

Castillo Ramírez, Claudia Estrella; Venegas-Martínez, Francisco; López-Herrera,  
Francisco

DETERMINACIÓN DE IMPUESTOS ÓPTIMOS POR CONTAMINACIÓN AMBIENTAL:  
UN ENFOQUE DE OPCIONES REALES

Revista Mexicana de Economía y Finanzas. Nueva Época / Mexican Journal of  
Economics and Finance, vol. 7, núm. 1, enero-junio, 2012, pp. 93-128  
Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas A.C.  
Distrito Federal, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=423739525005>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

# DETERMINACIÓN DE IMPUESTOS ÓPTIMOS POR CONTAMINACIÓN AMBIENTAL:UN ENFOQUE DE OPCIONES REALES

**Claudia Estrella Castillo Ramírez\***

*Universidad del Valle de México, Campus Coyoacán*

**Francisco Venegas-Martínez**

*Instituto Politecnico Nacional, Escuela Superior de Economía*

**Francisco López-Herrera**

*Facultad de Contaduría y Administración, División de Ingeniería, UNAM*

*(Recibido 6 de junio 2011, aceptado 20 de julio 2011)*

---

---

## Resumen

En este trabajo de investigación se determina en un juego de dos etapas el impuesto óptimo que debe pagar un consumidor que contamina el medio ambiente por el desecho de envolturas y recipientes de bienes de consumo. En la primera etapa el gobierno establece un umbral de contaminación y el consumidor determina el impuesto que está dispuesto a pagar por exceder dicho umbral. En la segunda etapa, el gobierno elige el nivel del umbral que maximiza su recaudación. Asimismo, se analiza el caso de los impuestos sobre contaminación cuando el desecho de la envoltura sigue un proceso de difusión con saltos y el tamaño del salto es guiado por una distribución de valores extremos. También, se desarrolla un modelo para la determinación del impuesto cuando el nivel de contaminación presenta volatilidad estocástica. Por último se emplea el método de simulación Monte Carlo para aproximar el valor de un impuesto óptimo.

## Abstract

In this investigation we determined the optimal tax in a game of two stages that must pay a consumer who contaminates the environment by the remainder of envelopes and containers of goods. In the first stage the government establishes a contamination threshold and the consumer determines the tax that is prepared to pay to exceed this threshold. In the second stage, the government chooses the level of the threshold that maximizes its collection. Also, in this work we analyzes the case of the taxes on contamination when the remainder of the envelope follows a process of diffusion with jumps and the size of the jump is guided by a distribution of extreme values. Also, a model is developed for determining the tax when the level of contamination present stochastic volatility. Finally the method of Monte Carlo simulation is used to approximate the value of an optimal tax.

*Clasificación JEL: E20, G58, Q53.*

*Palabras clave: Consumo, Política Gubernamental, Residuos Sólidos.*

---

\* Universidad de Valle de México, Oficinas Corporativas Coyoacán. Edificio A. 3er piso. Calzada de Tlalpan 3058, Col. Santa Úrsula Coapa. C.P. 04850, México, D. F. Tel.(55) 91 38 50 00 ext. 34963. Correo electrónico: claudia.castillor@uvmnet.edu

## 1. Introducción

Las opciones reales han cobrado recientemente un gran interés en teoría económica; ver por ejemplo: Strobel (2005) , Henderson y Hobson (2002) y Venegas-Martínez (2008) . El principal objetivo asociado con opciones reales es como valuar productos derivados sobre activos no negociables. Al respecto, es importante mencionar los dos libros clásicos sobre opciones reales: Dixit y Pindyck (1994) y Schwartz y Trigeorgis (2001) . En esta investigación el impuesto óptimo que un consumidor debe pagar por deteriorar el medio ambiente al desechar la envoltura de un bien genérico de consumo se valúa como una opción real.

Un consumidor racional obtiene satisfacción de un bien que tiene una envoltura o recipiente. Esta envoltura tiene un costo en términos reales para el consumidor (lo cual reduce su nivel de su riqueza), no produce satisfacción, es desecharla en el ambiente y no es biodegradable. Para reparar este efecto negativo sobre el medio ambiente, el gobierno le cobrará al consumidor un impuesto por contaminación. Uno de los objetivos de la presente investigación consiste en obtener el impuesto óptimo, bajo algún criterio, que debe pagar dicho consumidor. En una actitud corresponsable por parte del gobierno para promover una cultura ambiental, se le permite al consumidor que él determine el impuesto que estaría dispuesto a pagar cuando sobrepasa un cierto umbral umbral que fija el gobierno. En un juego de dos etapas, el gobierno elegirá posteriormente el umbral que maximice el impuesto propuesto por el consumidor. Un hecho importante es que este impuesto está relacionado con la fórmula de valuación de una opción europea de compra de Black-Scholes-Merton. Asimismo se llevan a cabo ejercicios de estática comparativa, los cuales están relacionados con las griegas de una opción.

## 2. Impuesto por contaminación ambiental

### 2.1 Características de la economía

Considere una economía poblada por consumidores con preferencias y dota-ciones idénticas, cada uno de los cuales vive para siempre y desea maximizar su satisfacción por un bien genérico de consumo.

### 2.2 Supuestos

El individuo representativo tiene acceso a un activo real, específicamente a un bono de precio  $b_t$  libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija  $r$ . Cuando el agente consume  $C_t$ , desechar la envoltura  $E_t$ , la cual no es consumible y reduce su riqueza a la tasa  $R_E$ , ya que dicha envoltura tiene un costo para el individuo. Suponga que la tasa a la que se reduce la riqueza por las envolturas desecharas en el futuro es estocástica (el individuo no sabe cuantas envolturas va a desechar durante  $[t; T]$ ) y está dada por:

$$dR_E = \frac{dE_t}{E_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.2.1)$$

Sea  $\tau = \tau(E_t; t; M)$  el impuesto que el consumidor debe pagar en el presente,  $t$ , por el daño esperado en el medio ambiente durante el intervalo  $[t; T]$ . Aquí,  $M$  representa el umbral de contaminación que fija el gobierno.

En lo que sigue, para simplificar la notación, se omitirá el umbral  $M$  en  $\tau$  y se escribirá simplemente  $\tau = \tau(E_t; t; M)$ . Asimismo, suponga que el rendimiento que paga el bono está dado por

$$dR_b = \frac{db_t}{b_t} = rdt \quad (2.2.2)$$

En vista de (2.2.1), la aplicación del lema de Itô a  $\tau = \tau(E_t; t; M)$  conduce a que el impuesto satisface:

$$dR_t = \frac{d\tau}{\tau} = \mu_\tau dt + \sigma_\tau dW_t \quad (2.2.3)$$

donde

$$\mu_\tau \equiv \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \mu E_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} \sigma^2 E_t^2 \right) \frac{1}{\tau}$$

y

$$\sigma_\tau = \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \sigma E_t \frac{1}{\tau}.$$

El gobierno propone un umbral  $M$  de tal manera que al tiempo  $T$  el impuesto se calcula con base en el exceso al umbral  $\max(E_T - M; 0)$ . Es decir, entre mayor sea el excedente del umbral, entonces mayor será el impuesto.

Es importante destacar que  $E_T$  es una variable aleatoria tal que

$$E_T = E_t \exp \left\{ (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \mathcal{E} \right\},$$

donde  $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  con función de densidad

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \epsilon \in R.$$

### 2.3 Problemas de decisión del consumidor

Sea  $w_{1t} = E_t/a_t$  la proporción de la riqueza que el individuo destinada a envolturas,  $w_{2t} = \tau_t/a_t$  la proporción de la riqueza que asigna al pago del impuesto, y  $1 - w_{1t} - w_{2t}$  la fracción complementaria que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento  $r$  constante a cualquier plazo. En este caso, el agente desea resolver el siguiente problema:

$$\underset{C_t, w_{1t}, w_{2t}}{\text{Maximizar}} \quad E \left[ \int_0^T u(C_t) e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) \mid \mathcal{F}_0 \right],$$

sujeto a:

$$da_t = a_t w_{1t} dR_E + a_t w_{2t} dR_\tau + a_t (1 - w_{1t} - w_{2t}) dR_b - C_t dt, \quad (2.3.1.)$$

donde:  $C_t$  es consumo,  $u(C_t) = C_s^\gamma / \gamma$ ,  $\gamma \neq 0$ . es la función de utilidad,  $\delta$  es la tasa subjetiva de descuento,  $\mathcal{F}_t$  es la información relevante (precios) al tiempo  $t$  y  $b(a_T, T) = \frac{a_T^\gamma}{\gamma} e^{-\delta T}$  es una herencia o un término de salvamento.

