Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia
ISSN: 0124-4620
revistafilosofiaciencia@unbosque.edu.co
Universidad El Bosque
Colombia

Catsigeras, Eleonora

CONSISTENCIA, NO TRIVIALIDAD Y REDUNDANCIA EN MATEMÁTICA

Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia, vol. 17, núm. 34, enero-junio, 2017, pp. 137-159
Universidad El Bosque
Bogotá, Colombia

Consistencia, no trivialidad y redundancia en matemática[1,2,3]

Consistency, nontriviality and redundancy in mathematics

Eleonora Catsigeras[4,5]

Resumen

Exploramos los criterios racionales formales e informales de consistencia, no trivialidad y redundancia en la investigación matemática actual. Desarrollamos la discusión paradigmática analizando las diferentes concepciones de esos criterios, desde las lógico-formales hasta las informales (pero aún racionales). Ilustramos la discusión con ejemplos concretos extraídos de la actividad de investigación matemática, particularmente la publicada en los últimos cincuenta años en la teoría matemática de los sistemas dinámicos deterministas.

Palabras clave: racionalidad formal e informal, filosofía de la matemática, consistencia, no trivialidad, profundidad matemática, redundancia matemática.

Abstract

We explore the rational, formal and non-formal criteria of consistency, non-triviality and redundancy in the mathematical research now a days. We develop a paradigmatic discussion by analysing the different conceptions of those criteria, from the logic-formal ones to the non formal ones (but still rational criteria).We illustrate the discussion with concrete examples obtained from the mathematical research, particularly from the published results that were published in the last 50 years in the mathematical theory of deterministic dynamical systems.

Key words: formal and non-formal rationality, philosophy of mathematics, consistency, non-triviality, mathematical depth, mathematical redundancy.

1 Recibido: 3 de octubre de 2016. Aceptado: 19 de enero de 2017.

2 Este artículo se debe citar así: Catsigeras, Eleonora. “Consistencia, no trivialidad y redundancia en matemática”. *Rev. Colomb. Filos. Cienc.* 17.34 (2017): 137-159.

3 Artículo de investigación realizada con financiación parcial del proyecto “Sistemas dinámicos” de la Comisión Sectorial de Investigación Científica de la Universidad de la República, Uruguay, y del proyecto “Neurodinámica” del programa *For Women on Science de L´Oréal-Unesco*, Uruguay.

4 Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Facultad de Ingeniería y Grupo Interdisciplinario de Racionalidad de las Ciencias, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad de la República, Uruguay.

5 Montevideo, Uruguay.

1. Introducción

Hilary Putnam defendió que en toda justificación racional hay implícito un juicio de relevancia previo. Trata la relevancia en términos de un modelo teórico de valores en la ciencia. Bajo esa premisa, exploraremos tres de las muchas concepciones de las que surgen los juicios de relevancia de enunciados en la matemática actual, concepciones estas tanto formales como informales.

Por un lado, esta exploración es metaparadigmática, típicamente filosófica, en la que discutiremos algunas de las concepciones racionales previas a los juicios de valor que la investigación matemática actual asigna a sus enunciados. Por otro, nuestra exploración y discusión están basadas en la exposición de ejemplos de la práctica cotidiana de la investigación matemática, que muestran cómo se interpretan en los hechos dos concepciones filosóficas de racionalidad, diferentes pero complementarias, la lógico-formal y la informal.

Adoptaremos un método filosófico por el cual, para sostener un argumento filosófico racional relativo al quehacer de las ciencias, es necesario (o por lo menos muy conveniente):

1. nutrir el argumento con exposición de ejemplos;
2. no especular sobre cómo una palabra o concepto debería ser usado, sino observar cómo se usa y aprender de ello (Wittgenstein citado en Cook 445).

La metodología de esta investigación, acorde a su propósito, es multidisciplinaria. Comprende dos disciplinas que aspiramos integrar en este trabajo: la matemática y la filosofía de la ciencia. Tomamos conciencia de que los métodos de exploración y los lenguajes de comunicación específicos de ambas disciplinas son en la actualidad muy disímiles. Entre otras razones, estas disimilitudes se deben al crecimiento y diversificación de las dos disciplinas, y a la diferenciación creciente de los propósitos de investigación. Sin embargo, la metodología interdisciplinaria que adoptamos aquí intenta combinar en forma coherente los dos alfabetos de formas y lenguajes.

Acordamos la siguiente convención, usual entre los investigadores matemáticos. La palabra *enunciado*, lejos de acotar el objeto de estudio a su mera forma de expresión, se referirá al contenido matemático de un teorema, una definición o un axioma, en sí mismo –sobre el cual discutiremos las características metamatemáticas– bajo cualquier formulación concreta con la que aparezca ese contenido. Se refiere, por ejemplo, al teorema intrínsecamente, es decir, a las ideas matemáticas en sí mismas que el teorema involucra o relaciona, y a esta relación, independientemente de su lenguaje y fórmulas, de su notación, expresión o formas de comunicación concretas.

La noción de *relevancia* que adoptaremos es una noción de consenso social. Se desprende del uso habitual de esa palabra o concepto en la práctica de evaluación de resultados nuevos en la comunidad de investigadores matemáticos. En particular, hemos considerado algunos de los juicios de valor de publicaciones matemáticas, realizados por científicos matemáticos independientes de los autores, y publicados en *Zentralblatt für Mathematik* y en *Mathematical Reviews* de la A.M.S.

Generalmente en un juicio de relevancia, la práctica usual de la comunidad de matemáticos, lejos de considerar únicamente criterios lógico-formales y exactos, adopta e integra (muchas veces con predominancia sobre la formalidad lógica) otros criterios que, aunque informales, son aún racionales. Justamente, la *racionalidad* de estos criterios informales, además de los lógico-formales, y la de su integración con estos en un juicio de valor de enunciados matemáticos, es la tesis central que defenderemos en este texto.

Nos enfocaremos en el análisis, la discusión y la ilustración mediante ejemplos concretos, de tres conceptos clave y *previos* a los juicios de relevancia en la práctica actual de la investigación matemática (expondremos al final de esta introducción los motivos de tal enfoque). En efecto, a lo largo de las diferentes secciones de este trabajo, discutiremos nociones que se aplican en los juicios de valor de contenidos matemáticos, en lo relativo a:

- consistencia,
- no trivialidad, *y*
- no redundancia.

Aunque cuando el matemático declara que un teorema es "relevante" o "bueno" o "valioso", no solo está afirmando que es consistente, no trivial y no redundante, nos centraremos en el análisis de esas tres nociones porque son ellas, desde los puntos de vista lógico-formal, semiformal e informal, los principales y primeros (en orden cronológico) criterios de relevancia que se tienen en cuenta en la práctica usual de evaluación de enunciados matemáticos nuevos. Muy frecuentemente son estos tres los únicos requisitos necesarios para un juicio de valor posterior, bastante más complejo, que integra una combinación graduada y no cuantitativa de esos y varios otros criterios racionales de relevancia. Así, los tres criterios mencionados son condiciones necesarias para una justificación de valor de los enunciados matemáticos, aunque normalmente no sean suficientes.

