



Acta Universitaria

ISSN: 0188-6266

actauniversitaria@ugto.mx

Universidad de Guanajuato

México

Ureña-López, Luis Arturo

Sistemas Dinámicos Cosmológicos: Puntos y Líneas para la Evolución del Universo

Acta Universitaria, vol. 19, núm. 2, septiembre, 2009, pp. 15-21

Universidad de Guanajuato

Guanajuato, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41612893002>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Sistemas Dinámicos Cosmológicos: Puntos y Líneas para la Evolución del Universo

Luis Arturo Ureña-López*

RESUMEN

Después de una breve descripción del Modelo Estándar de la Cosmología, se presentan las ecuaciones cosmológicas y la manera de resolverlas utilizando las herramientas matemáticas de los sistemas dinámicos. Se muestra que las propiedades principales de la evolución del Universo pueden ser descritas en términos de puntos críticos y líneas heteroclinas sobre el espacio fase de variables cosmológicas elegidas apropiadamente.

ABSTRACT

After a brief description of the Standard Model of Cosmology, we present the cosmological equations and how they can be solved using the mathematical tools of dynamical systems. It is then shown that the main properties of the evolution of the Universe can be given in terms of critical points and heteroclinic lines on the phase space of appropriate cosmological variables.

Recibido: 15 de Junio de 2009
Aceptado: 25 de Julio de 2009

INTRODUCCIÓN

Es ya tradición en la literatura especializada el tomar el año de 1998 como un parteaguas en la Cosmología moderna. Fue en este año que se dieron a conocer los resultados de las observaciones de un considerable número de supernovas tipo Ia, por dos colaboraciones científicas distintas (SCP, 2009; High-z, 2009), que sorpresivamente indicaron que el Universo se expande *aceleradamente*.

Las observaciones sobre supernovas tipo Ia cerraron un primer capítulo importante de la Cosmología en el que la pregunta central es: ¿De qué está hecho el Universo? Podemos decir que los esfuerzos de la humanidad para contestar esta interrogante han estado presentes a lo largo de toda su historia. Sin embargo, una sorpresa fue develándose poco a poco a lo largo del siglo XX y para 1998 se había convertido en una certeza: la mayor parte del contenido material de nuestro Universo observable (96% del total) está hecho de materia aún desconocida para la ciencia. Este es el acertijo central de lo que se venía llamando de manera genérica como el problema de la *Materia Oscura* (Dark Matter, según su denominación en inglés), ver la figura 1 y 2.

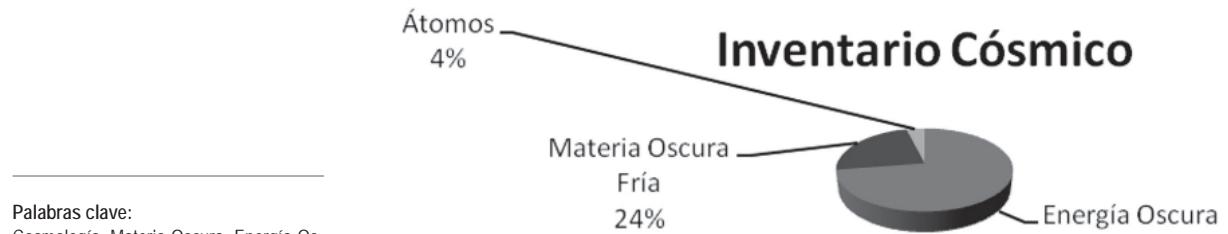


Figura 1. El llamado “Pay Cósmico”, que representa de manera gráfica las porciones materiales atribuidas a nuestro Universo por la Cosmología moderna. Según estimaciones, el 96% está formado por la Materia Oscura Fría y la Energía Oscura, materias de naturaleza desconocida.

Palabras clave:
Cosmología; Materia Oscura; Energía Oscura; Sistemas dinámicos.

Keywords:
Cosmology; Dark matter; Dark energy; Dynamics systems.

* Departamento de Física, División de Ciencias e Ingenierías del Campus León, Universidad de Guanajuato, CP 37150, León, Gto., México. Tel./Fax: 477 7885100, ext. 8436/477, 7885100, ext. 8410. Correo electrónico: lurena@fisica.ugto.mx.