En este caso,  $\delta < 1$  asegura la estricta concavidad de la función de utilidad y el grado relativo de aversión al riesgo satisface

$$G_r = \frac{u'(c_t)}{u''(c_t)c_t} = \frac{1}{1-\gamma}.$$

Después de sustituir (2.2.1),(2.2.2) y (2.2.3) en la restricción presupuestal, dada en (2.3.1), se tiene que

$$da_t = a_t \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) dt + a_t(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau) dW_t \quad (2.3.2)$$

Si se define (la función de utilidad indirecta)

$$J(a_t, t) = \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) \mid \mathcal{F}_t \right],$$

se sigue por la recursividad de  $J(a_t; t)$  y el teorema del valor medio del cálculo integral, que

$$\begin{aligned} J(a_t, t) &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathbb{E} \left[ \int_t^{t+dt} \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + \int_{t+dt}^T \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t} \mid [t, t+dt]} \mathbb{E} \left[ \int_t^{t+dt} \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + J(a_t + da_t, t + dt) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \max_{C_t w_{1t}, w_{2t} \mid [t, t+dt]} \mathbb{E} \left[ \frac{C_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) + J(a_t, t) + dJ(a_t, t) \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Observe que también que  $J(a_T, T) = b(a_T, T)$ . En virtud del lema de Itô, aplicado a  $J = J(a_t, t)$  se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathbb{E} \left[ \frac{C_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) \right. \\ &\quad + \left. \left[ J_t + J_a a_t \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau)^2 \right] dt + J_a a_t (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau) dW_t \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Si se toman esperanzas de los términos dentro del paréntesis y, posteriormente, se divide entre  $dt$  y se toma el límite cuando  $dt \rightarrow 0$ , se sigue que

$$0 = \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \left\{ \frac{C_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau)^2 \right\}. \quad (2.3.4)$$

Considere un candidato de la forma

$$J(a_t, t) = V(a_t) e^{-\delta t},$$

entonces

$$J_a = V'(a_t) e^{-\delta t}, \quad J_{aa} = V''(a_t) e^{-\delta t} \quad \text{y} \quad J_t = -\delta V(a_t) e^{-\delta t}.$$

Ahora bien, si  $C_t$ ,  $w_{1t}$  y  $w_{2t}$  son óptimos, se tiene que

$$\frac{C_t^\gamma}{\gamma} - \delta V(a_t) + V'(a_t) a_t \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} V''(a_t) a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau)^2. \quad (2.3.5)$$

Suponga que

$$V(a_t) = \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma},$$

entonces

$$V'(a_t) = \beta a_t^{(\gamma-1)} \quad \text{y} \quad V''(a_t) = \beta(\gamma-1) a_t^{(\gamma-2)}.$$

De esta manera, la ecuación (2.3.3) se transforma en

$$0 = \frac{C_t^\gamma}{\gamma} - \delta \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma} + \beta a_t^\gamma \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} \beta(\gamma-1) a_t^\gamma (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau)^2. \quad (2.3.6)$$

Al derivar la expresión anterior con respecto de  $C_t$ ,  $w_{1t}$  y  $w_{2t}$ , se obtienen, respectivamente:

$$C_t^{\gamma-1} - \beta a_t^{\gamma-1} = 0, \quad (2.3.7)$$

$$\beta a_t^\gamma (\mu - r) + \beta(\gamma-1) a_t^\gamma (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau) \sigma = 0$$

y

$$\beta a_t^\gamma (\mu_\tau - r) + \beta(\gamma-1) a_t^\gamma (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau) \sigma_\tau = 0.$$

Estas tres ecuaciones se pueden reescribir como:

$$C_t = \beta^{1/(\gamma-1)} a_t, \quad \mu - r = (1 - \gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau) \sigma \quad (2.3.8)$$

y

$$\mu_\tau - r = (1 - \gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau)\sigma_\tau. \quad (2.3.9)$$

La ecuación (2.3.8) dice que el consumo es proporcional a la riqueza. Como puede observarse, infortunadamente, la trayectoria de consumo ya no puede ser determinada porque el consumo se convierte en variable aleatoria, situación que está más acorde con la realidad. En consecuencia, la consideración del riesgo conlleva a cambios cualitativos y cuantitativos drásticos en las decisiones de consumo, portafolio y elección del impuesto por contaminación.

Por otro lado, las dos últimas ecuaciones implican que

$$\frac{\mu_\tau - r}{\sigma_\tau} = \frac{\mu - r}{\sigma}. \quad (2.3.10)$$

Después de sustituir  $\mu_\tau$  y  $\sigma_\tau$ , definidas en (2.2.3), en la ecuación anterior se tiene que

$$\left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \mu E_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} \sigma^2 E_t^2 \right) - r\tau = (\mu - r) \frac{\partial \tau}{\partial E_t} E_t,$$

lo cual conduce a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} r E_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} \sigma^2 E_t^2 - r\tau = 0,$$

junto con las condiciones de frontera  $\tau(0, t) = 0$  y  $\tau(E_t, T) = \max(E_t - M, 0)$ . Estas condiciones indican que si el individuo no contamina, entonces no paga impuesto, y que si contamina por arriba del umbral, entonces paga un impuesto igual al diferencial. La solución de la ecuación diferencial parcial anterior es

$$\tau = E_t \Phi(q_1) - M e^{-r(T-t)} \Phi(q_2), \quad (2.3.11)$$

donde la función  $\Phi(d)$  es la función de distribución acumulada de  $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 1 - \Phi(-d), \quad (2.3.12)$$

$$q_1 = q_1(E_t, t; T, M, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{E_t}{M}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (2.3.13)$$

y

$$q_2 = q_2(E_t, t; T, M, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{E_t}{M}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = q_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (2.3.14)$$

Se pueden contar dos historias:

1) El individuo conoce la tendencia y la volatilidad de la tasa a la que va a contaminar. El gobierno le pide que dada esa tasa, el individuo determine el impuesto que está dispuesto a pagar por anticipado a fin de que el gobierno utilice esos recursos para tomar una acción inmediata y darle un manejo adecuado a los residuos sólidos desde el momento en que empieza la contaminación. Esto, en virtud de que el gobierno no va esperar a que el ambiente este contaminado para tomar alguna medida.

2) Nadie paga impuestos anticipados por contaminación; primero se contamina y luego se paga el impuesto; aunque el ambiente ya esté contaminado (entonces la reacción del gobierno sería tardía). En otras palabras ya para que! Como el individuo pagará el impuesto en  $T$ , es necesario llevar entonces a  $\tau$  a valor futuro. Así que el impuesto consistirá en  $\tau' = \tau e^{r(T-t)}$ . En cualquier caso, la diferencia entre un impuesto hoy y un impuesto futuro difieren en un factor constante.

#### 2.4 Comportamiento del gobierno

Posteriormente, el gobierno elige  $M$  de tal manera que resuelva el problema

$$\underset{M}{\text{Maximizar}} \quad \tau' = e^{-r(T-t)} E_t \Phi(q_1) - M \Phi(q_2). \quad (2.4.1)$$

Para ello, se obtiene

$$\frac{\partial \tau'}{\partial M} = e^{-r(T-t)} E_t \Phi'(q_1) \frac{\partial q_1}{\partial M} - \Phi(q_2) - M \Phi'(q_2) \frac{\partial q_2}{\partial M}.$$

Observe que a partir de (2.4.1), se obtiene que

$$\frac{\partial q_1}{\partial M} = \frac{\partial q_2}{\partial M},$$

en consecuencia

$$\frac{\partial \tau'}{\partial M} = \left( e^{-r(T-t)} E_t \Phi'(q_1) - M \Phi'(q_2) \right) \frac{\partial q_1}{\partial M} - \Phi(q_2).$$

Ahora bien, en virtud de que

$$e^{-r(T-t)} E_t \Phi'(q_1) - M \Phi'(q_2) = 0,$$

se sigue que

$$\frac{\partial \tau}{\partial M} = -\Phi(q_2) < 0.$$

Es decir,  $\tau$  es una función decreciente de  $M$ . Por lo tanto, la elección óptima de  $M$  es cero. En otras palabras, en el momento en que el agente inicie el consumo y, en consecuencia, comience a contaminar se hará sujeto del impuesto.