2. Criterios de consistencia lógico-formal y experimental

Para definir *consistencia*, precisemos antes el concepto de *contradicción*. Dos enunciados matemáticos son contradictorios cuando uno de ellos se puede deducir de la negación del otro. Más restrictivamente, según Tarski, dos sentencias son contradictorias si una es equivalente a la negación de la otra. Observamos que esta definición es restrictiva al requerir equivalencia entre sentencias. Sin embargo, lo único que se necesita para la inconsistencia de una pareja de proposiciones matemáticas es que la una implique la negación de la otra, y no necesariamente que esta otra implique la negación de la primera.

La negación de un teorema es lógicamente diferente de la afirmación contraria al teorema. En efecto, la afirmación contraria a un teorema de la forma "si se cumple A, entonces se cumple B" es "si no se cumple A, entonces no se cumple B". La verdad del teorema es independiente de la verdad o falsedad de su afirmación contraria. Por lo tanto, es consistente la pareja de afirmaciones compuestas por un teorema y su proposición contraria. En cambio, ese mismo teorema que enuncia "si se cumple A, entonces se cumple B" tiene como negación "existe un ejemplo que cumple A y no cumple B" (llamado *contraejemplo*). El teorema es verdadero (si no lo fuera, no se llamaría teorema), si y solo si su negación es falsa. Existe inconsistencia entre el teorema y su negación, la existencia del contraejemplo.

Enunciados ya probados y futuros enunciados en una subdisciplina matemática (es decir, bajo un mismo sistema de definiciones o axiomas) son mutuamente *consistentes* cuando de ningún subconjunto de ellos se puede deducir dos enunciados contradictorios. Así, un nuevo enunciado, o un nuevo supuesto en una subdisciplina matemática, es consistente con el estado de la subdisciplina, si y solo si del conjunto de todos los enunciados previos ya probados en ella no se puede deducir la negación del nuevo enunciado o del nuevo supuesto.

Tarski (135) define la consistencia *global* de una disciplina deductiva, en vez de definir la consistencia de un nuevo enunciado en relación con el conjunto de enunciados previamente aceptados. Según él, una teoría deductiva es llamada consistente o no contradictoria si ninguna pareja de afirmaciones de la teoría está compuesta por una afirmación y su negación.

Sin embargo, esta definición *global* es exactamente la misma que se usa en la matemática contemporánea. En efecto, la matemática de hoy en día admite (como criterio racional informal) que cualquiera de sus subdisciplinas está compuesta solamente por la cantidad finita de enunciados, mutuamente consistentes, aceptados por los matemáticos que investigan en esa subdisciplina, y por los que se pueden deducir de aquellos en forma trivial (definiremos trivialidad en la próxima sección). Es decir, no componen la subdisciplina todos los enunciados verdaderos posibles que se puedan deducir en forma no trivial en el futuro, a partir de los ya aceptados, ni los que se puedan crear en el futuro bajo nuevos presupuestos o definiciones. La matemática denomina *preguntas abiertas* a los enunciados no trivialmente verdaderos ni trivialmente falsos que relacionan conceptos definidos en la subdisciplina, pero no emite un juicio de consistencia sobre las preguntas abiertas en relación con los enunciados ya aceptados de la subdisciplina.

Estamos afirmando que, al incorporar nuevos enunciados (demostrados y aceptados), la teoría no se mantiene inmutable. La teoría o subdisciplina de la matemática, según la conciben los investigadores matemáticos, evoluciona con el tiempo, es dinámica, aunque cada enunciado ya incorporado no cambie. Se modifica el conjunto de enunciados ya demostrados y aceptados por inclusión de los nuevos, pero no por sustracción de los anteriores. Por lo tanto, cambia también el conjunto de preguntas abiertas. Según la definición *global* de consistencia de Tarski, podría interpretarse que, para juzgar la consistencia de una teoría, se necesitaría *a priori* el conocimiento de la totalidad de sus enunciados de manera estática, para saber si la disciplina es consistente o no lo es. Esta interpretación requeriría el conocimiento *a priori* de todos los posibles enunciados verdaderos de la teoría. En cambio, la interpretación parcial y dinámica de consistencia evalúa en forma continua el conjunto finito y cambiante de enunciados verdaderos (ya demostrados) de la disciplina en cada momento.

Observamos que la evolución de la disciplina no solo se debe a que se agregan nuevos enunciados que aparecen como resultados de la investigación matemática. Se debe también a que para que estos nuevos enunciados sean consistentes con el conjunto de los enunciados anteriores, frecuentemente requieren la introducción de supuestos o definiciones adicionales.

Veamos un ejemplo de consistencia que requirió la introducción de conceptos nuevos. Dentro de la teoría ergódica diferenciable, una subdisciplina muy específica desarrollada durante los últimos 45 años, pero que presenta aún numerosos problemas abiertos, es la llamada teoría de Pesin, y como parte de esta, la teoría de medidas SRB (*i.e.* Sinai-Ruelle-Bowen), originada, entre otros, en el artículo precursor de Sinai en 1972. Esas dos subramas de la mencionada teoría conciben que el sistema dinámico bajo estudio tiene regularidad C2: el sistema es diferenciable hasta segundo orden con derivadas hasta segundo orden continuas. La regularidad C2 es necesaria para las demostraciones conocidas de algunos teoremas muy populares en esas subdisciplinas. En efecto, en Robinson y Young, se muestra un contraejemplo sin regularidad

C2, para el cual algunos resultados de la teoría de Pesin no rigen. El contraejemplo de Robinson y Young es solo de clase C1: el sistema es diferenciable solamente hasta primer orden con derivada primera continua, pero no lo es hasta segundo orden. En particular, la existencia de medidas SRB[6] es falsa en ese contraejemplo.

Como contraparte, en Enrich y Catsigeras, se demuestra que todos los sistemas continuos, incluyendo los de clase C1 y clase C2, poseen cierto tipo de medidas abstractas llamadas "SRB-like" (*i.e.* parecidas a las medidas llamadas SRB), definidas como las que presentan la propiedad de *observabilidad* a través de los promedios temporales asintóticos de conjuntos Lebesgue-positivos de órbitas del sistema. Dicha propiedad la exhiben en particular todas las medidas SRB de los sistemas diferenciables, en los casos en que las SRB existen. Es decir, todas las medidas SRB de los sistemas dinámicos diferenciables son casos particulares de medidas SRB-like, y estas últimas siempre existen, aunque el sistema no sea diferenciable.

¿No es el nuevo enunciado de existencia de medidas SRB-like inconsistente con los contraejemplos conocidos previamente para los que no existen medidas SRB? La respuesta es "no, no lo es", pues el nuevo teorema se refiere a las medidas SRB-like y no a las SRB solamente. Estas son, cuando existen, solo casos particulares de aquellas. Por lo tanto, pueden no existir las SRB, como en el contraejemplo previamente conocido de Robinson y Young, y sí existir las SRB-like como se demuestra en el nuevo teorema.

