se mantiene”, “avanza en *x*, pero se mantiene en *y*”, “porque no mostró ningún cambio”. Alguien contestó que en el punto A(0,0) argumentando: “porque es su punto de partida”, idea detectada en el pre-test. Esta evidencia da cuenta de la existencia de estabilidad conceptual, en virtud de que tal concepción sigue sin cambio, este estudiante la tenía al principio y la mantiene al final de la experiencia.

Interpretación de la mayor rapidez (mujeres respecto de los hombres) (P5A). Los veinticuatro estudiantes contestan que de los 10 a 13 años las mujeres crecen más rápido, uno de ellos argumenta su respuesta escribiendo: $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{160-145}{13-10}=\frac{15}{3}=5$, mientras que catorce argumentan que “su gráfica está por encima de la de los chicos”, sólo uno sugiere cierta idea de inclinación argumentado “porque allí la línea es más vertical”. A pesar de que todos los participantes dan respuestas correctas, éstos sólo se atienen a la magnitud de las ordenadas para determinar la mayor rapidez.

Interpretación de la mayor rapidez (hombres respecto de las mujeres) (P5B). Todos los estudiantes dan intervalos en donde la gráfica de la estatura de los chicos tiene ordenadas mayores que la gráfica de las chicas (Tabla 15). Catorce argumentan que “la gráfica pasa por encima”, uno dio este argumento numérico “$r=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{185-160}{20-13}=\frac{25}{7}=3.6$”. Alguien elige el intervalo de 13 a 15 arguyendo que “allí es más vertical” sugiriendo con ello que la inclinación de una es mayor que la otra, solamente uno compara los incrementos de estatura para decidir sugiriendo que de 13 a 20 años los chicos crecen 25 cm y las chicas 12 cm.

Tabla 15. Interpretación de la mayor rapidez (hombres respecto de mujeres)

Respuestas	(14, 20)	(0, 10)	(0, 10) y (13, 20)	(13, 20)	(13, 15)
Frecuencia	9	7	6	2	1

Estimación de la rapidez (el caso de los hombres) (P5C). Todas las estimaciones que hicieron los estudiantes son aceptables, diecisiete la estimaron en 6.5 cm por año y siete, en 7 cm por año (Tabla 16). Para el primer caso el aumento de estatura lo estimaron en 13 cm, en el segundo 14 cm, por eso sus cálculos fueron 13/2 y 14/ 2, respectivamente. Algunos hicieron el cálculo numérico así: "$r = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{174-160}{15-13} = \frac{14}{2} = 7$", otros se atuvieron a la estimación por visualización.

Tabla 16. Estimación de la rapidez (hombres)

Respuestas	6.5 cm/año	7 cm/año	6 por año	15 x 2 años
Frecuencia	17	7	0	0

Estimación de la rapidez (el caso de las mujeres) (P5D). También en esta pregunta casi todos los estudiantes hacen estimaciones aceptables. Más de la mitad la estiman en 2.5 cm por año y un tercio en 2 cm por año. La mayoría se atiene a las estimaciones visuales, 5 cm crecieron en 2 años y en el otro caso 4 cm crecieron en ese mismo intervalo de tiempo (Tabla 17). Incluso algunos pocos hicieron cálculos numéricos mediante diferencias: $r = (165 - 160)/(15 - 13) = 5/2 = 2.5$ cm/años.

Tabla 17. Estimación de la rapidez (mujeres)

Respuestas	2.5 cm/año	2 cm/año	1.5 cm/año
Frecuencia	14	9	1

Resolución de problemas, el caso de velocidad de un cuerpo impulsado (P6). Todos los estudiantes dieron como solución: $v = 5$ m/s, para llegar a este resultado utilizaron el cociente de las diferencias: $v = \Delta y/\Delta x$ (Figura 3). Los resultados son muestra de que el total de estudiantes, al finalizar la intervención, pueden resolver un problema rutinario en el que se necesita calcular la velocidad en un intervalo dado, utilizando la fórmula del cociente de diferencias.

Relación entre la razón de cambio positiva y el comportamiento de la función (P7). Para casi todos los estudiantes es cierto que: si la razón de cambio es positiva entonces la función es positiva y además creciente (Tabla 18). Esta relación es verdadera, aunque no del todo. Es decir, una función puede tener