### 2.5 Impuesto por contaminación extrema

Considere una economía poblada con agentes idénticos de vida infinita y en la que se produce y consume un solo bien de carácter perecedero. Los agentes toman decisiones de consumo y tienen que determinar el impuestos por contaminación que están dispuestos a pagar dado un cierto umbral, posteriormente el gobierno elige un umbral de contaminación permitida que maximiza la recaudación. Los supuestos principales sobre el comportamiento de los agentes se detallan a continuación.

### 2.6 Dinámica de la contaminación

Los agentes contaminan con una dinámica estocástica determinada por una combinación de un movimiento Browniano con un proceso de saltos de Poisson, en donde el tamaño del salto es modelado por una distribución de valores extremos, en particular, por una distribución del tipo de Fréchet. Esto es,

$$dE_t = \mu E_t dt + \sigma E_t dW_t + \phi E_t dN_t, \quad (2.6.1)$$

donde  $\mu \in R$ ,  $\sigma > 0$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad fijo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_W)$  y  $dN_t$  es un proceso de Poisson con parámetro de intensidad  $\delta$ .

A continuación se describen en detalle las características de la componente de saltos en la ecuación (2.6.8). El tamaño del salto, hacia arriba, está dado por

$$\phi = X^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \text{y} \quad X = \frac{Y - \nu}{\kappa}, \quad \kappa, \quad \nu > 0, \quad (2.6.2)$$

donde  $Y$  es una variable aleatoria de Fréchet con parámetros  $\alpha$ ,  $\nu$  y  $\kappa$ . En este caso, la función de distribución acumulada de  $Y$  está dada por

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \nu, \\ \exp \left\{ - \left( \frac{y - \nu}{\kappa} \right)^{-\alpha} \right\}, & y \geq \nu. \end{cases} \quad (2.6.3)$$

La función de densidad correspondiente satisface:

$$f_Y(y) = \frac{\alpha}{\kappa} F_Y(y) \left( \frac{y - \nu}{\kappa} \right)^{-(1+\alpha)}, \quad y \geq \nu. \quad (2.6.4)$$

Observe, en particular, que si  $\alpha > 2$ , entonces

$$E[Y] = \nu + \kappa \mu \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)$$

y

$$\text{Var}[Y] = \kappa^2 \left[ \mu \left( 1 - \frac{2}{\alpha} \right) - \mu^2 \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right].$$

Por otro lado, el proceso de Poisson  $dN_t$  con intensidad  $\delta$  satisface

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_N\{\text{exactamente un salto de tamaño 1 durante } dt\} &= \mathbb{P}_N\{dN_t = 1\} \\ &= \delta dt\end{aligned}$$

y

$$\mathbb{P}_N\{\text{más de un salto durante } dt\} = \mathbb{P}_N\{dN_t > 1\} = o(dt),$$

así que

$$\mathbb{P}_N\{\text{ningún salto durante } dt\} = 1 - \delta dt + o(dt),$$

donde  $o(dt)/dt \rightarrow 0$  cuando  $dt \rightarrow 0$ . Como se comentó anteriormente, es fácil incorporar saltos hacia abajo añadiendo un segundo proceso de Poisson en (1) multiplicado por una distribución del tipo Weibull. No obstante, por simplicidad, sólo se lleva a cabo el análisis para saltos hacia arriba.

## 2.7 Impuesto sobre contaminación

El consumidor representativo por el nivel de contaminación  $E_t$  está dispuesto a pagar un impuesto de monto  $\tau = \tau(E_t, t)$ . El consumidor tiene acceso a un bono de precio,  $b_t$ . El bono paga una tasa de interés constante libre de riesgo  $r$  (*i.e.*, paga  $r$  unidades del bien de consumo por unidad de tiempo). Así, la riqueza real del consumidor,  $a_t$ , está dada por

$$a_t = E_t + \tau(E_t, t) + b_t, \quad (2.7.1)$$

donde  $a_0$  es determinada de manera exógena.

## 2.8 Problemas de decisión del consumidor-inversionista

En el transcurso de la presente sección se establece el problema de decisión intertemporal de un consumidor racional y adverso al riesgo.

A continuación se establece la restricción presupuestal de un consumidor representativo. Observe, primero, que la tasa de contaminación,  $dR_E = dE_t/E_t$ , está dada por

$$dR_E = \mu dt + \sigma dW_t + \phi dN_t. \quad (2.8.1)$$

Asimismo, el lema de Itô aplicado al impuesto  $\tau(E_t, t)$  conduce a

$$\begin{aligned}d\tau &= \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \mu E_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} \sigma^2 E_t^2 \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \sigma E_t dW_t + [\tau(E_t(\phi + 1), t) - \tau(E_t, t)] dN_t\end{aligned}$$

ó

$$d\tau = \mu_\tau \tau dt + \sigma_\tau \tau dW_t + \phi_\tau \tau dN_t, \quad (2.8.2)$$

donde

$$\mu_\tau = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \mu E_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} \sigma^2 E_t^2 \right),$$

$$\sigma_\tau = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \sigma E_t$$

y

$$\phi_\tau = \frac{1}{\tau} [\tau(E_t(\phi + 1), t) - \tau(E_t, t)].$$

En este caso, la ecuación diferencial estocástica de la riqueza real acumulada en términos del portafolio,  $w_{1t} = E_t/a_t$ ,  $w_{2t} = \tau_t/a_t$ ,  $1 - w_{1t} - w_{2t} = b_t/a_t$  y consumo,  $C_t$ , está dada por:

$$da_t = a_t w_{1t} dR_E + a_t w_{2t} dR_\tau + a_t (1 - w_{1t} - w_{2t}) r dt - C_t dt,$$

con  $a_0$  determinada exógenamente. Ahora bien, note que la restricción presupuestal puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} da_t = & a_t \left[ \left( r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) dt \right. \\ & \left. + (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau) dW_t + (w_{1t}\phi + w_{2t}\phi_\tau) dN_t \right]. \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

## 2.9 Índice de utilidad

La función de utilidad,  $v_0$ , de tipo de von Neumann-Morgenstern al tiempo  $t = 0$  de un consumidor adverso al riesgo se supone de la forma

$$v_0 = E_0 \left[ \int_0^\infty \log(C_t) e^{-rt} dt \right], \quad (2.9.1)$$

donde  $E_0$  es la esperanza condicional sobre la información disponible al tiempo  $t = 0$ . Para evitar que la dinámica del consumo sea compleja de examinar, se supone que la tasa subjetiva de descuento del agente es constante e igual a  $r$ .

## 2.10 Condiciones de primer orden

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema de control óptimo estocástico proveniente de maximizar la función de utilidad sujeta a su restricción presupuestal está dada por

$$\begin{aligned} & \max_{w_{1t}, w_{2t}, C_t} H(w_{1t}, w_{2t}, C_t; a_t, t) \\ & \equiv \max_{w_{1t}, w_{2t}, C_t} \left\{ \log(C_t) e^{-rt} + I_a(a_t, t) a_t \left[ r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right] \right. \\ & \quad \left. + I_t(a_t, t) + \frac{1}{2} I_{aa}(a_t, t) a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau)^2 \right. \\ & \quad \left. + \delta E_\phi \left[ I(a_t(w_{1t}\phi + w_{2t}\phi_\tau + 1), t) - I(a_t, t) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

donde

$$I(a_t, t) = \mathbb{E}_t \left[ \int_t^\infty \log(c_s) e^{-rs} ds \right].$$

Las condiciones de primer orden para una solución interior son:

$$H_{C_t} = 0, \quad H_{w_{1t}} = 0 \quad \text{y} \quad H_{w_{2t}} = 0.$$

Se postula  $I(a_t, t)$  como una función en variables separables,  $t$  y  $a_t$ , dada por:

$$I(a_t, t) = e^{-rt} [\beta_1 \log(a_t) + \beta_0],$$

donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  se determinan a partir de (2.10.1). En virtud de lo anterior, la ecuación (2.10) se transforma en

$$\begin{aligned} & \max_{w_{1t}, w_{2t}, C_t} H(w_{1t}, w_{2t}, C_t; a_t, t) \\ & \equiv \max_{w_{1t}, w_{2t}, C_t} \left\{ \log(C_t) + \beta_1 \left[ r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right] \right. \\ & \quad - r[\beta_1 \log(a_t) + \beta_0] \\ & \quad - \frac{1}{2}\beta_1(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau)^2 \\ & \quad \left. + \delta\beta_1 \mathbb{E}_\phi [\log(w_{1t}\phi + w_{2t}\phi_\tau + 1)] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Si ahora, se calculan las condiciones de primer orden para  $w_{1t}$  y  $w_{2t}$ , intercambiando el orden de las derivadas parciales de las variables con el operador de esperanza, se encuentra que

$$\mathbb{E}_\phi \left[ \frac{\delta\phi}{w_{1t}\phi + w_{2t}\phi_\tau + 1} \right] + \mu - r = (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau)\sigma$$

y

$$\mathbb{E}_\phi \left[ \frac{\delta\phi_\tau}{w_{1t}\phi + w_{2t}\phi_\tau + 1} \right] + \mu_\tau - r = (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_\tau)\sigma_\tau.$$

Evidentemente, el consumo óptimo es proporcional al nivel de la riqueza en cada instante, es decir,  $C_t \propto a_t$ .