Figura 2. Al mirar las imágenes tan impresionantes (Cúmulo de Abell, izquierda) obtenidas por el Telescopio Espacial Hubble (derecha), no se puede evitar que venga a nuestra mente de nuevo la pregunta milenaria: ¿de qué está hecho el Universo? Fotos tomadas del HubbleSite (HubbleSite, 2009).

A partir del descubrimiento de la expansión acelerada del Universo, se cayó en la cuenta de que la Materia Oscura debía estar compuesta de al menos dos tipos generales de nueva materia: la *Materia Oscura Fría* (Cold Dark Matter, CDM, por su nombre en inglés), que formaría las galaxias y en general la estructura cosmológica que hoy observamos, y la *Energía Oscura* (Dark Energy, DE, por su nombre en inglés) que sería la responsable directa de la expansión acelerada del Universo (Peebles, 1993; Padmanabhan, 1994; SCP, 2009; Perlmutter, 2003; LAMBDA, 2009).

Para entender cómo es que se ha llegado hasta tales conclusiones en la Cosmología moderna, tenemos que recordar que toda observación necesita de un modelo teórico que le dé sustento (Ruiz & Ayala, 1999). En nuestro caso, debemos recurrir al llamado Modelo Estándar Cosmológico, el cual parte de ciertos principios y premisas para explicar las observaciones cosmológicas (Peebles, 1993; Padmanabhan, 1994; Liddle A. R., 2000).

Lo primero que debemos considerar es que la fuerza dominante en el Universo es la gravitatoria; segundo, que la gravedad es descrita por la Teoría de la Relatividad General enunciada por Albert Einstein en 1915 (Misner, Thorne, & Wheeler, 1973; Weinberg, 1972). En tercer lugar, la materia es representada por un fluido perfecto, cuyas propiedades físicas quedan enteramente representadas por su densidad de energía y su presión; también debemos especificar la ecuación de estado, que no es otra cosa más que la relación funcional entre la presión y la densidad de energía.

El siguiente paso consiste en establecer una hipótesis de trabajo acerca de las propiedades del espacio-tiempo. Una hipótesis muy sencilla es enunciar, como lo hizo el mismo Einstein en su primer modelo cosmológico, que el espacio-tiempo que describe la dinámica del Universo debe aparecer homogéneo (hecho de lo mismo en todas partes) e isotrópico (el mismo en todas direcciones) a todo observador del mismo. Este enunciado es conocido en la literatura especializada como el *Principio Cosmológico* (PC), también a veces llamado de Einstein, por ser el primero que lo propuso (Peebles, 1993).

El PC puede ser expresado matemáticamente al escribir el elemento de línea del espacio-tiempo del Universo en la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad \text{Ecuación 1}$$

Puede notarse que los últimos términos de la ecuación de arriba nos recuerdan al elemento de línea de la geometría Euclídea; de manera general, la ecuación también nos recuerda al elemento de línea del espacio-tiempo de Minkowski excepto por la presencia del factor de escala $a(t)$, el cual depende sólo del tiempo (tal y como debe ser para cualquier función cosmológica de acuerdo al PC). Debido a las similitudes descritas arriba, es que se conoce a la ecuación Ecuación 1 como el elemento de línea de un universo plano.

La ecuación Ecuación 1 no es la forma más general compatible con el PC, ya que existen otras dos variantes conocidas como el universo cerrado y el universo

abierto. Sin embargo, las observaciones cosmológicas indican que nuestro universo es plano en muy buena aproximación (LAMBDA, 2009), por lo que lo consideraremos así por el resto de este artículo.

La evolución dinámica del espacio-tiempo está determinada por las ecuaciones de Einstein de la Teoría de la Relatividad General, las cuales para nuestro caso particular son la ecuación (de restricción) de Friedmann:

Ecuación 2

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i,$$

donde el punto en las variables denota derivada con respecto del tiempo; y la ecuación de aceleración:

Ecuación 3

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = \frac{8\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i).$$

Las cantidades ρ_i son las densidades de energía (no confundir con densidades de masa) de cada fluido material presente en el Universo, mientras que p_i representan las presiones de esos mismos fluidos. Las ecuaciones de la Cosmología parecen sencillas, pero sus soluciones no son triviales y pueden dar lugar a comportamientos muy diversos para la expansión del Universo dependiendo de su contenido material.