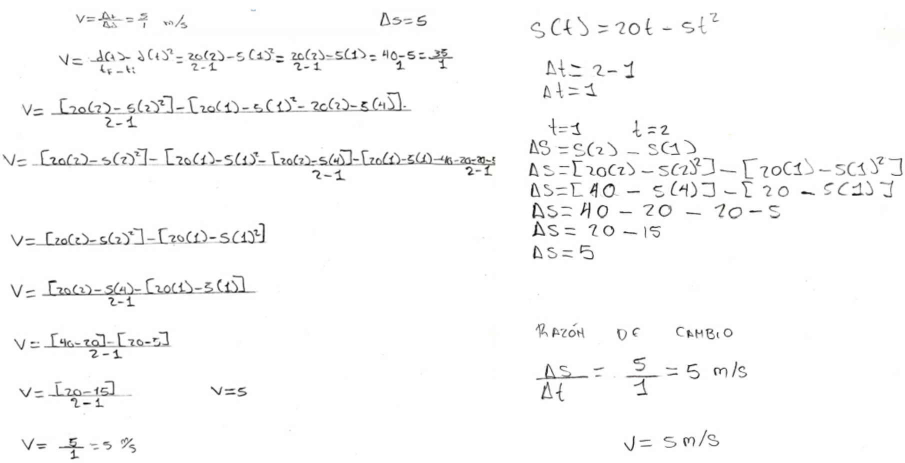


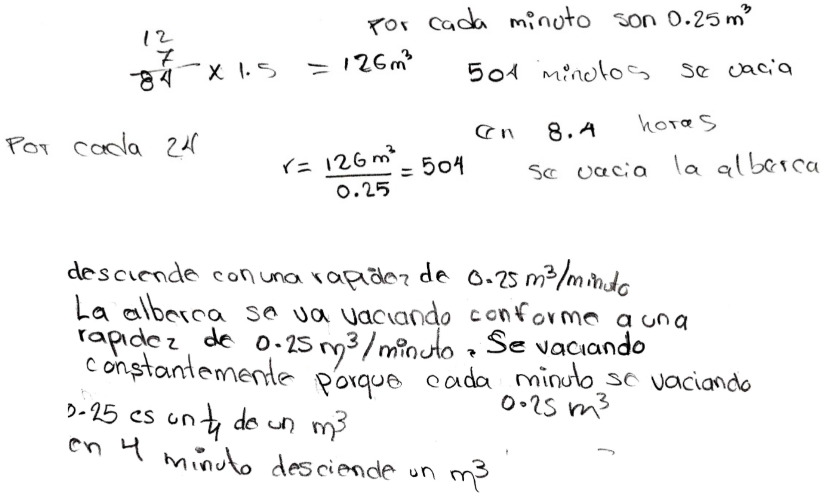
Figura 3. Soluciones dadas al problema de la velocidad de un cuerpo impulsado.

ordenadas negativas, pero ser creciente, es decir puede ser: $f(x) < 0$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, por ejemplo, $f(x) = x^3$ tiene ordenadas negativas para $x < 0$ y, allí sus razones de cambio son positivas. Sin embargo, estas finezas todavía no son percibidas por los estudiantes en el post-test.

Tabla 18. Signo de la razón en relación con el comportamiento de funciones

Opciones	a) $f > 0$	e) f crece	b) $f < 0$	c) f decrece	d) $f(x) = 0$	f) f no crece ni decrece	g) f tiene máximo
Frecuencia	24	21	0	0	0	0	0

Resolución de un problema no rutinario que implica cambio de variable (P8). Siete estudiantes calculan el volumen de la alberca (126 m^3), la dividen entre la rapidez a la que se vacía obteniendo 504 minutos como el tiempo de vaciado (Figura 4). Cuatro únicamente calculan el volumen de la alberca, otra cantidad igual hace uso de la idea de proporcionalidad partiendo del dato dado de la rapidez a la que se vacía la alberca: en un minuto salen 0.25 m^3, en 4 min sale 1 m^3, en 8 salen 2 m^3, etc., sin llegar a agotar el volumen total (Figura 4). Ninguno atendió al cambio de variable. Se pedía la rapidez de la altura del nivel del agua y no la rapidez con que sale cierto volumen de agua. Sin embargo, los primeros siete estudiantes hacen un cálculo aceptable del tiempo de vaciado, resolviendo parcialmente con ello el problema planteado.


12
7
84 x 1.5 = 126m³
Por cada minuto son 0.25 m³
504 minutos se vacia
en 8.4 horas
se vacia la alberca
Por cada 24
r = 126 m³ / 0.25 = 504

desciende con una rapidez de 0.25 m³/minuto
La alberca se va vaciando conforme a una rapidez de 0.25 m³/minuto. Se vaciando constantemente porque cada minuto se vaciando 0.25 m³
0.25 es un 1/4 de un m³
en 4 minuto desciende un m³

Figura 4. Solución al problema de cambio de variable.

DISCUSIÓN

Cálculo numérico de la velocidad (P1). En el pre-test más de la mitad de los estudiantes son partidarios de la fórmula elemental de la velocidad, en cambio en el post-test todos consideran que con la expresión: $v = \frac{5(3)^2 - 5(2)^2}{3-2}$, tal cálculo puede ser obtenido. Esto indica un cambio conceptual que va, por un lado, de la aceptación de $v = \Delta s/\Delta t$ en lugar de $v = d/t$, y por otro, de la aceptación de las diferencias como operaciones particulares para poder calcular los "aumentos o disminuciones" de las variables en lugar de simplemente las d o las t como valores fijos. Tal parece que la tendencia de considerar la relación física $v = d/t$ para resolver problemas de velocidades medias es usual hasta con futuros profesores de matemáticas, según indican Pino-Fan, Godino y Font (2015), sin embargo, el cambio puede ser posible según nuestros resultados.

Estimación de la velocidad positiva en una gráfica (P2A). En el pre-test casi todos los estudiantes utilizan la fórmula: $v = d/t$ y operan con ella, dividiendo ordenadas entre abscisas de los puntos involucrados (Figura 5). En contraste, en el post-test todos hacen una estimación correcta (Figura 6). La mitad utiliza el cociente de diferencias, una cuarta parte se auxilia de los triángulos característicos, el resto se atiene sólo a la visualización de la gráfica. El cambio conceptual se nota en que, relegan la utilización de la fórmula elemental de la velocidad y ahora utilizan la idea "rise over run" representando los desplazamientos verticales en relación a los horizontales.