En conclusión, la consistencia del nuevo teorema con el cuerpo de la subdisciplina desarrollado hasta ese momento requirió la creación e introducción de un concepto matemático nuevo: el de las medidas SRB-like o propiedad de observabilidad. Este concepto nuevo es consistente con el concepto previo de medida SRB, y más aún, aparentemente fue extraído o inspirado en el descubrimiento de la propiedad necesaria de observabilidad de estas.

Discutamos ahora la concepción filosófica de consistencia experimental, además de la consistencia lógico-formal que ya expusimos. Esta consideración de conceptos filosóficos diferentes de consistencias matemáticas (pero no opuestas sino complementarias) permite diversificar las estrategias para excluir el error. En matemática, la *consistencia experimental* es un criterio de relevancia de un nuevo teorema: significa que el teorema nuevo que se demuestra, no solo es consistente desde el punto de vista lógico-formal con los

6 Estamos considerando las medidas SRB como las que satisfacen ciertas propiedades de continuidad absoluta. Más precisamente, la proyección a lo largo de la foliación estable y las medidas condicionales respecto a la foliación inestable deben ser absolutamente continuas.

enunciados aceptados hasta el momento en la subdisciplina matemática a la cual se incorpora, sino que explica (o demuestra la necesidad de) propiedades matemáticas ya observadas previamente en el comportamiento de ejemplos o casos particulares no triviales que, por alguna razón, son considerados relevantes o paradigmáticos dentro de la disciplina.

Es más fácil encontrar ejemplos donde la consistencia experimental es relativa a la investigación de la matemática aplicada a otras ciencias que de la matemática pura. Así, por ejemplo, el teorema de Mirollo y Strogatz en la subdisciplina matemática de los sistemas dinámicos deterministas (como rama de la biomatemática, y en particular aplicada a la neurociencia) demuestra la necesaria sincronización del evento llamado "espiga" o "disparo" de las neuronas de una red excitatoria. Para poder enunciarlo y demostrarlo, se definen de forma matemática abstracta las neuronas, la red que conforman, y el fenómeno de espiga, modelando la red o subred neural[7] biológica concreta. Ese teorema, desde el punto de vista lógico-formal de su enunciado y de su demostración, es relevante porque, entre otros motivos, es *consistente* con el fenómeno de sincronización de espigas observado experimentalmente mediante encefalogramas en ciertas subredes neurales biológicas excitatorias estudiadas previamente por los neurocientíficos. Por lo tanto, la relevancia por consistencia experimental de este teorema está en parte fundado en la relevancia de los resultados previos obtenidos experimentalmente en esas otras disciplinas o ciencias, a las cuales el teorema se aplica. Este criterio de relevancia de enunciados matemáticos aplicados o aplicables, basado en la relevancia de resultados experimentales previos o posteriores, con los cuales el enunciado es consistente, no es un criterio que se limita a verificaciones lógico-formales. Es racional informal, apelando al siguiente argumento de Putnam sobre la racionalidad de las ciencias:

> Los procedimientos mediante los que decidimos (la relevancia) tienen que ver con que considerada como un todo, exhiba ciertas 'virtudes', o no las exhiba. Estoy suponiendo que el procedimiento ... (de decisión), no puede analizarse correctamente como un procedimiento de verificación ... oración por oración. Estoy suponiendo que la verificación ... es una cuestión holística, que son los sistemas ... enteros los que se enfrentan al tribunal de la experiencia..., y que el juicio resultante es una cuestión un tanto intuitiva, que no puede formalizarse a menos que formalicemos toda la psicología humana... (Putnam 61).

7 Cuando la red está definida en forma abstracta matemática, o diseñada por la ingeniería como red artificial, se llama "red neuronal". Cuando es una red de neuronas biológicas del sistema nervioso de un animal, se denomina "red neural".

Aunque es más difícil encontrar ejemplos, en la investigación matemática pura la consistencia experimental también es un criterio racional informal complementario al lógico-formal, y aplicable a juicios de relevancia de enunciados nuevos. Por ejemplo, Anosov en 1967 definió una clase de difeomorfismos, y dio ejemplos particulares de ellos, que son uniformemente hiperbólicos en forma global en todo el espacio. Estos difeomorfismos posteriormente se llamaron "difeomorfismos de Anosov". Todos los ejemplos de esta clase de difeomorfismos estudiados hasta el día de hoy (descontados aquellos para los que aún no se conocen las propiedades ergódicas) cumplen la siguiente propiedad:

> Si un difeomorfismo de Anosov es conservativo[8], entonces es ergódico[9].

El enunciado anterior no es un teorema. Es solamente el resultado obtenido en todos los ejemplos de difeomorfismos de Anosov conservativos para los cuales se pudo estudiar la ergodicidad. Es aún una pregunta abierta si la proposición anterior es verdadera o falsa para la totalidad de los difeomorfismos de Anosov conservativos. Es decir, la ergodicidad de los difeomorfismos de Anosov conservativos es un resultado "experimental" de la matemática pura; y lo llamamos "experimental" porque su verificación, aunque sea lógico-formal y abstracta, es aplicable solamente uno a uno a casos particulares que no son la generalidad.

En el año 1972, Sinai demostró que todos los difeomorfismos de Anosov conservativos que son de clase C2 son ergódicos. Este teorema de Sinai, además de ser relevante según los criterios de no trivialidad que discutiremos en la sección siguiente, lo es por su propiedad de consistencia experimental con todos los ejemplos de difeomorfismos de Anosov cuya ergodicidad era conocida en forma particular, caso a caso, hasta el momento de su aparición. Y aunque no demuestra la ergodicidad en todos los ejemplos posibles (pues excluye los difeomorfismos que no son de clase C2), extiende la propiedad de ergodicidad, antes conocida ejemplo a ejemplo solamente, a toda una subclase de difeomorfismos de Anosov conservativos.

Concluimos que el criterio de consistencia experimental de un nuevo teorema es un concepto racional informal, ya que explica en general las propiedades exhibidas en ejemplos previamente considerados *relevantes* en esa subdisciplina; y la relevancia no es una propiedad verificable mediante un algoritmo de deducción, ni apelando a argumentos lógico-formales exclusivamente.

8 Un difeomorfismo se llama "conservativo" si preserva la forma de volumen en el espacio donde actúa.

9 Un difeomorfismo se denomina "ergódico" si los promedios temporales asintóticos de funciones observables a lo largo de casi todas sus órbitas son iguales al promedio espacial o valor esperado de la función que se observa.

En las próximas secciones extenderemos las estrategias que hemos utilizado hasta ahora, que incluyen dos concepciones filosóficas diferentes pero complementarias de consistencia matemática (la lógico-formal y la experimental), para discutir también la no trivialidad y la redundancia de los enunciados matemáticos.