Por otro lado, se requieren ecuaciones extras para determinar el comportamiento de las densidades de energía y las presiones de cada uno de los fluidos perfectos. Debemos entonces agregar para cada fluido la conservación de su tensor de energía-momento que en nuestro caso resulta en la ecuación

Ecuación 4

$$\dot{\rho}_i = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_i + p_i).$$

Además, agregaremos la suposición de que la ecuación de estado es de la forma llamada barotrópica, y entonces $p_i = w_i \rho_i$ donde w_i es una constante determinada a través de la información física que tengamos a la mano del fluido en cuestión. Los casos más socorridos en la Cosmología son el de materia relativista ($w = 1/3$), materia no-relativista ($w = 0$), y la constante cosmológica ($w = -1$).

Una vez determinados los valores de la ecuación de estado para cada fluido, las ecuaciones forman un conjunto completo que nos permite encontrar las soluciones de las distintas variables y su evolución en el tiempo. En la Tabla 1 presentamos un resumen de las distintas etapas del Universo, según se desprende de las ecuaciones y observaciones cosmológicas, poniendo en cada una de ellas las escalas de tiempo, temperatura y energía que les corresponden.

Tabla 1.

Distintas etapas en la evolución del Universo, de acuerdo al Modelo Estándar de la Cosmología (datos tomados de (Liddle & Lyth, 2000)).

Tiempo	Escala de energía	Evento
10^{-42} s	10^{18} GeV	Comienzo de inflación
$10^{-32 \pm 6}$ s	$10^{-13 \pm 3}$ GeV	Final de Inflación
$10^{-18 \pm 6}$ s	$10^{-6 \pm 3}$ GeV	Comienzo del Big Bang
10^{-2} s	10 MeV	Bariones y fotones en equilibrio (dominación de materia relativista)
1 s	1 MeV	Desacople de los neutrinos
100 s	0,1 MeV	Nucleosíntesis
10^4 años	1 eV	Igualdad de materia-radiación (dominación de materia no-relativista)
10^5 años	0,1 eV	Formación de los primeros átomos
10^9 años	10^{-3} eV	Formación de galaxias (dominación de la energía oscura)
13.7×10^9 años	10^{-4} eV	Tiempo presente

Independientemente de los valores numéricos del tiempo y la energía del Universo, básicamente podemos decir que hay tres etapas principales. La primera es la etapa de la *dominación de la materia relativista*, ya que la temperatura del Universo es tan alta que sus componentes materiales se mueven a velocidades relativistas.

Esto va a cambiar eventualmente ya que el Universo se enfria al expandirse, hasta que comienza la segunda etapa que corresponde a la *dominación de la materia no-relativista*, cuya componente principal es lo que conocemos como Materia Oscura Fría. Esta etapa es importante ya que en ella se dan los procesos que dan lugar a la formación (principalmente) de galaxias, lo cual sucede hasta que el Universo tiene una edad de unos cuantos miles de millones de años.

Por último, comienza la *dominación de la energía oscura* con lo cual prácticamente termina la formación de nuevas estructuras cosmológicas y comienza la etapa de expansión acelerada, la cual continúa en la época presente.

Lo arriba descrito sobre la evolución del Universo es resultado del análisis minucioso que diversos investigadores han realizado en los úl-

timos 90 años, y se tiene la convicción (basada en la confrontación de la teoría con las observaciones cosmológicas) de que el Universo debió pasar por esas etapas. Es por eso que a este cuadro general se le conoce como el *Modelo Estándar Cosmológico*.

En la sección siguiente hablaremos de cómo se pueden escribir las ecuaciones cosmológicas en la forma de un sistema dinámico y la información general que podemos obtener sobre las etapas de evolución del Universo.

SISTEMAS DINÁMICOS COSMOLOGICOS

Lo que viene a continuación no pretende ser una presentación exhaustiva de la teoría formal detrás de los sistemas dinámicos y su aplicación en Cosmología (ver por ejemplo la referencia (Coley, 1999; Copeland, Sami, & Tsujikawa, 2006)), sino una introducción breve de sus principales características formales y su interpretación física.

En primer lugar, debemos escribir las ecuaciones cosmológicas en la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Aún cuando existen en principio muchas formas de hacer eso, nos limitaremos al procedimiento más socorrido en la literatura especializada el cual es como sigue:

Realizamos un cambio en la variable temporal y reemplazamos el tiempo cósmico por la variable $N(t) := \log[a(t)]$. Siempre y cuando el factor de escala sea una función monótona del tiempo es que podemos hacer este reemplazo de manera segura y pensar efectivamente en la variable N como nuestro nuevo parámetro temporal.