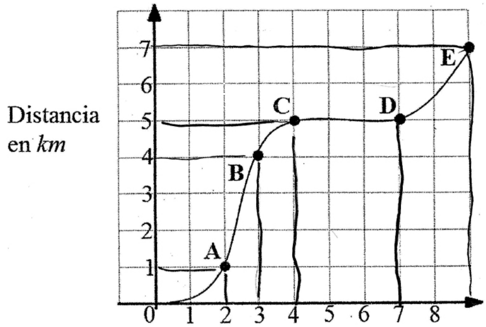


Figura 5. Velocidad, representación gráfica en pre-test.

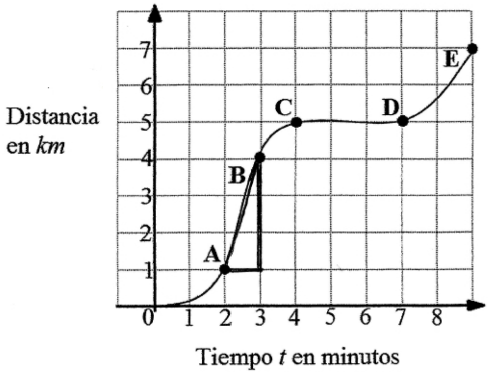


Figura 6. Velocidad, representación gráfica en post-test.

Estimación de la velocidad en una sección horizontal de la gráfica (P2B). Similar que, en la cuestión anterior, en el pre-test las ¾ partes de los estudiantes utilizan $v = d/t$, dividiendo las ordenadas entre las abscisas de los puntos. Sólo 1/3 de los estudiantes contestaron que allí la velocidad es cero. En cambio, en el post-test todos hacen una estimación correcta, la mitad de ellos utiliza el cociente: $v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{5-5}{7-4} = \frac{0}{3} = 0$, el resto toma en cuenta la visualización y dan argumentos como "no existe cambio", "no avanza", refiriéndose a la distancia y aceptando que el tiempo sigue avanzando. El cambio conceptual operó, por un lado, en la aceptación del uso del cociente de las diferencias para estimar la velocidad (aún en este caso especial) y el desplazamiento del uso de la fórmula elemental de velocidad y la consiguiente operatoria con las coordenadas y, por otro lado, en la inclusión de la idea "rise over run", aunque el tiempo avanza "no hay cambio" en la distancia.

Identificación de las mejores representaciones de razones de cambio (P3). Aquí los cambios conceptuales son también notorios. En el pre-test, más de las ¾ partes del grupo prefiere la expresión: $v = d/t$, poco más de la mitad el cociente de incrementos, la cuarta parte prefiere a m. En el post-test todos eligen la fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, que denota la *razón algebraica* de la pendiente (Moore-Russo, 2012) o bien un caso particular de ella ($m = \frac{1}{2}$), aunque casi las ¾ partes siguen seleccionando $v = d/t$. Este cambio también es indicativo de la aceptación tácita de que la pendiente y la razón de cambio son conceptos idénticos. Además, este resultado es consistente con el obtenido en P1; cuando se trata de los procedimientos para el cálculo de la velocidad, los estudiantes eligen: $v = \frac{5(3)^2 - 5(2)^2}{3-2}$, y para la mejor representación de razones de cambio eligen: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Tal elección se debe al isomorfismo de la estructura sintáctica que guardan las fórmulas de v y m.

Análisis de la representación gráfica de la velocidad de 0.5 m/s (P4A). Aquí también el cambio conceptual es evidente. En el pre-test las ¾ partes señalan la recta AB que parte del origen (Figura 7) relacionando este hecho con el valor numérico de la velocidad solicitada (0.5 m/s). En el post-test construyen un triángulo, señalan la hipotenusa BC y añaden sus catetos $\Delta x = 10$ y $\Delta y = 20$ (Figura 8). Producciones que son aceptables.

El cambio conceptual observado radica en la transición de la concepción de la velocidad asociada a un valor puntual (0.5 está cercano a cero) a la concepción de *razón geométrica* sugerida por Moore-Russo, Conner y Rugg (2011), esto último se observa en la utilización de la idea “lo que avanza en *t* y lo que sube en *d*”. Sin embargo, no lo es en cuanto a la interpretación de la velocidad. Las $3/4$ partes del grupo siguen dando interpretaciones que sugieren a la velocidad como la magnitud del segmento AB en el pre-test y como la magnitud del segmento BC en el post-test. Si bien es cierto que en el post-test identifican los cambios (o aumentos) en el tiempo y en la distancia, se nota una clara conexión entre la velocidad y la magnitud de la hipotenusa del triángulo característico en ambos casos. Esta persistencia de asociar la magnitud de la hipotenusa con la velocidad es una concepción que se manifiesta resistente al cambio conceptual.

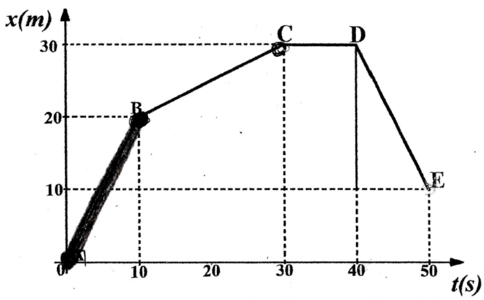


Figura 7. Selección de recta AB en el pre-test.