3. Criterios de no trivialidad lógico-formal e informal

El adjetivo "no trivial" es comúnmente usado por los matemáticos para indicar que un teorema no es obvio o no es fácil de demostrar (véase, por ejemplo, Weisstein). Aquí, es importante no sustituir la conjunción "o" por la conjunción "y". Es decir, un teorema puede ser no trivial, si no es obvio lo que enuncia, aunque su demostración sea breve y fácil de entender. Pero esta definición requiere precisar primero qué significa *obviedad* y *fácil de demostrar*. Como dependen del contexto y del investigador (matemático o no), estas propiedades de un teorema no son lógico-formales, sino informales, aunque plausibles de producir un criterio racional de relevancia del teorema. Por tanto, este es un criterio informal, como lo analizaremos más adelante, y es el que adoptamos como criterio de no trivialidad de un teorema. Justificaremos nuestra elección a lo largo de la siguiente discusión.

Veamos varios posibles significados, estrechamente vinculados entre sí, de la *no trivialidad lógico-formal*. Para ello, definamos su negación, la *trivialidad*. Una nueva afirmación es *trivial, desde el punto de vista estricto lógico-formal*, si de los enunciados (definiciones, axiomas, teoremas) conocidos en la subdisciplina matemática desarrollada hasta el momento se puede deducir esa afirmación. Esta definición no es nunca empleada por los matemáticos investigadores. Si la aplicaran, todos sus resultados serían triviales, independientemente de la profundidad de los significados, de las construcciones de nuevos conceptos matemáticos involucradas en su obtención, así como de la dificultad y longitud de las demostraciones. Son estos factores, y no la definición estricta lógico-formal, los decisivos en un juicio de trivialidad o no trivialidad de enunciados para los matemáticos.

Agreguemos entonces la siguiente condición: una nueva afirmación es *trivial, desde un punto de vista cuantitativo lógico-formal*, si se puede deducir mediante una cantidad breve de pasos deductivos *directos*. Para esto, es necesario definir a *priori* la cota superior numérica de la "cantidad breve" y la lista finita de los pasos deductivos "elementales o directos". En este sentido, una afirmación es trivial para un matemático si su demostración es un "ejercicio". Así el matemático puro que no trabaja en aplicaciones no publica como resultados de investigación lo que considera ejercicios, pues los evalúa como no trascendentes a la investigación matemática en su especialidad, y por lo tanto irrelevantes para el avance de esta. Pero, en sentido contrario, desde el punto de vista del matemático aplicado, y de los investigadores de otras ciencias que utilizan la matemática, la postura de considerar triviales los enunciados brevemente deducibles a partir de lo ya conocido en la subdisciplina matemática que se aplica resulta una limitación inadecuada. En efecto, según el premiado Nobel en física, Richard Feynman, "los matemáticos designan cualquier teorema como trivial, una vez que su prueba ya fue obtenida y es conocida,... Por lo tanto hay solo dos tipos de proposiciones matemáticas verdaderas: las triviales y las aún no demostradas" (citado en Weisstein 1).

Los criterios de no trivialidad matemática que la mayor parte de los matemáticos investigadores utilizan, ya sea en matemática pura o aplicada, no son únicamente los lógico-formales. Esta es la primera de las razones por las que preferimos afiliarnos al *criterio racional informal de no trivialidad*, definido al principio de esta sección, y que discutiremos a continuación.

Entre otros autores, Shanks define "el opuesto de un teorema trivial ... (como) un 'teorema profundo'. Cualitativamente, un teorema profundo es un teorema cuya prueba es larga, complicada o difícil, o (cuyo enunciado) involucra temas de la matemática que no están obviamente relacionadas..." (Shanks 64) Esta definición de no trivialidad matemática, como sinónimo de profundidad del enunciado, en cuanto a la relación entre conceptos matemáticos no primariamente vinculados, es recogida y preferida en la actualidad por buena parte de los investigadores en matemática. Por ejemplo, Tao enumera veintidós criterios no exhaustivos para explicar qué es la "buena" matemática. Entre ellos, considera que el concepto de profundidad de un resultado matemático es una característica de evidente no trivialidad, porque, entre otras razones, capta un fenómeno más allá del alcance de herramientas más elementales.

> Según Gray "los matemáticos usan la palabra 'profundo' para referir una alta apreciación de un concepto, teorema o demostración. Su primer uso en matemáticas fue una consecuencia del trabajo de Gauss en teoría de números y el acuerdo entre sus sucesores que partes específicas de ese trabajo mostraban propiedades estructurales de la matemática... en contraste al alcance menos estructural y más orientado a la solución de problemas" (177).

La profundidad de un teorema se refiere al criterio racional informal de no trivialidad, y a la vinculación a través de su enunciado de estructuras matemáticas no directamente relacionados o evidentes en forma previa. Cuando esta vinculación resulta sorprendente o inesperada, aun si la demostración formal es breve y sencilla, el teorema es profundo. Es un criterio informal, pues no solo es irreducible a algoritmos formales, sino que involucra al sujeto en su percepción de profundidad. Aunque informal, es un criterio racional de no trivialidad, por ejemplo cuando se justifica y fundamenta matemáticamente, de manera independiente de la demostración formal del teorema. Así, este criterio racional de no trivialidad es inherente al enunciado mismo en forma desligada de su demostración. Puede ser, además, inmutable en el tiempo, aunque en el futuro puedan encontrarse demostraciones formales muy simples del mismo teorema.

Ilustremos el argumento anterior con un ejemplo que no corresponde a la investigación en matemática de hoy en día, sino de la Antigüedad. El teorema de Pitágoras es no trivial, intrínsecamente, pues en forma inesperada y sorpresiva relaciona las operaciones de suma y multiplicación de cantidades numéricas con las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Se han hecho populares hoy en día demostraciones brevísimas y muy sencillas de este teorema. Pero aun así, ¿cómo pueden las operaciones numéricas de multiplicación y suma ser tan una manifestación de la geometría métrica de un triángulo rectángulo? Los conceptos están definidos *a priori* de forma independiente. ¿Por qué sucede entonces que esa aparente independencia no sea tal, sino que sean conceptos vinculados a través del teorema de Pitágoras? Entender las causas profundas de relaciones matemáticas conlleva una comprensión diferente de la mera explicación lógica, deductiva y formal de cada paso de una demostración, e inspira la creación de definiciones matemáticas abstractas que reflejan esa comprensión profunda. Livio sugiere que esa comprensión trasciende la forma lógico-deductiva de relaciones no obvias, y en ella radica la respuesta "es ambos", a la vieja pregunta de si la matemática es invento o descubrimiento.

El criterio de no trivialidad por no obviedad o profundidad del enunciado de un teorema, a pesar de la eventual simplicidad de su demostración formal, está estrechamente ligado a los criterios racionales informales de relevancia de un enunciado matemático por su belleza estética y simplicidad. La mayoría de los investigadores en matemática pura reconocen su motivación en la búsqueda de la no trivialidad informal, es decir la profundidad del significado de los enunciados que crean o descubren. Además identifican belleza y relevancia en el contraste entre la no obviedad y la simplicidad de la relación hallada, cuando la demostración que encuentran, desde el punto de vista lógico-formal, se puede reducir a una cantidad breve de pasos deductivos relativamente elementales. Por ejemplo, Hardy sugiere que una de las condiciones necesarias para la percepción de belleza en la matemática es la economía de recursos formales.