En segundo lugar, elegimos nuevas variables físicas que también simplifiquen la escritura del sistema dinámico. Una elección afortunada lo son los llamados parámetros de densidad:

Ecuación 5

$$x_i := \frac{8\pi G \rho_i}{3H^2},$$

los cuales son cantidades adimensionales y su interpretación física es que representan la proporción con respecto del total con la que contribuye cada componente material del Universo. De hecho, la ecuación de Friedmann luce de manera explícita como una constricción algebraica cuando la escribimos en términos de los parámetros de densidad

Ecuación 6

$$1 = \sum_i x_i.$$

Que la suma de los parámetros de densidad sea exactamente igual a la unidad no es más que reflejo de la suposición en este artículo de que la curvatura del espaciotiempo del Universo es nula.

Tomando los parámetros de densidad como las variables dinámicas, las ecuaciones cosmológicas pueden entonces escribirse como un sistema dinámico. A continuación, escribiré el sistema dinámico correspondiente a un Universo con materia relativista (x_3), materia no-relativista (x_1) y una constante cosmológica (x_2):

Ecuación 7

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - 4x_2),$$

Ecuación 8

$$\dot{x}_2 = x_2(4 - x_1 - 4x_2),$$

donde las primas ahora significan derivada respecto de la variable N definida anteriormente. La ecuación de la tercera componente no aparece debido a que utilicé la constricción de Friedmann para sustituirla en las ecuaciones anteriores; es decir, la materia relativista puede determinarse a partir de la ecuación: $x_3 = 1 - x_1 - x_2$.

El sistema dinámico resultante tiene dos características que facilitan el estudio de las soluciones cosmológicas. La primera es que el sistema dinámico es autónomo y entonces los lados derechos de las ecuaciones no contienen la presencia explícita de la variable temporal. La segunda es que es un sistema dinámico bidimensional, lo cual facilita su visualización en gráficas como la mostrada en la figura 3.

La gráfica se conoce como espacio fase y los vectores (normalizados) en ella representan el campo de velocidades del sistema dinámico. Cada vector en un punto indica la dirección de la velocidad de la trayectoria que pasa por ese mismo punto; además, cada trayectoria en el espacio fase es única (no hay trayectorias que se crucen en punto alguno del espacio fase) y representa la integración completa del sistema dinámico y su evolución en el tiempo.

Más aún, en la gráfica también puede apreciarse la existencia de los llamados puntos críticos y las trayectorias heteroclíneas. Los puntos críticos son aquellos puntos en donde el campo de velocidades es nulo y representan las soluciones de las ecuaciones algebraicas obtenidas al hacer $\dot{x}_1 = 0 = \dot{x}_2$. Para nuestro sistema dinámico, los puntos críticos son:

$$(x_{1,0}, x_{2,0}) = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}.$$

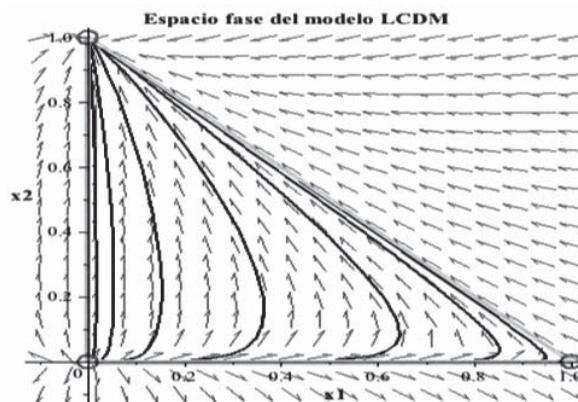


Figura 3. Visión gráfica del espacio fase del modelo cosmológico discutido en el texto. Las líneas en negro indican las soluciones numéricas del sistema dinámico, los círculos rojos indican los puntos críticos y las líneas en verde, que forman el perímetro de un triángulo rectángulo, representan las heteroclinas que unen entre sí a los puntos críticos. La línea correspondiente a nuestro Universo sería similar a la línea en negro que aparece en el extremo derecho de la gráfica. Figura obtenida con el programa matemático Maple (MapleSoft).

Cada uno de estos puntos tiene un significado. El origen $(0,0)$ representa la etapa de dominación de materia relativista; el punto $(1,0)$ a su vez representa la etapa de dominación de materia no relativista; y finalmente, el punto $(0,1)$ es la dominación de la constante cosmológica.