## 2.11 Caracterización del impuesto

En esta sección se caracteriza el impuesto óptimo a través de una ecuación diferencial integral. Si se supone una solución de esquina, es decir,  $w_{1t} = 1$  y  $w_{2t} = 0$ , entonces las condiciones de primer orden se transforman en:

$$\mu = r + \sigma^2 - \delta\mathbb{E}_\phi \left[ \frac{\phi}{\phi + 1} \right] \quad (2.11.1)$$

y

$$\delta\mathbb{E}_\phi \left[ \frac{\phi_\tau}{\phi + 1} \right] + \mu_\tau - r = \sigma\sigma_\tau \quad (2.11.2)$$

A partir de (2.11.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \delta E_\phi & \left[ \frac{\tau(E_t(\phi+1), t) - \tau(E_t, t)}{\phi+1} \right] \\ & + \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \mu E_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} \sigma^2 E_t^2 \right) - r\tau = \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \sigma^2 E_t. \end{aligned}$$

Si ahora, se sustituye (2.11.1) en la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta E_\phi & \left[ \frac{\tau(E_t(\phi+1), t) - \tau(E_t, t) - \phi E_t \frac{\partial \tau}{\partial E_t}}{\phi+1} \right] \\ & + \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} r E_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} \sigma^2 E_t^2 - r\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

En lo que sigue se consideran las siguientes condiciones de frontera  $\tau(0, t) = 0$  y  $\tau(E_t, t) = \max(E_t - K, 0)$  donde  $K$  es el umbral de contaminación seleccionado por el gobierno. Note que si  $f_\phi(\cdot)$  es la función de densidad de  $\phi$ , la presencia en (2.11.3) del valor esperado

$$E_\phi \left[ \frac{\tau(E_t(\phi+1), t) - \tau(E_t, t)}{\phi+1} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(E_t(\phi+1), t) - \tau(E_t, t)}{\phi+1} f_\phi(\phi) d\phi,$$

hace que (2.11.3) sea una ecuación diferencial-integral en la variable  $\tau$ . Observe también que si  $\phi$  es constante en (2.11.3) y si se redefine  $\delta$  como  $\delta/(\phi+1)$ , se obtiene la ecuación diferencial de Merton (1976). Finalmente, se destaca que cuando  $\phi = 0$  ó  $\delta = 0$ , la ecuación (2.11.3) se reduce a la ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden de Black-Scholes (1973).

Ahora bien, si se considera el siguiente cambio de variable

$$u = \left( \frac{y - \nu}{k} \right)^{-\alpha}$$

entonces uno de los valores esperados que aparece en la ecuación (2.11.2) satisface

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\phi}{\phi+1} \right] & = E \left[ \frac{X^{-\alpha}}{X^{-\alpha} + 1} \right] \\ & = \int_0^{\infty} \frac{u}{u+1} e^{-u} du \\ & = e\Gamma(-1, 1). \end{aligned}$$

donde  $\Gamma = (-1, 1) = \Gamma(0, 1) + e^{-1}$  y  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  es la función superior Gamma incompleta. La Gráfica 2 muestra el comportamiento de la función  $\Gamma(0, 1/w)$ . Se puede demostrar fácilmente que  $\Gamma(0, 0) = \infty$ ,  $\Gamma(0, \infty) = 0$  y  $\Gamma(0, 1) \sim 2/9$  (de hecho,  $\Gamma(0, 1) = 0.219383934\dots$ ). Por lo tanto, la ecuación (2.11.3) se transforma en

$$\begin{aligned} \delta E_\phi & \left[ \frac{\tau(E_t(\phi+1), t) - \tau(E_t, t)}{\phi+1} \right] + \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 E_t^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} \sigma^2 E_t^2 \\ & + E_t \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \left[ (r + \delta \left( \frac{2}{9} e - 1 \right)) - r \tau \right] = 0. \end{aligned}$$

## 2.12 Solución analítica del impuesto

Con el propósito de determinar el precio  $\tau = (E_t; t)$ , se tiene una sucesión de variables aleatorias  $\{x_n\}_{n \in N}$  asociadas a la distribución del producto de  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como  $\phi+1$  con  $x_0 = 1$ . En otras palabras, si  $\{\phi_n\}_{n \in N}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, se define  $x_n = \prod_{k=1}^n (\phi_k + 1)$ ,  $n \in N$ . En este caso, la solución de la ecuación (2.11.3) con condiciones de frontera

$$\tau = (0, t) = 0; \quad \text{y} \quad \tau(E_t; 0) = \max(E_t - K, 0)$$

está dada por

$$\begin{aligned} \tau(E_t, t) &= \\ & \sum_{n=0}^{\infty} E_\phi E_{x_n} \left[ \frac{e^{-\delta(T-t)/(\phi+1)} [\delta(T-t)/(\phi+1)]^n}{n!} \tau_{BS}(E_t x_n e^{-\delta E_\phi [\phi/(\phi+1)](T-t)}, t) \right], \end{aligned} \quad (2.12.1)$$

donde  $\phi$  es estocásticamente independiente de  $\{\phi_n\}_{n \in N}$  y  $\tau_{BS}(\cdot, \cdot)$  es la solución básica de Black-Scholes (1973). En efecto, considere

$$\tau(E_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_\phi E_{x_n} [q_{n,t}, \tau_{BS}^{(n)}], \quad (2.12.2)$$

donde

$$q_{n,t} = \frac{e^{-\delta(T-t)/(\phi+1)} [\delta(T-t)/(\phi+1)]^n}{n!}$$

$$U_{n,t} = x_n e^{-\delta E_\phi [\phi/(\phi+1)](T-t)}$$

y

$$\tau_{BS}^{(n)} = \tau_{BS}(E_t U_{n,t}, t).$$

En lo que sigue es conveniente, para simplificar los cálculos, introducir la siguiente notación:

$$Q_{n,t} = E_t U_{n,t}.$$

En tal caso,

$$\frac{\partial \tau}{\partial E_t} = \sum_{n=0}^{\infty} E_\phi E_{n_x} \left[ q_{n,t} U_{n,t} \frac{\partial \tau_{BS}^{(n)}}{\partial Q_{n,t}} \right] \quad (2.12.3)$$

y

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi} E_{n_x} \left[ q_{n,t} U_{n,t}^2 \frac{\partial^2 \tau_{BS}^{(n)}}{\partial Q_{nt}^2} \right] \quad (2.12.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \delta E_{\phi} [\phi/(\phi+1)] \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi} E_{n_x} \left[ q_{n,t} Q_{n,t} \frac{\partial \tau_{BS}^{(n)}}{\partial Q_{nt}} \right] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi} E_{n_x} \left[ q_{n,t} \frac{\partial \tau_{BS}^{(n)}}{\partial Q_{nt}} \right] \\ &+ \delta \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi} E_{n_x} \frac{q_{n,t} \tau_{BS}^{(n)}}{\phi+1} \\ &- \delta \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi} E_{x_n} \left[ \frac{e^{-\delta(T-t)/(\phi+1)} [\delta(T-t)/(\phi+1)]^{n-1}}{n-1!} \right] \left( \frac{\tau_{BS}^{(n)}}{\phi+1} \right). \end{aligned} \quad (2.12.5)$$