Sin embargo, en la práctica de la comunicación y publicación de los resultados de la matemática pura, resulta hoy en día muy difícil encontrar ejemplos de enunciados nuevos no triviales, es decir profundos o no obvios, pero con demostraciones breves y sencillas. En primer lugar, el propio matemático frecuentemente autocensura sus resultados como triviales, y solo los difunde en forma de ejercicios cuando obtiene demostraciones breves y sencillas, aunque sus enunciados sean nuevos y muestren propiedades inesperadas y sorprendentes.

En segundo lugar, si el investigador matemático aún cree relevante su resultado a pesar de la sencillez de su demostración, y lo somete a publicación, con dificultad el árbitro se convencerá racionalmente de la no trivialidad. Por lo general, en un juicio de no trivialidad se considera primero el aspecto formal de la demostración, sobre todo si el autor no ha agregado una introducción que justifique de modo racional la no obviedad *a priori* y la profundidad de las relaciones halladas en sus enunciados.

Un criterio de no trivialidad usado para un teorema nuevo en los arbitrajes de las comunicaciones científicas de matemática termina a veces limitándose a "medir la longitud" de su demostración, verificar que no esté artificialmente alargada y a "contar las dificultades exitosamente sorteadas" durante su construcción. Si estas mediciones están por abajo de ciertas cotas, es usual que el teorema sea tildado de "trivial" y por lo tanto "irrelevante", y no sea publicado, aunque su enunciado sea racionalmente sorprendente e inesperado.

Esta postura conduce a veces a que las relaciones profundas que puedan existir entre conceptos matemáticos de origen independiente, o de subdisciplinas matemáticas diferentes, pueden ser difundidas muy parcialmente, solo como curiosidades o ejercicios, por fuera de la bibliografía científica arbitrada y reconocida.

Concluimos que, por un lado, el concepto de no trivialidad o no obviedad del enunciado de un teorema, y su percepción de profundidad por parte de los matemáticos durante la actividad de investigación, están estrechamente ligados a criterios racionales informales no cuantitativos de relevancia y a propiedades intrínsecas de las relaciones matemáticas contenidas en el enunciado, en forma parcialmente independiente de la economía o abundancia de recursos formales utilizados en la demostración. Pero, por otro, paradójicamente para la comunicación, aceptación y publicación de resultados matemáticos nuevos, la brevedad o sencillez de recursos formales necesarios para la demostración son con frecuencia consideradas señales de trivialidad u obviedad del enunciado.

4. Criterios de no redundancia lógico-formal y de redundancia óptima informal

La *redundancia lógico-formal global* de una subdisciplina o rama matemática es la propiedad de que al menos uno de sus enunciados se puede deducir de los demás. En este sentido, todo resultado "nuevo" de una subdisciplina matemática ya existente es redundante, excepto si para demostrarlo se requirió agregar definiciones o presupuestos nuevos, consistentes pero no deducibles de la teoría existente hasta el momento. Por este motivo la no redundancia lógico-formal, en su concepción global, no es un criterio aplicable de manera usual en la matemática para juzgar la relevancia de sus enunciados.

Los criterios de no redundancia lógico-formales que efectivamente se tienen en cuenta en un juicio de valor de enunciados matemáticos son dos, y establecen condiciones lógicas diferentes e independientes entre sí. Ambos son parciales en vez de globales.

El primero, que llamaremos *no redundancia mutua lógico-formal*, está restringido a las proposiciones condicionantes (los supuestos, que deben ser mutuamente consistentes) cuando forman parte de una única definición, de un mismo conjunto de axiomas o de la hipótesis de un mismo teorema. Es el siguiente criterio: el subconjunto de supuestos no es mutuamente redundante cuando ninguna de las proposiciones que lo forman puede deducirse de las demás. Es más un criterio de bondad del enunciado respectivo que de su relevancia. Es decir, aunque el enunciado contenga en sus supuestos redundancias mutuas lógico-formales no obvias (no triviales), puede aún ser relevante, aunque se le considere mejorable, no óptimo.

El segundo criterio de no redundancia lógico-formal de un teorema, que denominaremos *no redundancia relativa a la tesis*, también está restringido a las proposiciones condicionantes de la hipótesis de un mismo teorema. Pero en vez de considerar la no redundancia mutua, se tiene en cuenta la necesidad de cada proposición supuesta en la hipótesis para que se cumpla la tesis. El criterio es el siguiente: los supuestos en la hipótesis de un teorema son redundantes desde el punto de vista lógico-formal con respecto a la tesis de dicho teorema, si retirando por lo menos una de las proposiciones supuestas en la hipótesis, de las demás se puede deducir la misma tesis del teorema.

Expongamos un ejemplo de redundancia lógico-formal mutua de los supuestos de un enunciado. En la definición de los difeomorfismos de Anosov se establece como condición que el comportamiento dinámico de los subfibrados invariantes sea uniformemente hiperbólico. Un teorema no trivial, demostrado por ejemplo en Bonati (2005) y colegas, establece que si los subfibrados son invariantes y uniformemente hiperbólicos, entonces son continuos. Por lo tanto, esa propiedad de continuidad sería redundante si se le agregara a la definición de difeomorfismo de Anosov o a las hipótesis de un teorema que la presuponga.

Sin embargo, y aunque la continuidad de los subfibrados es una propiedad redundante respecto a las otras condiciones que definen la clase de difeomorfismos de Anosov, con frecuencia ¡se le agrega a la definición o a las hipótesis de los teoremas! Se le incluye racionalmente, aunque sea redundante desde el punto de vista lógico-formal. Por un lado, esa redundancia no es obvia y la continuidad de los subfibrados es una propiedad no trivial. Y, por otro, es una propiedad esencial y necesaria en las demostraciones de muchas características relevantes (dinámicas, topológicas y ergódicas) de los difeomorfismos de Anosov. Concluimos que el criterio de no redundancia lógico-formal puede no aplicarse en algunos casos porque predomina el criterio de no trivialidad racional informal. Aun así, en esos casos se acostumbra salvaguardar la forma agregando una nota que advierte de la redundancia lógico-formal mutua de las condiciones supuestas.

Consideremos ahora un ejemplo de no redundancia lógico-formal de cada supuesto en la hipótesis de un teorema con respecto a su tesis. El siguiente caso no corresponde a la investigación matemática actual, sino a la enseñanza de la matemática universitaria. Pero de todas formas es ilustrativo de los criterios de evaluación de redundancias de los supuestos respecto a la tesis durante los procesos de investigación en la disciplina. El conocido teorema de Picard (véase, por ejemplo, Sotomayor) establece que existe y es única la solución con dato inicial de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\textbf{(1)}\ dx/dt = F(x),$$

donde la función F es continua y lipschitziana. La demostración clásica de este teorema tiene dos partes no triviales: una, la prueba de existencia, y otra, la prueba de unicidad, que aunque no trivial resulta relativamente sencilla basada en la demostración previa de la existencia. Nos interesa observar que la parte más relevante de la demostración, la de existencia de solución, no requiere en realidad la hipótesis de Lipschitz de la función F. Más precisamente, el teorema de Peano (véase, por ejemplo, Sotomayor) establece que existe la solución con dato inicial de la ecuación diferencial **(1)** cuando la función F del segundo miembro es continua, aunque no sea lipschitziana. Por lo tanto, si la tesis por demostrar fuera solamente la existencia de solución, la hipótesis de Lipschitz sería redundante respecto a la tesis.