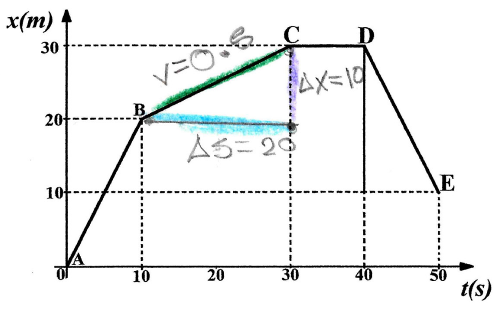


Figura 8. Elección de BC en post-test.

Análisis de la representación gráfica para la razón de cambio "cero" (P4B). Aquí el cambio conceptual se manifestó en dos sentidos. Por un lado, al concebir en el pre-test a la razón de cambio "cero" como asociada a la cercanía o contigüidad de la gráfica con el origen del plano a una concepción indicadora del comportamiento de la función en el pos-test: el desplazamiento vertical nulo respecto del aumento del tiempo. En el pre-test, 2/3 de los estudiantes argüían que ahí los valores de sus coordenadas son cero o casi cero, concepciones similares a las encontradas por Dolores *et al.* (2002) y Dolores *et al.* (2009). Al final casi todos cambian de opinión y arguyen que "ahí la función es constante", "o porque no hay cambio". Este resultado es consistente con lo obtenido en **P2B**, que en el primer caso la "velocidad cero" y en éste la "razón de cambio cero". Esto último sugiere la aceptación tácita de la semejanza de los conceptos de velocidad y razón de cambio en base a la similitud de sus interpretaciones geométricas en ambos casos.

Interpretación de la mayor rapidez (P5A y P5B). En los dos momentos, los estudiantes no tuvieron problemas para identificar los intervalos de mayor rapidez de crecimiento de la estatura. En todos los casos se deciden por la gráfica que está "por encima" o "más elevada". A pesar de que las respuestas son correctas, tanto en el post como en el pre-test, los argumentos son similares a los detectados por Dolores *et al.* (2002) para la mayor velocidad y en Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor, (2009) para la rapidez, ya que sólo se atienen a la magnitud de las ordenadas para decidir la mayor rapidez. En este caso se perfila cierta resistencia al cambio conceptual, que se manifiesta por la persistencia de la concepción de mayor rapidez asociada a las ordenadas de mayor altura en vez del uso de la pendiente, la inclinación u otra concepción.

Estimación de la rapidez en un intervalo (P5C y P5D). Las estimaciones de la rapidez de crecimiento fueron aceptables tanto en el pre como en el post-test. En el primero las $^3/_4$ partes lo hicieron aceptablemente, en el segundo, todos excepto uno. En el segundo lo hacen con mayor precisión pese a los errores que induce la estimación con números fraccionarios (sobre todo en el caso de la rapidez de crecimiento de las mujeres). Es notable que, a diferencia de la estimación de la velocidad en donde los estudiantes se remiten a la fórmula $v = d/t$ en P2A operan con las coordenadas, cuando se les pide la rapidez recurren más a la gráfica haciendo uso de la visualización, estimando las variaciones de estatura y las de tiempo y, calculando el cociente correspondiente. La idea de rapidez parece ser menos conflictiva que la idea de velocidad para la cognición, la idea de velocidad es de inmediato relacionada con su fórmula elemental $v = d/t$ la cual puede interferir en el progreso de su comprensión; en cambio, la rapidez no tiene mayor problema para su interpretación geométrica.

Resolución de problemas, el caso de velocidad de un cuerpo impulsado (P6). Este problema implica el cálculo de las diferencias de la distancia entre $t = 1$ y $t = 2$ y del cociente $\Delta y/\Delta x$. En el pre-test sólo la cuarta parte lo hacen correctamente, mientras que en el post-test todos aciertan a dar como solución: $v = 5m/s$, y para llegar a ésta utilizaron el cociente de las diferencias: $v = \Delta y/\Delta x$. Los resultados muestran que el total de estudiantes, al finalizar la intervención, pueden resolver un problema rutinario en el que se necesita calcular la velocidad en un intervalo dado, utilizando la fórmula del cociente de diferencias.

Relación entre la razón de cambio positiva y el comportamiento de funciones (P7). En el pre-test las concepciones acerca de esta relación es dispersa. Aunque casi la mitad son de la idea de que, si la razón de cambio es positiva entonces $f(x)$ también lo es, un tercio considera que la función $f(x)$ es cero; una sexta parte cree que la $f(x)$ no crece ni decrece. Estas ideas parecen cambiar, ya que en el post-test casi todos los estudiantes relacionan la razón de cambio positiva con el crecimiento de la función asociada. Esto constituye un cambio conceptual trascendente, porque la comprensión de esta relación da amplias posibilidades para inferir el comportamiento de la función asociada. No obstante, también eligen a la función positiva, es decir para los estudiantes es cierto que si $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ entonces $f(x) > 0$ y además creciente. Esto puede ser falso y se constituye en un metateorema detectado por Dolores (2004). Una función puede tener ordenadas negativas, pero ser creciente, es decir puede ser $f(x) < 0$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Estos resultados hablan de la resistencia al cambio respecto de la concepción inicial, si bien es cierto que ahora aceptan que la razón de cambio positiva implica crecimiento, siguen pensando en que es necesariamente positiva la función asociada.