Por su propia definición, los puntos críticos son también soluciones del sistema dinámico y representan en principio soluciones estacionarias (por lo que también son a veces llamados puntos fijos) en las que el sistema debe permanecer si inicialmente fue puesto allí.

No obstante, no es suficientemente interesante sólo saber que el campo de velocidades se anula en los puntos críticos, sino que debemos también conocer el comportamiento del sistema en sus proximidades. Esto se logra realizando un análisis lineal de perturbaciones alrededor de los puntos críticos.

Suponemos primero que $x_1 = x_{1,0} + u$ y $x_2 = x_{2,0} + v$, donde u y v son cantidades pequeñas que representarán al sistema en la vecindad de los puntos críticos. Entonces, una expansión a primer orden del sistema dinámico nos arroja un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales lineales que puede escribirse de manera matricial como;

$$\text{Ecuación 9}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x_1 - 4x_2 & -4x_1 \\ -x_2 & 4 - 8x_2 - x_1 \end{pmatrix}_{x_0} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema lineal de ecuaciones puede escribirse de manera general como

Ecuación 10

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \vec{\eta}_1 e^{\lambda_1 N} + C_2 \vec{\eta}_2 e^{\lambda_2 N},$$

donde las λ 's y las $\vec{\eta}$'s son los valores propios (eigenvalores) y sus correspondientes vectores propios (eigenvectores) de la matriz de perturbaciones al ser evaluada en cada uno de los puntos críticos; las C 's representan constantes arbitrarias.

De manera general, llamamos estable al punto crítico cuyos valores propios son todos negativos (las perturbaciones decaen exponencialmente); punto silla al punto crítico para el cual los valores propios son de signo contrario (la solución presenta un modo decreciente y otro decreciente, ambos de manera exponencial); e inestable al punto crítico con ambos valores propios positivos (las perturbaciones crecen exponencialmente). En la Tabla 2 se presenta un resumen de los puntos críticos del sistema dinámico cosmológico.

Tabla 2.

Puntos críticos del sistema dinámico cosmológico para un Universo pleno que contiene Materia Relativista, Materia no-Relativista y una Constante Cosmológica.

x_1	x_2	Valores propios	Estabilidad	Significado
0	0	1;4	Inestable	Dominación de Radiación
1	0	-1;3	Silla	Dominación de Materia
0	1	-3;-4	Estable	Dominación de Constante Cosmológica

Como podemos ver, el punto crítico correspondiente a la dominación de materia relativista es inestable, mientras que el correspondiente a la dominación de materia no-relativista es un punto silla. Por último, el punto crítico de la dominación de constante cosmológica es estable. Este análisis tan sencillo nos permite recuperar la descripción más detallada de la evolución del Universo tratada en la sección anterior.

Inicialmente, el Universo se encontró en una etapa de dominación de materia relativista. Este estadio es inestable, por lo que inevitablemente el Universo debe alejarse de él y dirigirse hacia un estado donde domine la materia no-relativista. Por ser éste último un punto silla, el Universo no puede más que acercarse a ese punto pero no estacionarse en él. Al transcurrir el tiempo deberá alejarse y dirigirse al punto de domina-

ción de la constante cosmológica. Éste es el único punto estable del espacio fase, y el Universo se acercará asintóticamente hacia él sin que haya manera de que pueda retornar a alguno de los otros puntos críticos.

Para terminar esta sección, mencionaré a las trayectorias heteroclíneas que unen a los puntos críticos del espacio fase. Las heteroclíneas son soluciones del sistema dinámico que parten de un punto crítico silla o inestable y terminan en otro punto crítico que puede ser también silla o estable. Debido a la unicidad de las soluciones en el espacio fase, es claro que las heteroclíneas también son únicas y deben ser encontradas bajo condiciones muy particulares. En la figura 3 vemos las tres heteroclíneas características de nuestro sistema dinámico cosmológico; son muy sencillas, ya que forman el perímetro del triángulo rectángulo que tiene como vértices a los puntos críticos de interés.