Pero la tesis del teorema de Picard afirma también la unicidad de la solución. Y aunque la demostración de esa unicidad sea formalmente fácil de obtener a partir de la demostración de existencia, la hipótesis de Lipschitz no es redundante. En efecto, es clásico el ejemplo de la ecuación diferencial $dx/dt = F(x)$ donde F es la función raíz cuadrada. Para ella existe solución con dato inicial $x(0)= 0$, pero no es única. Ese ejemplo muestra la no redundancia de la hipótesis de Lipschitz respecto a la tesis de unicidad del teorema de Picard, y por lo tanto, la relevancia de esta condición, independientemente de que solo se utilice en la parte más sencilla de la demostración.

En la mayoría de los casos, cuando no es obvia, puede resultar difícil verificar la no redundancia lógico-formal de los supuestos de un teorema, tanto la mutua en las proposiciones de la hipótesis, como la de cada una de esas proposiciones relativas a la tesis. En la matemática actual es frecuente la aparición de nuevos teoremas no triviales, que establecen que un cierto supuesto de la hipótesis de un teorema previo era redundante con relación a la tesis.

En general, un juicio de valor racional de un teorema nuevo verifica, además de la consistencia y la no trivialidad, la siguiente condición para la no redundancia lógico-formal. Esta consiste en que ninguna de las proposiciones supuestas en la hipótesis de un nuevo teorema sea omitida, u obviamente omisible, a lo largo de todos los pasos deductivos de su demostración. Nos referimos a la demostración dada, no necesariamente a cualquier otra demostración que pueda encontrarse en el futuro para el mismo teorema. Sin embargo, aunque necesaria, esta verificación por sí sola no asegura la no redundancia (también llamada *necesidad*) de ese supuesto particular, para obtener la misma tesis del teorema mediante alguna otra demostración aún no conocida, a menos que se dé un contraejemplo. Un tal contraejemplo, que prueba la no redundancia de cada proposición de la hipótesis respecto a la tesis de un teorema, es un caso particular en que se cumplen todos, excepto uno, los supuestos en la hipótesis; no se cumple ese uno, y no se cumple la tesis del teorema. Nos referimos solamente a la necesidad de cada supuesto hipotético por separado, asumiendo verdaderos los demás y la tesis del teorema. Por lo tanto, un criterio de relevancia lógico-formal de un teorema nuevo considera positivamente, pero no obligatoriamente, los contraejemplos que puedan suministrarse además del enunciado del teorema, que prueben que ninguno de los supuestos en la hipótesis es redundante respecto a la tesis.

Otra cuestión relacionada con la no redundancia de los supuestos, relativa a la tesis de un teorema, en general más difícil de evaluar que la que definimos arriba, es la necesidad de todos los supuestos de la hipótesis a la vez, para que valga la tesis. Más precisamente, la no redundancia de las hipótesis de un teorema respecto a la tesis es *total* cuando las proposiciones de la tesis implican por deducción la verdad de todas las proposiciones de la hipótesis a la vez. Esta cuestión ya no se denomina en matemática propiedad de no redundancia de la hipótesis, sino una propiedad mucho más fuerte, llamada *caracterización* de la tesis. Es, desde el punto de vista lógico-formal, equivalente a la verdad del teorema recíproco.

Con frecuencia, exceptuando los contraejemplos triviales, es muy difícil que un teorema nuevo sea enunciado por primera vez acompañado de contraejemplos que prueban la necesidad (es decir, la no redundancia respecto a la tesis) de cada uno de los supuestos en su hipótesis. Una de las fuentes de las conjeturas que plantean los matemáticos investigadores, e incorporan a sus agendas de investigación, es precisamente la pregunta de si alguna de las afirmaciones asumidas en la hipótesis de un teorema ya conocido es necesaria, es decir, no redundante con respecto a la tesis del teorema (y a las demás proposiciones de su hipótesis).

Por ejemplo, en 1977 Pesin formuló por primera vez que para todos los difeomorfismos de Anosov de clase C2, las medidas llamadas "físicas" (*i.e.* medidas de probabilidad que describen la estadística de órbitas típicas según Lebesgue) verifican una igualdad para la entropía, que luego se denominó *fórmula de Pesin de la entropía* (Mañé). Esta es una igualdad matemática entre la entropía métrica y el promedio espacial del logaritmo de la tasa de dilatación. La demostración de la fórmula de Pesin usa en forma esencial el supuesto hipotético de que el difeomorfismo es de clase C2. Es sin duda una hipótesis no redundante para que *esa demostración* del teorema funcione. Sin embargo, recientemente se descubrió que es redundante desde el punto de vista lógico-formal con respecto a la tesis. Más precisamente, no es necesario que el difeomorfismo de Anosov sea de clase C2 para que toda medida física satisfaga la fórmula de Pesin de la entropía (véase, por ejemplo, Cerminara, Catsigeras y Enrich).

¿Pierde con este nuevo resultado su relevancia, respecto a la fórmula de Pesin, la vieja hipótesis de regularidad C2? En nuestra opinión, a favor de la cual argumentaremos a continuación, y según los argumentos racionales informales de buena parte de los matemáticos que investigan en la teoría ergódica diferenciable, la respuesta es "No, no la pierde en absoluto".

En efecto, la hipótesis de regularidad C2, si bien no es necesaria para deducir que las medidas físicas satisfacen la fórmula de Pesin, sí lo es para que el procedimiento anterior de demostración de esta fórmula, vía la propiedad de continuidad absoluta de las foliaciones invariantes, sea válida. Por un lado, la comunidad matemática especializada en teoría ergódica diferenciable la considera relevante en sí misma según prácticamente todos los criterios racionales informales que discutimos y analizamos en este trabajo. Por otro, la demostración anterior de la fórmula de Pesin muestra, como paso intermedio, no solo que las medidas físicas la satisfacen, sino que estas medidas son absolutamente continuas respecto a la foliación inestable. Y este resultado, que no sería cierto sin la hipótesis de regularidad C2 (como muestra el contraejemplo de Robinson y Young) tiene relevancia en sí mismo: se considera no solo una herramienta de demostración, sino una propiedad no trivial relevante del sistema dinámico.

El ejemplo anterior muestra otra vez que los criterios lógico-formales de no redundancia pueden ser, en la práctica de la investigación matemática actual, inocuos respecto a un juicio de relevancia de enunciados, cediendo su lugar a criterios racionales informales de relevancia. Es una de las razones por las que nos afiliamos a la integración de los criterios lógico-formales con los otros criterios racionales, pero informales, en los juicios de valor del quehacer de la investigación matemática.