Resolución de problemas no rutinarios, el problema de cambio de variable (P8). Tanto en el pre como en el post-test, los estudiantes dieron soluciones considerando la rapidez con la que sale el volumen de agua ($0.25m^3/min$), dato dado como información inicial. Al término de la experiencia, un poco más de la cuarta parte de los estudiantes calculan correctamente el tiempo total de vaciado de la alberca (504 min) usando el dato dado, es decir, hicieron caso a lo pedido en el problema: se pedía la rapidez con que desciende la altura del nivel del agua. Esto era lo esencial del problema, en un cambio de variable: del volumen de salida en relación al tiempo al de la altura respecto del tiempo. Quizá no sintieron la necesidad de hacer este cambio porque con la rapidez dada como dato inicial resolvían parte del problema. Sin embargo, los procesos de tratamiento sugeridos por Duval (2006) aquí cobran especial relevancia, cómo dentro del mismo registro analítico se puede pasar de la variable volumen $v(t)$ implícita en la rapidez de vaciado dada, a ponerla en términos de la altura, $h(t)$. Esto implica establecer un vínculo entre el volumen dado ($0.25m^3/min$) y la altura que ocupa ese volumen mediante la ecuación $84x = 0.25$, de modo que ese volumen ocupa una altura de $x = 0.2976$ cm, así cada que se salga 0.25 m^3 de agua, la altura de la alberca disminuirá 0.2976 cm de manera que la función queda: $h(t) = 150 - 0.2976t$. Pero los estudiantes no intentaron realizar estos procesos de tratamiento porque con el dato dado también obtuvieron el tiempo de vaciado total.

CONCLUSIONES

Los cambios conceptuales ocurrieron en las ideas asociadas a la obtención numérica de la velocidad, con su estimación, representación, interpretación en una gráfica y en la resolución de un problema rutinario, inclusive cuando su valor es cero (Tabla 19). Al inicio, los alumnos creían que con la fórmula $v = d/t$ se podía calcular, al final sus ideas cambian al aceptar las diferencias y el cociente de diferencias como la forma de obtenerla. Esto es consistente con el cambio conceptual asociado a la utilización del cociente de diferencias en la resolución del problema del cálculo de la velocidad de un cuerpo impulsado. Para estimarla en una gráfica ocurrió algo similar. Sus ideas cambian de utilizar $v = d/t$ y operar con las coordenadas a utilizar el cociente $v = \Delta s/\Delta t$ en la estimación.

En cuanto a la representación gráfica de la velocidad, al inicio más de la mitad de los estudiantes la consideraban equivalente a la magnitud de la distancia (la ordenada $s(t)$) o preferían el segmento de la gráfica contiguo al origen porque allí su valor es "casi cero" (el caso de $v = 0.5$ m/s), concepción detectada por Billings y Klanderman (2000) y Dolores (2002). Sin embargo, al final prácticamente

Tabla 19. Síntesis de los cambios conceptuales y la estabilidad detectados

Actividades	Concepciones Iniciales o alternativas	Frec.	Concepciones finales	Frec.	Cambio conceptual	Estabilidad
Cálculo numérico de v (P1)	$v = d/t$ $v = 5(2)^2 - 5(3)^2$	11 8	$v = \frac{5(2)^2 - 5(3)^2}{3-2}$	24	✓	
Estimación en gráfica $v = 0.5\ m/s$ (P2A)	$v = 3/1$ Dividen las coordenadas	9 13	Utilizan $v = s/t$ Señalan hipotenusa	24 22	✓	
Representación gráfica $v = 0.5m/s$ (4A)	Segmento AB, contiguo al origen del plano	14	Segmento BC (aceptable) Representan Δs y Δt	24 24	✓	
Interpretación de v horizontal (2B).	Dividen coordenadas $v = 0$	11 6	Utilizan $v = \Delta s/\Delta t$, "no hay cambios"	24	✓	
Interpretación de $rc = 0$ en gráfica (4B)	Inicio o contigüidad al origen del plano Horizontal a eje t	15 6	Horizontal a eje t	23	✓	
Problema de velocidad (P6)	No contestan $(20(2) - 5(2)^2) - (20(1) - 5(1)^2) = 5$	19 7	$v = (20(2) - 5(2)^2) - (20(1) - 5(1)^2) = 5$	24	✓	
Mejor representación de (rc) razón de cambio (P3)	$v = d/t$ $v = s/t$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 100 km/h	21 13 6 6	$v = d/t$ $v = s/t$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 100 km/h	17 22 22 5	✓	✓
¿Si $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ entonces?	$f(x) > 0$ $f(x) = 0$ $f(x)$ crece	11 8 2	$f(x) > 0$ $f(x) = 0$ $f(x)$ crece	24 0 21	✓	✓
Estimación en gráfica de rapidez	Aceptable $\Delta e/\Delta t$ (5C) Aceptable $\Delta e/\Delta t$ (5D)	20 10	Aceptable $\Delta e/\Delta t$ (5C) Aceptable $\Delta e/\Delta t$ (5D)	24 24		✓
Interpretación de mayor rapidez (5A, 5B)	Ordenadas mayores (h) Ordenadas mayores (m)	22 24	Ordenadas mayores (h) Ordenadas mayores (m)	24 24		✓
Problema de cambio de variable (P8)	$V = 12x7x1.5 = 126\ m^3$ $r = 0.25\ m^3 / min$	13 9	$V = 12x7x1.5 = 126\ m^3$ $t = 126/0.25 = 504$	4 7		✓