En virtud de las ecuaciones (2.12.3), (2.12.4) y (2.12.5), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \delta E_{\phi} [\phi/(\phi+1)] E_t \frac{\partial \tau}{\partial E_t} + \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi} E_{n_x} \left[ q_{n,t} \frac{\partial \tau_{BS}^{(n)}}{\partial Q_{nt}} \right] + \delta E_{\phi} \frac{\tau(E_t, t)}{\phi+1} \\ &- \delta \sum_{m=0}^{\infty} E_{\phi} E_{x_{m+1}} \left[ \frac{e^{-\delta(T-t)/(\phi+1)} [\delta(T-t)/(\phi+1)]^m}{m!} \left( \frac{\tau_{BS}^{(m+1)}}{\phi+1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.12.6)$$

Observe ahora que el último término de la ecuación anterior puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} E_{\phi} \left[ \frac{\tau((\phi+1)E_t, t)}{\phi+1} \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi} E_{x_n} \left[ q_{n,t} \frac{\tau_{BS}^{(n)}(Q_{n,t}(1+\phi), t)}{\phi+1} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi} E_{x_{n+1}} \left[ q_{n,t} \frac{\tau_{BS}^{(n+1)}(Q_{n+1,t}, t)}{\phi+1} \right], \end{aligned} \quad (2.12.7)$$

ya que  $Q_{n+1,t}$  y  $Q_{n,t}(1+\phi)$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por lo tanto, la ecuación (2.12.6) puede expresarse como:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{\phi} E_{x_n} \left[ q_{n,t} \frac{\partial \tau_{BS}^{(n)}}{\partial t} \right] - \delta E_{\phi} \left[ \frac{\tau(E_t(\phi+1), t) - \tau(E_t, t) - \phi E_t \frac{\partial \tau}{\partial E_t}}{\phi+1} \right]. \quad (2.12.8)$$

A partir de (2.12.2), (2.12.3) y (2.12.7), se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 E_t^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} + rE_t \frac{\partial \tau}{\partial E_t} - r\tau \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} q_{n,t} E_{\phi} E_{x_n} \left[ \frac{\partial \tau_{\text{BS}}^{(n)}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 Q_{n,t}^2 \frac{\partial^2 \tau_{\text{BS}}^{(n)}}{\partial Q_{n,t}^2} + rQ_{n,t} \frac{\partial \tau_{\text{BS}}^{(n)}}{\partial Q_{n,t}} - r\tau_{\text{BS}}^{(n)} \right] \quad (2.12.9) \\
 & \quad - \delta E_{\phi} \left[ \frac{\tau(E_t(\phi+1), t) - \tau(E_t, t) - \phi E_t \frac{\partial \tau}{\partial E_t}}{\phi+1} \right].
 \end{aligned}$$

Finalmente, en virtud de que

$$\frac{\partial \tau_{\text{BS}}^{(n)}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 Q_{n,t}^2 \frac{\partial^2 \tau_{\text{BS}}^{(n)}}{\partial Q_{n,t}^2} + rQ_{n,t} \frac{\partial \tau_{\text{BS}}^{(n)}}{\partial Q_{n,t}} - r\tau_{\text{BS}}^{(n)} = 0,$$

se cumple para toda  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , se deduce inmediatamente que (2.12.1) es la solución de (2.11.3).

### 3. Impuesto por contaminación con volatilidad estocástica

#### 3.1 Introducción

En esta sección se obtiene, a través de agentes racionales maximizadores de utilidad, la ecuación diferencial parcial que caracteriza el impuesto sobre un contaminante cuando su volatilidad es estocástica. En particular, se supone que la volatilidad es conducida por un movimiento geométrico Browniano. Se supone que los agentes tienen acceso a un bono libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija.

#### 3.2 Planteamiento del problema de determinación del impuesto por contaminación

Se supone que el nivel de contaminación,  $E_t$ , sigue un movimiento geométrico Browniano, cuya volatilidad al cuadrado (la varianza),  $\sigma_t^2 = V_t$ , es conducida por otro movimiento geométrico Browniano, es decir,

$$\begin{cases} dE_t = \mu E_t dt + \sigma_t E_t dW_t, \\ dV_t = \alpha V_t dt + \beta V_t dZ_t, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  es el parámetro de tendencia del nivel de contaminación,  $\alpha \in \mathbb{R}$  es la tendencia de la varianza y  $\beta > 0$  es la volatilidad de la varianza, las cuales son cantidades conocidas. Asimismo, se supone que los movimientos Brownianos  $dW_t$  y  $dZ_t$  están correlacionados entre sí, de tal forma que

$$\text{Cov}(dW_t, dZ_t) = \rho dt. \quad (3.2.2)$$

Considere un bono libre de riesgo de incumplimiento que paga una tasa constante  $r$ . El bono también puede verse como un depósito bancario que paga tasa  $r$ . Como siempre, se supone que el impuesto por contaminación,  $\tau$ , depende de las variables de estado, esto es,  $\tau = \tau(E_t, V_t, t)$ . En lo subsecuente,  $a_t$  denotará la riqueza real del agente al instante  $t$ . La ecuación de evolución de la riqueza real (restricción presupuestal) está dada por

$$da_t = w_{1t}a_t dR_S + w_{2t}a_t dR_\tau + (1 - w_{1t} - w_{2t})a_t r dt - C_t dt, \quad (3.2.3)$$

donde  $dR_E = dE_t/E_t$  y  $dR_\tau = d\tau/\tau$ . Es importante destacar la diferencia entre  $\tau$  y  $C_t$ , el primer caso se refiere al i

$$\sigma_\tau = \frac{1}{\tau} \sigma_t E_t \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \quad (3.2.4)$$

y

$$\xi_\tau = \frac{1}{\tau} \beta V_t \frac{\partial \tau}{\partial V_t}. \quad (3.2.5)$$

Ahora bien, en virtud de (1) y (2), la ecuación de evolución de la riqueza se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} da_t = & a_t \left[ r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right] dt \\ & + a_t (w_{1t}\sigma_t + w_{2t}\sigma_\tau) dW_t + a_t w_{2t} \xi_\tau dZ_t. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

En lo que sigue, la función de utilidad (satisfacción) del agente por el consumo de un bien genérico,  $C_t$ , se denotará mediante  $u(C_t)$ . Suponga que la función de utilidad indirecta, o bienestar económico, del individuo está dada por:

$$J(a_t, V_t, t) = \max_{\{C_t, w_{1t}, w_{2t}\}} \mathbb{E} \left[ \int_t^T u(C_s) e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (3.2.7)$$

sujeta a la ecuación (3.2.6). El parámetro  $\delta > 0$  determina la tasa subjetiva de descuento del individuo,  $\mathcal{F}_t$  denota la información relevante disponible al tiempo  $t$  y  $b(a_T, T)$  representa la función de legado (herencia o salvamento) en  $T$ . Observe que también  $T$  representa la fecha de pago del impuesto. Por último, se supone que  $u(\cdot)$  satisface  $u' > 0$  y  $u'' < 0$ , es decir, la función de utilidad es estrictamente creciente y cóncava. En otras palabras, la utilidad marginal es positiva pero decreciente.

A continuación se emplean varias formas funcionales de la función de utilidad para obtener la ecuación diferencial parcial que caracteriza el impuesto por contaminación.

### 3.3 Función de utilidad con coeficiente constante de aversión al riesgo

En esta sección se supone que la función de utilidad tiene la siguiente forma funcional:

$$u(C_t) = \frac{C_t^\gamma}{\gamma} \quad (3.3.1)$$

y que el término de legado es

$$b(a_T, T) = e^{-\delta T} \frac{a_T^\gamma}{\gamma}, \quad (3.3.2)$$

donde  $\gamma$  es el parámetro de aversión al riesgo. Observe que si  $\gamma = 1$  el individuo es neutral al riesgo, mientras que si  $0 < \gamma < 1$ , el individuo es adverso al riesgo. El caso  $\gamma = 0$  corresponde a la función de utilidad logarítmica, la cual se estudiará más adelante.