En la siguiente discusión distinguiremos dos sitios donde la redundancia racional informal, en vez de la no redundancia lógico-formal, puede incidir positivamente en un juicio de relevancia de los resultados: la del proceso creativo o de descubrimiento de los enunciados matemáticos, y la de su proceso de comunicación.

Es frecuente que los matemáticos se ocupen de la comprensión profunda de los resultados matemáticos y procuren comunicar el aspecto significativo de los contenidos, además de exponer la lógica formal deductiva de las demostraciones. Como muchas actividades humanas no exactas, la comunicación de la matemática (y aunque la matemática sea una ciencia exacta, su comunicación no lo es) requiere redundancia en la transmisión de información, para que los errores de expresión e interpretación puedan ser corregidos, o por lo menos detectados, y minimizar sus efectos negativos en la eficiencia de la comunicación. Aunque usa símbolos y notación muy específicos, el lenguaje matemático es un lenguaje humano. Definamos la *entropía del error* como la tasa de expansión de la cantidad de información que es diferente entre la información transmitida y la recibida (estas diferencias son los "errores" en la transmisión).

> A pesar que raramente es mostrado en modelos diagramáticos del proceso de comunicación, la redundancia –la repetición de elementos dentro de un mensaje que previene el error en la comunicación de información– es el mayor antídoto a la entropía (Gordon 2).

La mayor parte de los lenguajes escritos y hablados, por ejemplo, son aproximadamente 50 % redundantes. En el lenguaje humano escrito o hablado, se podría reducir a un 50 % la cantidad de elementos, símbolos o códigos transmitidos, sin alterar la cantidad de información que se aspira a comunicar. Aunque si se efectuara esa reducción, la seguridad por eventuales errores en la comunicación sería nula.

La redundancia natural en todo lenguaje humano (y quizás el lenguaje matemático sea de los que tienen menor redundancia entre todos ellos) es el mismo fenómeno físico de la redundancia artificial de los medios de transmisión de la ingeniería moderna, que se diseña para aumentar la seguridad de las comunicaciones digitales. Y también es el mismo fenómeno físico de la redundancia exhibida en numerosos procesos naturales. Por ejemplo, en el análisis matemático estadístico de series temporales de datos, para estudiar fenómenos naturales como el estado del tiempo entre otras aplicaciones, se llama *redundancia* a la diferencia de la suma de las entropías (definida la entropía, en este caso, como el crecimiento de la cantidad de información significativa, y no como crecimiento de los errores de la información) de todas las variables por separado, menos la entropía conjunta de esas variables. Dicho de otra forma, la cantidad de información de la serie de datos no es la suma de la información de cada dato por separado, sino que es esta suma menos la redundancia. Esta redundancia es mayor cuando más mutuamente dependiente son los datos estudiados. Por lo tanto, a igual cantidad de información de los datos por separado, cuanto mayor es la redundancia, más reducida es la cantidad de información significativa que se obtiene de ellos. Pero es justamente esta redundancia entre los datos lo que permite hacer predicciones matemáticas: cuanto mayor redundancia, más previsible será la evolución futura de un fenómeno natural estudiado o artificial diseñado.

Por razones de confiabilidad, se introduce natural o artificialmente cierta cantidad de redundancia, la cual implica un sobredimensionamiento de los canales de transmisión o soporte de conservación de esa información. Es decir, cuanto mayor es la redundancia, y por lo tanto mayor es la seguridad y fidelidad en la comunicación y en la información transmitida, menor es el aprovechamiento de los recursos necesarios para transmitirla. En efecto, por ejemplo en la teoría de las telecomunicaciones:

> Mediante el proceso de conversión analógico-digital, cualquier medio disponible de telecomunicaciones tiene una capacidad limitada para la transmisión de datos. Esta capacidad es comúnmente medida por un parámetro llamado “ancho de banda”. Como el ancho de banda de una señal aumenta con el número de bits a ser transmitidos, una función importante en el sistema digital de comunicaciones es representar la señal digitalizada con la menor cantidad posible de bits (Lehnert 1).

Pero para obtener eficiencia usando la menor cantidad posible de bits habría que reducir a cero la redundancia en la cantidad de información de la señal, y por lo tanto la seguridad y confiabilidad de su transmisión. Esto muestra que, al comunicar información, existe un compromiso entre la seguridad-confiabilidad en la transmisión de esa información, y la eficiencia en el uso del medio de transmisión utilizado. Al aumentar la redundancia, se incrementa la primera pero se disminuye la segunda. Por lo tanto, la situación óptima, según sea el objetivo del que comunica, se encuentra en un valor intermedio de redundancia, que no es nulo pero tampoco 100 %.

En la comunicación de resultados matemáticos, aparece este mismo compromiso. Por ejemplo, artículos matemáticos que contienen resultados muy relevantes y son publicados en las revistas científicas más importantes, con frecuencia son más largos que el promedio de los artículos matemáticos publicados en otras revistas científicas. Esto sucede no solo porque la cantidad de enunciados de cada artículo excepcionalmente relevante sea relativamente grande, y sus demostraciones largas y complicadas, sino porque también contienen –por lo general en la introducción y en notas remarcadas a lo largo del artículo– explicaciones sobre el significado profundo de esos enunciados y su relación con otros resultados ya conocidos. Estas explicaciones, desde el punto de vista lógico-formal son redundantes, pero a veces son imprescindibles en la búsqueda de efectividad y calidad de la comunicación matemática.

Resulta paradójico que, exceptuando casos como los descritos arriba, en buena parte de la bibliografía de investigación científica en matemática de hoy en día, a pesar de que el recurso de transmisión de información utilizado (por ejemplo, publicación en línea, en vez impresa) es abundante y de relativo bajo costo, algunos de los artículos sean escuetos, excesivamente concisos, y con poca redundancia en la comunicación. Esto quizás se deba a que, para enunciados matemáticos no excepcionalmente relevantes, no sea tan necesaria la redundancia, pues cuando más fácil de comprender o menos profundo es un enunciado, menos sujeto está a errores en su transmisión o comunicación. La concisión, evitando la redundancia tanto formal-lógica como informal en la comunicación de resultados de investigación, es también coherente con una postura filosófica minimalista, frecuente entre algunos matemáticos.

Previo a un juicio de no redundancia de los supuestos de un enunciado, es habitual que el investigador matemático procese su comprensión profunda de esos supuestos a través de un argumento por condicionantes contrafactuales. Estos son condicionantes que suponen la negación de proposiciones asumidas con anterioridad. En el ejemplo del teorema de Picard expuesto antes, si un estudiante tuviera que investigar la no redundancia de la hipótesis de Lipschitz, el condicionante contrafactual que asumiría es "Si F no fuera Lipschitz...". En ese caso la conclusión de no redundancia de la hipótesis de Lipschitz establecería: "entonces la solución con dato inicial podría no ser única". Sin embargo, esa conclusión no se obtiene por *deducción* lógico-formal (en este ejemplo). Bajo el condicionante contrafactual, es falso que la solución con dato inicial sea necesariamente no única, como podría esperar el estudiante. Es decir, no es en este caso solo un proceso deductivo el que lleva el condicionante contrafactual a la conclusión de no redundancia de la hipótesis que niega. Concluimos que la discusión de los supuestos contrafactuales racionales puede trascender la argumentación lógico-formal, y corresponde a una concepción filosófica de racionalidad informal.