todos eligen secciones de la gráfica con la pendiente adecuada, representan los incrementos de tiempo y distancia respectivos, pero además prácticamente todos señalan la hipotenusa del triángulo característico asociándolo con la velocidad, sugiriendo que su magnitud está asociada a ella. El cambio conceptual opera en el sentido de relegar la concepción "como punto" o como "magnitud de la distancia" representada por la ordenada, a la concepción "rise over run" que atiende el desplazamiento vertical respecto del horizontal. Pero al finalizar la secuencia de aprendizaje aparece la hipotenusa asociada a la interpretación de la velocidad, aludiendo quizá al triángulo característico, no obstante, se obtuvieron evidencias (ver respuestas a P4A) que señalan que su magnitud es asociada al valor numérico de la velocidad. Concepción que sugiere a la velocidad como longitud de la hipotenusa y no como inclinación o pendiente determinada por una operación: el cociente de las magnitudes de los cambios obtenidos a su vez por el cálculo de diferencias.

Cambios conceptuales similares ocurren en la interpretación de la velocidad cuando ésta es representada por un segmento horizontal al eje de las t y con la razón de cambio cero. En el primer caso, al inicio (igual que sucedió cuando es distinta de cero) hacen divisiones entre las ordenadas influenciados por el uso de la fórmula $v = d/t$, al final todos los estudiantes eligen el segmento de la gráfica que es paralelo al eje t aduciendo que "ahí la distancia es constante" y que "sólo cambia el tiempo". Cuando se trata de interpretar la razón de cambio cero ocurre lo mismo que cuando se pide para la velocidad cerca de cero (v = 0.5 m/s, P2A), al inicio la asocian con el origen porque "es el principio del movimiento" aducen, al final prácticamente todos cambian a una concepción que asocia la sección paralela al eje de la t. Este resultado también puede ser indicativo de la aceptación de que la razón de cambio cero y la velocidad cero son conceptos equivalentes porque tienen representaciones cartesianas iguales: rectas paralelas al eje de las t.

Por otro lado, las concepciones asociadas a la estimación de la rapidez, a la determinación de la mayor rapidez y al cambio de variable en la resolución de un problema, mostraron estabilidad. Tanto al principio como al final, los estudiantes no tuvieron mayores problemas en estimarla visualizando sólo la gráfica, en cambio, cuando se les pide la velocidad interfiere la fórmula $v = d/t$ o la operatoria con las coordenadas, quizá porque la rapidez es un concepto más intuitivo que la velocidad. Con la identificación de la mayor rapidez de crecimiento también hubo estabilidad, tanto al principio como al final sólo se atienen a la magnitud de la estatura; los estudiantes no utilizan comparaciones entre las pendientes o inclinaciones de las curvas a pesar de ser evidente. Quizá la actividad que la exploró no propició mayor reflexión. La presencia de esta concepción persiste en cantidades significativas de estudiantes, aun después de haber tenido experiencias similares a la nuestra, así lo reporta Doerr y O'Neil (2011) y Dolores *et al.* (2009), incluso Billings y Klanderman (2000) también la detectaron en futuros profesores. La estabilidad también fue evidente en la resolución del problema que requería el cambio de variable, todos los estudiantes al principio y al final la evadieron, aunque más de la cuarta parte del grupo obtuvo el tiempo de vaciado de la alberca que satisfacía parcialmente lo pedido, quizá por eso lo consideraron innecesaria.

Hay un grupo de actividades en donde se evidenciaron cambios conceptuales y, a la vez, estabilización. El reconocimiento de expresiones que mejor representan razones, el cambio es evidente, de sólo preferir a la fórmula tradicional de la velocidad al principio, cambian al final a la fórmula de la pendiente m; aunque casi las $\frac{3}{4}$ persisten en considerar a $v = d/t$ como la mejor representación. La insistencia en esta preferencia puede convertirse en obstáculo para la construcción de conceptos futuros como la derivada y, utilizar el conocimiento matemático ampliado sugerido por Pino-Fan, Godino y Font (2013).

En cuanto a la relación entre la razón de cambio (rc) positiva y el comportamiento de la función asociada, el cambio conceptual opera en el sentido de que los estudiantes pasan de considerar al inicio de la experiencia sólo que $rc > 0$ implica únicamente que $f(x) > 0$, a la aceptación al final de la experiencia, que si $rc > 0$ entonces $f(x)$ es creciente pero además $f(x) > 0$. Incluir el crecimiento de la función como consecuente, es un cambio conceptual trascedente, pero persiste aceptación de la implicación entre razón de cambio positiva y función positiva, que es parcialmente verdadera. Esta concepción alternativa fue detectada por Dolores (2004) y al parecer es resistente al cambio conceptual como se ha demostrado en esta investigación.

La enseñanza de la matemática tiene como fin principal: producir aprendizaje, lo que implica la construcción o reconstrucción del conocimiento cambiando ideas erróneas o concepciones alternativas en los estudiantes. La puesta en práctica de la secuencia de aprendizaje en nuestro trabajo propició cambios, pero también la estabilidad de algunas concepciones y la aparición de otras. Quizá la estabilidad ocurrió, porque fue insuficiente el trabajo pedagógico de los conflictos cognitivos que se suscitaron entre las ideas previas y los conocimientos nuevos, o porque los estudiantes necesitaban más tiempo para la maduración de sus ideas, entre otras razones. La habilidad para enfrentar y trascender las concepciones alternativas debiera ser desarrollada en los estudiantes, pero sigue siendo un desafío en el salón de clase.