Para resolver el problema (3.2.7), con la función de utilidad de (3.2.8), se utilizará la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Es decir, la función  $J = J(a_t, V_t, t)$ , expresada en (3.2.7), debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{w_{1t}, w_{2t}, C_t\}} & \left\{ \frac{C_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial a_t} a_t \left[ r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right] \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} a_t^2 [(w_{1t}\sigma_t + w_{2t}\sigma_\tau)^2 + w_{2t}^2\xi_\tau^2 + 2(w_{1t}\sigma_t + w_{2t}\sigma_\tau)w_{2t}\xi_\tau\rho] \\ & \left. + \frac{\partial J}{\partial V_t} \alpha V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t} a_t \beta V_t [(w_{1t}\sigma_t + w_{2t}\sigma_\tau)\rho + w_{2t}\xi_\tau] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Al igualar a cero las derivadas parciales de (3.3.3) con respecto de  $C_t$ ,  $w_{1t}$  y  $w_{2t}$ , se obtienen las siguientes condiciones necesarias para un máximo:

$$e^{-\delta t} C_t^{\gamma-1} - \frac{\partial J}{\partial a_t} = 0, \quad (3.3.4)$$

$$\mu - r = -(w_{1t}\sigma_t + w_{2t}\sigma_\tau + w_{2t}\xi_\tau\rho)\sigma_t a_t \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} - \sigma_t \beta V_t \rho \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} \quad (3.3.5)$$

y

$$\begin{aligned} \mu_\tau - r = & - [(w_{2t}\sigma_\tau + w_{1t}\sigma_t)\sigma_\tau + w_{2t}\xi_\tau^2 + (w_{1t}\sigma_t + w_{2t}\sigma_\tau)\xi_\tau\rho + w_{2t}\sigma_\tau\xi_\tau\rho] a_t \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} \\ & - (\rho\sigma_\tau + \xi_\tau)\beta V_t \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Se propone un candidato de solución de la forma:

$$J(a_t, V_t, t) = e^{-\delta t} g(V_t, t) \frac{a_t^\gamma}{\gamma}, \quad (3.3.7)$$

el cual separa variables (multiplicativamente). La función  $g(V_t, t)$  es conocida como el coeficiente del premio al riesgo. Este nombre se justifica a continuación. Observe primero que a partir de (3.3.7), se sigue que

$$\frac{\partial J}{\partial a_t} = e^{-\delta t} g(V_t, t) a_t^{\gamma-1},$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} = (\gamma - 1) e^{-\delta t} g(V_t, t) a_t^{\gamma-2}$$

y

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t} = e^{-\delta t} \frac{\partial g}{\partial V_t} a_t^{\gamma-1}.$$

En virtud de estas ecuaciones, el coeficiente de aversión al riesgo, satisface

$$-a_t \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} = 1 - \gamma = -C_t \frac{u''(C_t)}{u'(C_t)},$$

en donde  $-C_t u''(C_t)/u'(C_t)$  es la elasticidad de la utilidad marginal (coeficiente relativo de aversión al riesgo). Además,

$$\frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} = \frac{1}{V_t} \frac{\partial g}{\partial V_t} \frac{V_t}{g} = \frac{1}{V_t} \varepsilon_{g,V},$$

en donde  $\varepsilon_{g,V}$  es la elasticidad de  $g$  con respecto de  $V_t$ . Para obtener la ecuación diferencial parcial que determina el impuesto por contaminación se requiere una solución de esquina. Al sustituir  $w_{1t} = 1$  y  $w_{2t} = 0$  en las ecuaciones (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6), éstas se transforman, respectivamente, en:

$$C_t^{\gamma-1} = g(V_t, t) a_t^{\gamma-1}, \quad (3.3.8)$$

$$\mu - r = (1 - \gamma) \sigma_t^2 - \rho \sigma_t \beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} \quad (3.3.9)$$

y

$$\mu_\tau - r = (1 - \gamma) \sigma_t (\sigma_\tau + \xi_\tau \rho) - (\sigma_\tau \rho + \xi_\tau) \beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}. \quad (3.3.10)$$

En particular, los “premios” al riesgo para el nivel de contaminación y el impuesto están dados por las ecuaciones:

$$\lambda_E = \frac{\mu - r}{\sigma_t} = (1 - \gamma)\sigma_t - \rho\beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} \quad (3.3.11)$$

y

$$\lambda_\tau = \frac{\mu_\tau - r}{\sigma_\tau} = \left(1 + \frac{\xi_\tau}{\sigma_\tau}\rho\right)(1 - \gamma)\sigma_t - \left(\rho + \frac{\xi_\tau}{\sigma_\tau}\right)\beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}.$$

A partir de las ecuaciones anteriores se puede concluir que

$$\lambda_\tau = \lambda_E + \frac{\xi_\tau}{\sigma_\tau}\rho(1 - \gamma)\sigma_t - \frac{\xi_\tau}{\sigma_\tau} \left(\frac{\beta V_t}{g}\right) \frac{\partial g}{\partial V_t},$$

la cual conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} r E_t + \frac{1}{2} V_t E_t^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} - r \tau \\ + \left[ \alpha V_t - \beta V_t \rho (1 - \gamma) \sigma_t + \left( \frac{\beta^2 V_t^2}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t} \right] \frac{\partial \tau}{\partial V_t} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t \partial V_t} \beta V_t^{3/2} E_t \rho = 0, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

junto con la condición de frontera  $\tau(E_t, V_t, T) = \max(E_t - K, 0)$ . Asimismo, la ecuación (3.3.3) se simplifica si se sustituye el candidato de solución  $J$  y la solución de esquina  $w_{1t} = 1$  y  $w_{2t} = 0$ , en cuyo caso se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{g^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta}{\gamma} g + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial g}{\partial t} + \mu g - g^{\gamma/(\gamma-1)} + \frac{1}{2} (\gamma - 1) V_t g \\ & + (\alpha V_t + \gamma \sigma_t \beta V_t \rho) \frac{1}{\gamma} \frac{\partial g}{\partial V_t} \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta^2 V_t^2}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2}, \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

donde se ha utilizado que

$$C_t = [g(V_t, t)]^{1/(\gamma-1)} a_t \quad \text{y} \quad \frac{\partial J}{\partial t} = \left( -\delta g + \frac{\partial g}{\partial V_t} \right) e^{-\delta t} \frac{a_t^\gamma}{\gamma}.$$

De esta manera, la ecuación (3.3.13) se transforma en

$$\begin{aligned} 0 = & - \frac{\partial g}{\partial t} + (\gamma - 1) g^{\gamma/(\gamma-1)} + \left[ (\delta - \mu \gamma) - \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) V_t \right] g \\ & - (\alpha V_t + \gamma \beta V_t^{3/2} \rho) \frac{\partial g}{\partial V_t} \\ & - \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

La condición de frontera, en este caso, es  $g(V_t, T) = 1$ , lo cual asegura que se satisface el valor del legado en (3.3.2). Como puede observarse, se requiere la solución de (3.3.14),  $g = g(V_t, t)$ , a fin de sustituirla en (3.3.13) y poder resolver esta última en  $\tau(E_t, V_t, t)$ .

La ecuación (3.3.12) indica cómo ajustar el proceso estocástico que sigue el nivel de contaminación, dado en la ecuación (3.21). En este caso,

$$\begin{cases} dE_t = rE_t dt + \sigma_t E_t dW_t, \\ dV_t = \left[ \alpha V_t - \beta V_t \rho(1 - \gamma) \sigma_t + \left( \frac{\beta^2 V_t^2}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t} \right] dt + \beta V_t dZ_t. \end{cases}$$

### 3.4 Función de utilidad logarítmica

Considere de nuevo un consumidor racional con vida infinita maximizador de utilidad. Se supone una función de utilidad logarítmica, lo cual conduce a que el consumidor es adverso al riesgo. Como antes, se supone que el consumidor tiene acceso a un activo libre de riesgo (de incumplimiento), por ejemplo un bono cupón cero. Se supone que la función de utilidad esperada al tiempo  $t$  de un individuo representativo y competitivo tiene la siguiente forma:

$$E \left[ \int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta s} ds + \ln(a_T) \frac{e^{-\delta T}}{\delta} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (3.4.1)$$

donde  $\delta$  es la tasa subjetiva de descuento y  $\mathcal{F}_t$  es la información disponible al tiempo  $t$ .