En el ejemplo que estamos discutiendo, la prueba de no redundancia de la hipótesis de Lipschitz en el teorema de Picard requiere exhibir un contraejemplo para el cual se verifique ese condicionante, pero para el cual la solución no sea única. Justamente, imaginar o descubrir ese contraejemplo no es un resultado que se obtiene aplicando solo leyes lógico-formales. No se construye el contraejemplo meramente por deducción, sino que requiere de la creación e imaginación del investigador. "La habilidad humana de pensar racionalmente sobre situaciones hipotéticas y relaciones condicionantes se apoya en la capacidad de imaginar posibilidades" (Laird citado en Byrne 441).

¿Pero es la creación e imaginación en matemática un proceso racional? Efectivamente lo es, afiliándonos a la definición de imaginación racional de Byrne. "En el pasado, racionalidad e imaginación eran vistas como opuestos. Pero la investigación ha mostrado que el pensamiento racional es más imaginativo de lo que se suponía" (439). En particular, la imaginación racional por condicionantes contrafactuales en matemática permite crear alternativas en la búsqueda de nuevo conocimiento en la subdisciplina que se investiga. Aunque el proceso de imaginación es informal, en la creación de conocimiento matemático es racional. En efecto, "los mismos principios del pensamiento racional conducen también al pensamiento imaginativo ... y el puente entre la racionalidad y la imaginación puede ser construido sobre condicionales contrafactuales" (Byrne 441). Sin embargo, aunque racional, la redundancia entre conjuntos de enunciados requerida durante los procesos de creación e imaginación en los que la investigación matemática se apoya no sigue un algoritmo lógico-formal descriptible paso a paso. Por lo tanto, esa redundancia, y la manera en la que la imaginación matemática se basa en ella, son conceptos racionales informales. Concluimos que la actividad de creación e imaginación racional del investigador matemático le permite formular conjeturas, ejemplos, contraejemplos, y tentativas de enunciados sobre los que construye y actúa su investigación. En ese proceso, las redundancias lógico-formales e informales constituyen un ingrediente esencial. No lo son solamente por las propiedades psicológicas de la creación e imaginación humanas, sino también por las características intrínsecas del proceso de investigación racional de la matemática, y por las características profundas de esta disciplina. Más aún, del proceso de creación e imaginación racional en matemática se aspira a encontrar relaciones no triviales entre enunciados previos o nuevos.

Es justamente la búsqueda de redundancias en esa información, que es anterior a los juicios de verdad en matemática, el camino que conduce la investigación. Pero si el conjunto de enunciados sobre los que se investiga no fueran redundantes, esas relaciones buscadas no existirían, debido a la definición misma de independencia o no redundancia de la cantidad de información de cada uno. Si bien el investigador matemático con frecuencia no toma conciencia ni obtiene una medición precisa de la redundancia requerida entre los enunciados que considera en sus procesos de creación e imaginación racional, es con base en ella que puede construir el conocimiento matemático nuevo.

5. Conclusión

Expusimos y discutimos varias definiciones, ilustradas con ejemplos, de los conceptos de consistencia, no trivialidad y redundancia en la investigación de la matemática actual, tanto desde el punto de vista lógico-formal como del racional informal. Discutimos esos conceptos, argumentando a favor de una postura, en cuanto a los criterios que inciden en los juicios de relevancia matemática, acorde con una filosofía de racionalidad formal e informal integrada. Aunque quizás no tanto como en áreas científicas basadas en la experimentación y en las evidencias empíricas, en la matemática también está presente la racionalidad informal y complementa los criterios de racionalidad lógico-formales para integrar los juicios de relevancia de sus enunciados.

Trabajos citados

Anosov, D. V. "Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds of Negative Curvature". *Proceedings Steklov Institut*e 90 (1967): 1-235.

Bonatti, C., Diaz, L., Viana M. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity: A Global Geometric and Probabilistic Perspective*. Berlín-Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.

Byrne, R. "Précis of The Rational Imagination: How People Create Alternatives to Reality". *Behavioral and Brain Sciences* 30 (2007): 439-480.

Cerminara, M., E. Catsigeras & H. Enrich. "The Pesin Entropy Formula for C1 Diffeomorphisms with Dominated Splitting". *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 35 (2015): 737-761. Cook, J. W. "Did Wittgenstein Practice What He Preached?" *Philosophy* 81 (2006): 445-462.

Enrich H. & E. Catsigeras. "SRB-like Measures for C0 Dynamics". *Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Mathematics* 59 (2011): 151-164.

Gordon, G. N. "Communication". *Encyclopaedia Britannica*. University of Kent. 26 jul. 1999. Web. 17 ag. 2016.

Gray, J. "Depth- A Gaussian Tradition in Mathematics". *Philosophia Mathematica* 23 (2015): 177-195.

Hardy, G. H. *A Mathematicians's Apology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.

Lehnert, J. "Telecommunication". *Encyclopaedia Brittannica*. The Telecomunication 2.

History Group. 11 ag. 1998. Web. 27 febr. 2016.

Livio, M. "Why Math Works?" *Scientific American* 305.2 (2011): 80-83.

Mañé, R. "A Proof of Pesin's Formula". *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 1 (1981): 95-102.

Mirollo R. E. & S. H. Strogatz. "Synchronization of Pulse-coupled Biological Oscillators". *Society of Industrial and Applied Mathematics Journal* 50 (1990): 1645-1662.

Pesin, Y. "Characteristic Lyapunnov Exponents and Smooth Ergodic Theory". *Russian Mathematics Surveys* 32. 4 (1977): 55-114.

Putnam, H. *Reason, Truth and History*. Cambridge University Press: Editorial Tecnos, 1981. Traducción al castellano *Razón, verdad e historia*, Madrid: 2006.

Robinson, C. & L. S. Young "Nonabsolutely Continuous Foliations for an Anosov Diffeomorphism". *Inventiones mathematicae* 61.2 (1980): 159-176.

Shanks, D. "Is the Quadratic Reciprocity Law a Deep Theorem?" *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*. 4th ed. New York: Chelsea Publ., 1993. 64-66.

Sinai, Ya. G. "Gibbs Measures in Ergodic Theory". *Russian Mathematics Surveys* 27.4 (1972): 21-69.

Sotomayor, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Río de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

Tao, T. "What is Good Mathematics?" *Bulletin of the American Mathematical Society* 44.4 (2007): 623-634.

Tarski, A. *Introduction to Logic and Methodology of Deductive Sciences*. 2nd ed. New York: Dover Publ. Inc., 1946.

Weisstein, E. "Trivial". *Wolfram Math World, Foundations of Mathematics*. 1997. Web. New York. W.W. Norton. 69-72.