REFERENCIAS

Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I. Arango, C. García, M., Álvarez, A. Rodríguez, M., Batista, L. C., Villegas, E., Almeida B., Torres, P. (2000). *Metodología de la enseñanza de la matemática.* Tomo I. Cuba: Pueblo y Educación.

Bardin, L. (2002). *El análisis de contenido.* 3a. edición. Madrid: Akal.

Billings, E., Klanderman, D. (2000). Graphical Representations of Speed: Obstacles Preservice K-8 Teachers Experience. *School Science and Mathematics,* 100(8), 440-450.

Bostan, A. (2016). Conceptual Level of Understanding about Sound Concept: Sample of Fifth Grade Students. *e-International Journal of Educational Research,* 7(1), 87-97.

Canedo-Ibarra, S. P., Castelló-Escandell, J., García-Wehrle, P., Gómez-Galindo, A., Morales-Blake, A. J. (2012). Cambio conceptual y construcción de modelos científicos precursores en educación infantil. *Revista Mexicana de Investigación Educativa,* 17(54), 691-727.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(5), 352-378.

Carrascosa, J. (2005). El problema de las concepciones alternativas en la actualidad (Parte II). el cambio de concepciones alternativas. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,* 2(3), 388-402.

Cortés, J. (2006). La razón de cambio (cociente de incrementos) desde un punto de vista gráfico y numérico. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 8, 3-10.

Díaz Barriga, A. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Profesorado*, 17(3), 11–33.

Díaz, M. (2013). La razón de cambio. Niveles de comprensión del profesor de Educación Básica en México. *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe.* 961-982. Recuperado el 10 de febrero de 2015 de <http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/anais/doc_memorias_completo.pdf>

Doerr, H. M., O´Neil, A. H. (2011). A Modelling Approach to Developing an Understanding of Average Rate of Change. En M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Rzeszów, Poland: University of Rzeszów. pp. 937-946.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas en estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 7(3), 195-218.

Dolores, C., Chi, A. G., Canul, E. R., Cantú, C. A., Pastor, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 18, 41-57.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada.* México, D. F.: Díaz de Santos, UAGro.

Dolores, C., Alarcón, G., Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 5(3), 225-250.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.

Ferrari, M., Elik, N. (2003). Influences on Intencional Conceptual Change. En G. M. Sinatra, P.R. Pintrich (eds.), *Intentional conceptual change.* Mahwah, NJ: LEA. pp. 1-18.

Herbert, S., Pierce, R. (2008). An 'Emergent Model' for Rate of Change. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 13(3), 231-49.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, L. (2006). *Metodología de la investigación*. México, D.F.: Mc Graw Hill.

Mevarech Z., Kramarsky B. (1997). From Verbal Description to Graphic Representation: Sstability and Change in Students' Alternative Conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 32(3), 229-263.

Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of Slope: A Review of State Standards. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270-277.

Moore-Russo, D., Conner, A., Rugg, K. I. (2011). Can Slope be Negative in 3-space? Studying Concept Image of Slope Through Collective Definition Construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3-21.

Pino-Fan, L., Godino, J., Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas, *Bolema,* Rio Claro (SP), 29(51), 60-89.

Pino-Fan, L., Godino, J., Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (1a Parte). *Revemat*, 8(2), 1-49.

Pozo, J. I. (1999). Más allá del cambio conceptual: el aprendizaje de la ciencia como cambio representacional. *Enseñanza de las ciencias,* 17(3), 513-520.

Ruiz, E., Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9(2), 299-324.

SEP, DGB, DCA. (2013). *Cálculo diferencial, serie programas de estudio.* México, D.F.: Secretaría de Educación Pública. Consultado en: <http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf>.

SEP, DGB, DCA. (2013). *Matemáticas III. Serie programas de Estudios.* México, D.F.: Secretaría de Educación Pública. Consultado en: <http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/3er_SEMESTRE/Matematicas_III_biblio2014.pdf>.

Steffe, L. P., Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. En R. Lesh, A. E. Kelly (eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education.* Hillsdale, NJ: Erlbaum. pp. 267-307.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* México, D.F.: Cengage Learning.

Suh, J., Fulginiti, K. (2011). Using Technology to Understand Rate of Change. *Teaching Children Mathematics,* 18(1), 56-58.

Teuscher, D., Reys, R. E. (2010). Slope, Rrate of Change, and Steepness: Do Students Understand the Concepts? *Mathematics Teacher,* 3(7), 519-524.

Teuscher, D., Reys, R. E. (2012). Rate of Change: AP Calculus Students' Understandings and Misconceptions after Completing Different Curricular Paths. *School Science and Mathematics,* 112(6), 359-376.

Thompson, P. W. (1994). The Development of the Concept of Speed and Its Relationship to Concepts of Rate. In G. Harel, J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics.* Albany, NY: Suny Press. pp. 181-234.

Tirosh, D. & Tsamir, P. (2004). What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education? *Learning and Instruction*, 14, 535-540.

Tobón, S., Pimienta, J. H., García, J. A. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* México D.F.: Pearson.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a Graph and Constructing its Derivative graph: Stability and Change in Students' Conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 38(5), 609-637.