El consumidor representativo posee un título de deuda de precio  $b_t$ . El impuesto por contaminación se denota mediante  $\tau(E_t, V_t, t)$ . En consecuencia, la riqueza real,  $a_t$ , del individuo está dada por:

$$a_t = b_t + E_t + \tau(E_t, V_t, t). \quad (3.4.2)$$

De esta manera, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica de la forma

$$da_t = a_t w_{1t} dR_E + a_t w_{2t} dR_\tau + a_t (1 - w_{1t} - w_{2t}) dR_b - C_t dt, \quad (3.4.3)$$

donde  $dR_E$  es el rendimiento del activo con riesgo,  $dR_\tau$  es la tasa de cambio instantánea del impuesto por contaminación y  $dR_b = rdt$  es el rendimiento del bono. Es importante distinguir entre las cantidades  $\tau = \tau(E_t, V_t, t)$  y  $C_t$ , la primera representa el impuesto por contaminación y la segunda el consumo. Suponga que

$$dR_E = \mu dt + \sigma_t dW_t, \quad (3.4.4)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_t \geq 0$  y  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración  $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^W)$  y

$$dV_t = \alpha V_t dt + \beta V_t dZ_t, \quad (3.4.5)$$

donde  $V_t = \sigma_t^2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\{Z_t\}_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración  $(\Omega^Z, \mathcal{F}^Z, \{\mathcal{F}_t^Z\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^Z)$ . Suponga que

$$\text{Cov}(dW_t, dZ_t) = \rho dt.$$

Durante el intervalo de tiempo  $[t, t + dt]$ , el nivel de contaminación cambia de  $E_t$  a  $E_t + dE_t$ , en consecuencia, el impuesto cambia de  $\tau(E_t, V_t, t)$  a  $\tau + d\tau$ . El cambio marginal en el impuesto se obtiene mediante el lema de Itô como:

$$d\tau = \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \mu E_t + \frac{\partial \tau}{\partial V_t} \alpha V_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial V_t^2} + \sigma_t \beta E_t V_t \rho \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t \partial V_t} \right) dt + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \sigma_t E_t dW_t + \frac{\partial \tau}{\partial V_t} \beta V_t dZ_t$$

ó

$$d\tau = \mu_\tau \tau dt + \sigma_\tau \tau dW_t + \xi_\tau \tau dZ_t,$$

donde

$$\mu_\tau = \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \mu E_t + \frac{\partial \tau}{\partial V_t} \alpha V_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial V_t^2} + \sigma_t \beta E_t V_t \rho \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t \partial V_t} \right) \Big/ \tau, \quad (3.4.6)$$

$$\sigma_\tau = \frac{\partial \tau}{\partial E_t} \frac{\sigma_t E_t}{\tau} \quad (3.4.7)$$

y

$$\xi_\tau = \frac{\partial \tau}{\partial V_t} \frac{\beta V_t}{\tau}. \quad (3.4.8)$$

Si se sustituye (3.4.4) y la ecuación anterior a (3.4.6) en (3.4.3), se tiene que

$$\begin{aligned} da_t = & a_t \left[ r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right] dt \\ & + a_t [(\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t}) dW_t + w_{2t} \xi_\tau dZ_t]. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Sea

$$J(a_t, V_t, t) = \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \ln(C_s) e^{-\delta s} ds + \ln(a_T) \frac{e^{-\delta T}}{\delta} \Big| \mathcal{F}_t \right].$$

La condición necesaria del problema de control óptimo estocástico en el que el consumidor racional desea maximizar la utilidad total queda expresado como:

$$\begin{aligned} 0 = & \ln(C_t) e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \left[ r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right] \\ & + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 \left[ (\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t})^2 + \xi_\tau^2 w_{2t}^2 + 2(\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t}) \xi_\tau w_{2t} \rho \right] \\ & + J_V \alpha V_t + \frac{1}{2} J_{VV} \beta^2 V_t^2 + J_{aV} a_t V_t \beta [(\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t}) \rho + \xi_\tau w_{2t}]. \end{aligned}$$

Considere el siguiente candidato de solución

$$J(a_t, V_t, t) = [\ln(a_t) + g(V_t, t)] \frac{1}{\delta} e^{-\delta t}.$$

En este caso, se sigue que  $g(V_t, T) = 0$ . Asimismo,

$$\begin{aligned} 0 &= \ln(C_t) - [\ln(a_t) + g(V_t, t)] + \frac{1}{\delta} \frac{\partial g}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{\delta} \left[ r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_\tau - r)w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right] \\ &- \frac{1}{2\delta} \left[ (\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t})^2 + \xi_\tau^2 w_{2t}^2 + 2(\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t}) \xi_\tau w_{2t} \rho \right] \\ &+ \frac{\alpha}{\delta} \frac{\partial g}{\partial V_t} V_t + \frac{\beta^2}{2\delta} \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2} V_t^2. \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son

$$C_t = \delta a_t, \quad (3.4.10)$$

$$\mu - r = (\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t}) \sigma_t + \xi_\tau w_{2t} \sigma_t \rho$$

y

$$\mu_\tau - r = (\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t}) \sigma_\tau + w_{2t} \xi_\tau^2 + (\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t}) \xi_\tau \rho + w_{2t} \sigma_\tau \xi_\tau \rho. \quad (3.4.11)$$

Las dos últimas condiciones se pueden reescribir como

$$\lambda_E \equiv \frac{\mu - r}{\sigma_t} = \sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t} + \xi_\tau w_{2t} \rho \quad (3.4.12)$$

y

$$\lambda_\tau \equiv \frac{\mu_\tau - r}{\sigma_\tau} = \sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t} + w_{2t} \frac{\xi_\tau^2}{\sigma_\tau} + (\sigma_t w_{1t} + \sigma_\tau w_{2t}) \rho \frac{\xi_\tau}{\sigma_\tau} + w_{2t} \xi_\tau \rho.$$

Al sustituir (3.4.12) en la expresión anterior, se tiene que

$$\lambda_\tau = \lambda_E \left( 1 + \rho \frac{\xi_\tau}{\sigma_\tau} \right) + w_{2t} \frac{\xi_\tau^2}{\sigma_\tau} (1 - \rho^2). \quad (3.4.13)$$

Si  $w_{2t} = 0$  y  $w_{1t} = 1$ , entonces

$$\lambda_\tau = \lambda_E \left( 1 + \rho \frac{\xi_\tau}{\sigma_\tau} \right). \quad (3.4.14)$$

Después de sustituir (3.4.6), (3.4.7) y (3.4.8) en la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} r E_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} V_t S_t^2 - r \tau + (\alpha - \lambda \beta) \frac{\partial \tau}{\partial V_t} V_t \\ + \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial V_t^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial E_t \partial V_t} \beta E_t V_t^{3/2} \rho = 0 \end{aligned}, \quad (3.4.15)$$

donde

$$\lambda \equiv \lambda_E \rho.$$

Si se sustituyen  $w_{1t} = 1$  y  $w_{2t} = 0$  en la condición HJB, se tiene que

$$0 = \log(\delta) - g + \frac{1}{\delta} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\mu}{\delta} - 1 - \frac{1}{2\delta} \sigma_t^2 + \frac{\alpha}{\delta} \frac{\partial g}{\partial V_t} V_t + \frac{1}{2\delta} \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2.$$

Ahora bien, en virtud de (3.33), se sigue que  $\sigma_t^2 = \mu - r$ . De esta manera,

$$0 = \delta[\log(\delta) - 1] + \frac{1}{2}(\mu + r) - \delta g + \frac{\partial g}{\partial t} + \alpha \frac{\partial g}{\partial V_t} V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2$$

junto con la condición de frontera  $g(V_t, T) = 0$ . La solución de esta ecuación diferencial parcial es independiente de  $V_t$  y está dada por

$$g(t) = A - A e^{-\delta(T-t)},$$

donde

$$A = \log(\delta) - 1 + \frac{1}{2\delta}(\mu + r).$$

Observe que  $g$  satisface

$$\frac{dg}{dt} = \delta g - \delta A$$

y  $g(T) = 0$ .

#### 4. Métodos numéricos para aproximar impuestos óptimos

##### 4.1 Introducción

Para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales se requiere de métodos numéricos. Una alternativa para encontrar soluciones numéricas consiste en utilizar los llamados métodos de diferencias finitas. En la literatura sobre análisis numérico existen muchos métodos de diferencias finitas para encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. En este capítulo se presentan varios de estos métodos destacando sus ventajas y limitaciones.