Las condiciones especiales para encontrar a cada una de las heteroclíneas son: a) $x_2 = 0$ (Universo con sólo materia relativista y no-relativista), correspondiente a la heterocélnea vertical que parte del origen de coordenadas; b) $x_1 = 0$ (Universo con sólo materia relativista y una constante cosmológica), correspondiente a la heterocélnea horizontal que parte del origen de coordenadas; c) $x_1 + x_2 = 1$ (Universo con sólo materia no-relativista y una constante cosmológica), correspondiente a la heterocélnea que forma la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Las líneas heteroclíneas juegan también el papel de separatrices del espacio fase, y en nuestro ejemplo particular las 3 heteroclíneas delimitan la región del espacio fase que tiene un significado físico válido. Las trayectorias al interior del triángulo rectángulo satisfacen la restricción de Friedmann para un Universo plano; las regiones externas a aquél corresponderían a las otras dos posibles geometrías que mencionamos anteriormente. De aquí podemos deducir que el Universo, una vez iniciando con una curvatura definida, no puede por simple evolución cambiarla a alguna otra.

CONCLUSIONES

Como mencionamos anteriormente, es de gran importancia conocer las soluciones de las ecuaciones cosmológicas para poder interpretar las diferentes etapas por las que transita el Universo durante su evolución. En este respecto, los métodos y herramientas de los sistemas dinámicos han sido ampliamente usados en la literatura especializada para una gran variedad de modelos (como ejemplo se ilustran los tra-

bajos en (Ureña-López, 2005; Ureña-López & Reyes-Ibarra, On the dynamics of a quadratic scalar field potential, 2009; Caldera-Cabral, Maartens, & Ureña-López, 2009; Copeland, Sami, & Tsujikawa, 2006)). El ejemplo presentado aquí es de los más sencillos (tan sencillo que incluso tiene solución analítica completa (Ureña-López, Unveiling the dynamics of the Universe, 2006)), pero el procedimiento es el mismo incluso para modelos con propuestas más complicadas de Materia Oscura Fría y Energía Oscura.

Al final del día, hay una sencillez muy atractiva en el hecho de poder visualizar las propiedades generales de la evolución de nuestro Universo a través de puntos y curvas dibujados sobre un diagrama cartesiano. Tanto así que continuamente aparecen más y más trabajos especializados cuyas herramientas matemáticas principales son las de sistemas dinámicos. Es de esperarse que esta rama de las Matemáticas continúe aportando soluciones novedosas con las cuales podamos entender mejor a nuestro Universo.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado con los patrocinios del CONACYT (56946) y de PROMEP-UGTO-CA-3. El autor es también parte de la colaboración auspiciada por el Instituto Avanzado de Cosmología A.C.

REFERENCIAS

- Caldera-Cabral, G., Maartens, R., & Ureña-López, L. A. (2009). Dynamics of interacting dark energy. *Physical Review D*, 79, 063518.
- Coley, A. (1999). *arXiv.org*. Obtenido de Cornell University Library: <http://arXiv.org/abs/gr-qc/9910074>
- Copeland, E., Sami, M., & Tsujikawa, S. (2006). Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 15, 1753-1936.
- High-z. (2009). *High-z SN Search*. Obtenido de <http://www.cfa.harvard.edu/supernova/HighZ.html>
- HubbleSite. (2009). *HubbleSite*. Obtenido de <http://hubblesite.org/>
- LAMBDA. (2009). *Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis*. Obtenido de LAMBDA: <http://lambda.gsfc.nasa.gov>
- Liddle, A. R. (2000). *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley.
- Liddle, A., & Lyth, D. (2000). *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MapleSoft. (s.f.). *MapleSoft*. Obtenido de <http://www.maplesoft.com/>
- Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Freeman.

- Padmanabhan, T. (1994). *Structure formation in the Universe*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Peebles, J. (1993). *Principles of Physical Cosmology*. Princeton: Princeton University Press.
- Perlmutter, S. (2003). Supernovae, dark energy, and the accelerating Universe. *Physics Today*, 8.
- SCP. (2009). *Supernova Cosmology Project*. Obtenido de <http://supernova.lbl.gov>
- Urena-Lopez, L. A. (2005). Scalar phantom energy as a cosmological dynamical system. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 0509, 013.
- Ureña-López, L. A. (2006). *Unveiling the dynamics of the Universe*. Obtenido de <http://arXiv.org/abs/physics/0609181>
- Ureña-López, L. A., & Reyes-Ibarra, M. J. (2009). On the dynamics of a quadratic scalar field potential. *International Journal of Modern Physics D*, 18, 621-634.
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology*. Wiley.