Vrancken, S., Engler, A., Müller, D. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisa,* 10(38), 36-46.

Wilhelm, J. A., Confrey, J. (2003). Projecting Rate of Change in the Context of Motion onto the Context of Money. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(6), 887-904.

Anexo A
Pre y Post-Test

Nombre: ______________________________ Grupo: _______ Fecha: ____________

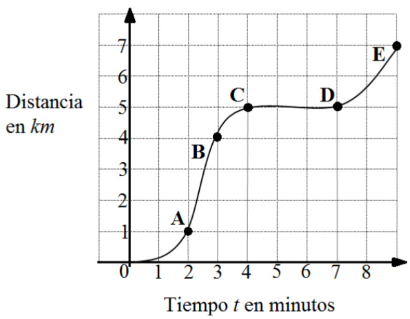
Estimado estudiante. El presente es un cuestionario con la finalidad de explorar algunos de tus conocimientos matemáticos. Te pedimos lo contestes con toda seriedad escribiendo todos los procedimientos o argumentos necesarios. Para ello, lee cuidadosamente cada una de las preguntas y contesta lo que se te pide. Tus respuestas serán manejadas con confidencialidad. Muchas gracias por tu colaboración.

P1. Un cuerpo en caída libre se rige por la función: $s(t) = 5t^2$, donde s es la distancia medida en metros y t el tiempo en segundos. ¿Qué velocidad lleva entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos? Selecciona el procedimiento que permite llegar al resultado.

a) $v = \dfrac{d}{t}$ b) $v = \dfrac{5(3)^2}{2}$ c) $v = \dfrac{5(3)^2 - 5(2)^2}{3-2}$

d) $v = 5(2)^2 - 5(3)^2$ e) $v = \dfrac{5(2)^2 - 5(3)^2}{3-2}$

P2. La gráfica siguiente muestra la variación de la distancia recorrida por un ciclista, en función del tiempo.



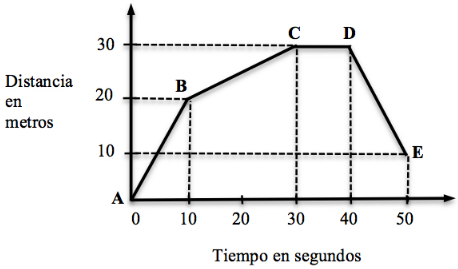
P2A. Estime su velocidad promedio de A a B
P2B. ¿Cuál es su velocidad media de C a D?

P3. Clasifica, encerrando en un círculo, las expresiones que mejor representan razones de cambio.

a) $v = \dfrac{d}{t}$ b) $A = \pi r^2$ c) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

d) $m = \dfrac{1}{2}$ e) $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ f) $v = 100\ km/h$

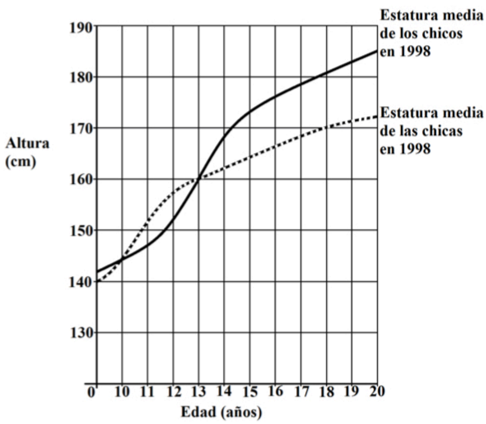
P4. Un corredor recorre cierta distancia de acuerdo como se ilustra en la gráfica siguiente.



P4A. Colorea el intervalo donde su velocidad es de 0.5 m/s. Haz lo mismo con los cambios de distancia y los cambios de tiempo correspondientes.

P4B. ¿En qué intervalo su razón de cambio es cero? Argumente.

P5. La estatura media de los chicos y las chicas de Holanda en 1998 está representada en la siguiente gráfica. Interpreta la información y contesta las preguntas.



Tomado de https://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf

P5A. ¿En qué periodo las chicas crecen más rápido que los chicos? Argumente

P5B. ¿En qué intervalo los chicos crecen más rápido que las chicas? Argumente

P5C. ¿Con qué rapidez crecen los chicos entre los 13 y los 15 años de edad?

P5D. ¿Con qué rapidez lo hacen las niñas en ese mismo intervalo?

P6. Un cuerpo es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de 20 *m/s*. De manera que se rige por la función: $s(t) = 20t - 5t^2$. Donde s se mide en metros y t en segundos. ¿Cuál es su velocidad entre $t = 1$ y $t = 2$?

P7. Si la razón de cambio: $r = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, donde $y = f(x)$ para todo x de $f(x)$, entonces ¿Cuál de las siguientes opciones se satisface? Subraya la respuesta o respuestas correctas.

a) $f(x) > 0$
b) $f(x) < 0$
c) $f(x)$ es decreciente
d) $f(x) = 0$
e) $f(x)$ es creciente
f) $f(x)$ no crece ni decrece
g) $f(x)$ tiene máximo

P8. Una alberca de 7 m de ancho, 12 m de largo y 1.5 m profundidad, se está vaciando a razón de 0.25 m^3/min. ¿Con qué rapidez desciende el nivel del agua si la alberca estaba llena? ¿En cuánto tiempo se vacía si estaba llena al principio del vaciado?