##### 4.2 Construcción de la malla

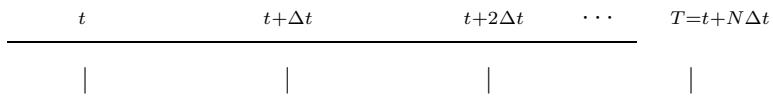
En lo sucesivo se estudiarán métodos de solución numérica hacia atrás (“backward”) en el tiempo. La diferencia con los métodos hacia adelante (“forward”) es simplemente un cambio de signo en la variable tiempo. La razón para considerar el tiempo hacia atrás es que las ecuaciones diferenciales parciales que caracterizan los impuestos óptimos tienen asociada una condición final. En los métodos de diferencias finitas es muy frecuente utilizar una malla regular en donde los nodos están igualmente espaciados en intervalos de tiempo y/o en intervalos del nivel de contaminación.

Considere una partición del intervalo  $[t, T]$  en  $N$  subintervalos del mismo tamaño  $\Delta t$ . Es decir,  $(T - t)/N = \Delta t$ . Defina ahora la siguiente partición:

$$t_n = T - n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (4.2.1)$$

Observe que el primer valor de esta partición corresponde a  $t_0 = T$  y el último a  $t_N = t$ . La partición definida en (4.2.1) se ilustra en la Gráfica 4.2.1

Gráfica 4.2.1 Partición del intervalo de tiempo  $[t, T]$ .

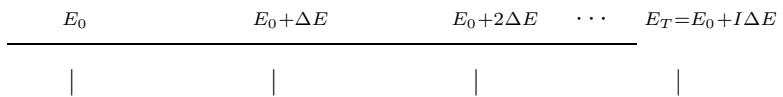


Denote ahora el nivel de contaminación mediante  $E_t$  y suponga que éste toma valores entre  $E_0$  y  $E_T$ . Defina, en este caso,

$$E_i = E_0 + i\Delta E, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (4.2.2)$$

donde  $\Delta E = (E_T - E_0)/I$ . Observe que el nivel de contaminación va de  $E_0$  a  $E_T$ . Esta partición del nivel de contaminación se puede apreciar en la Gráfica 4.2.2. Si se conoce  $r$ , entonces  $E_T$  se puede calcular como  $E_T = E_0 e^{rT}$ .

Gráfica 4.2.2 Valores de nivel de contaminación con incrementos constantes  $\Delta E$ .



Con base en las particiones  $\{t_n\}_{0 \leq n \leq N}$  y  $\{E_i\}_{0 \leq i \leq I}$  definidas anteriormente, cada nodo de la malla está dado por  $(E_i, t_n) = (E_0 + i\Delta E, T - n\Delta t)$  donde  $0 \leq i \leq I$  y  $0 \leq n \leq N$ .

A continuación se aproxima el cambio relativo del impuesto con respecto del tiempo. En lo sucesivo se denotará el nivel del impuesto, en cada uno de los nodos de la malla, mediante  $\tau_i^n = \tau(E_i, t_n) = \tau(E_0 + i\Delta E, T - n\Delta t)$ . De esta manera, el superíndice se refiere a la variable tiempo y el subíndice al nivel de contaminación. Ahora bien, por definición se tiene que

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau(E_t, t + h) - \tau(E_t, t)}{h}.$$

Esta derivada se puede aproximar con nodos horizontales de la malla, suficientemente cercanos. Si se supone que  $\tau_i^n$  y  $\tau_i^{n+1}$  son conocidos, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(E_i, t_n) \approx \frac{\tau_i^n - \tau_i^{n+1}}{\Delta t}. \quad (4.2.3)$$

En este caso, el error<sup>1</sup> tiene magnitud  $O(\Delta t)$ .

La ecuación (4.2.3) se puede justificar como sigue. Considera una expansión en serie de Taylor de  $\tau(E_t, t - \Delta t)$  hasta términos de segundo orden, es decir,

$$\begin{aligned} \tau(E_t, t - \Delta t) &= \tau(E_t, t) + (t - \Delta t - t) \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial t} + \frac{(t - \Delta t - t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial t^2} \\ &= \tau(E_t, t) - \Delta t \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial t^2} \\ &= \tau(E_t, t) - \Delta t \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial t} + O((\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

La segunda derivada parcial de la expresión anterior se evalúa en  $(E_t, t - \theta \Delta t)$  para algún  $\theta \in [0, 1]$ . Observe que por definición  $O((\Delta t)^2)$  satisface que  $O((\Delta t)^2)/(\Delta t)^2$  tiende a una constante cuando  $(\Delta t)^2 \rightarrow 0$ . Por supuesto, se supone que  $\tau = \tau(E_t, t)$  tiene derivadas parciales continuas del orden requerido. Si se omite el término de error y se despeja  $\tau(E_t, t - \Delta t)$  de la ecuación (4.2.4), se tiene

$$\tau(E_t, t - \Delta t) \approx \tau(E_t, t) - \Delta t \frac{\partial \tau}{\partial t}(E_t, t). \quad (4.2.5)$$

Ahora bien, en términos de los puntos de la malla, si  $t = t_n$  y  $E_t = E_0 + i\Delta E$ , se sigue que  $t_n - \Delta t = T - n\Delta t - \Delta t = T - (n + 1)\Delta t$  y

$$\begin{cases} \tau(E_0 + i\Delta E, t_n) = \tau(E_0 + i\Delta E, T - n\Delta t) = \tau_i^n \\ \tau(E_0 + i\Delta E, t_n - \Delta t) = \tau(E_0 + i\Delta E, T - (n + 1)\Delta t) = \tau_i^{n+1}, \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (4.2.5), se obtiene

$$\tau_i^n \approx \tau_i^{n+1} + \Delta t \frac{\partial \tau}{\partial t}(E_i, t_n). \quad (4.2.7)$$

En otras palabras,

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(E_i, t_n) \approx \frac{\tau_i^n - \tau_i^{n+1}}{\Delta t}. \quad (4.2.8)$$

Esta aproximación tiene un error  $O(\Delta t)$ , ya que  $O((\Delta t)^2)/\Delta t = O(\Delta t)$ . Este resultado coincide con (4.2.3).

---

<sup>1</sup> Por definición,  $O((\Delta t)^n)$  satisface que  $O((\Delta t)^n)/(\Delta t)^n$  tiende a una constante cuando  $(\Delta t) \rightarrow 0$ .

### 4.3 Cambio del impuesto con respecto del nivel de contaminación

A continuación se aproxima la razón de cambio del impuesto,  $\tau$ , con respecto del precio del nivel de contaminación,  $E_t$ . En este caso se tienen, fundamentalmente, tres formas distintas para calcular dicha aproximación. Para ello, se examina una sección vertical de la malla fijando el tiempo. Se destacan los siguientes tres casos. La diferencia “forward”, la cual está dada por

$$\frac{\partial \tau}{\partial E_t}(E_i, t_n) \approx \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{\Delta E}, \quad (4.3.1)$$

donde  $\tau_{i+1}^n = \tau(E_0 + (i+1)\Delta E, t_n)$  y  $\tau_i^n = \tau(E_0 + i\Delta E, t_n)$ . La diferencia “backward”

$$\frac{\partial \tau}{\partial E_t}(E_i, t_n) \approx \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{\Delta E}, \quad (4.3.2)$$

donde  $\tau_{i-1}^n = \tau(E_0 + (i-1)\Delta E, t)$ . Por último, la diferencia central

$$\frac{\partial \tau}{\partial E_t}(E_i, t_n) \approx \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n}{2\Delta E}. \quad (4.3.3)$$

Es importante destacar que las diferencias “forward” y “backward” tiene un error  $O(\Delta E)$ , mientras que la diferencia central lo tiene de  $O(\Delta E)^2$ . A continuación se justifican las aproximaciones (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.3). Todas ellas utilizan una expansión en serie de Taylor.

#### 4.3.1 Diferencia “forward”

Considere una expansión en serie de Taylor del impuesto  $\tau(E_t, t)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tau(E_t + \Delta E, t) &= \tau(E_t, t) + (E_t + \Delta E - E_t) \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E} \\ &\quad + \frac{(E_t + \Delta E - E_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} \\ &= \tau(E_t, t) + \Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} + \frac{(\Delta E)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} \\ &= \tau(E_t, t) + \Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} + O((\Delta E)^2). \end{aligned} \quad (4.3.1.1)$$

La segunda derivada parcial de la expresión anterior se evalúa en  $(E_t + \theta \Delta E, t)$  para algún  $\theta \in [0, 1]$ . Si se omite el término de error en la expresión anterior, se sigue que

$$\tau(E_t + \Delta E, t) \approx \tau(E_t, t) + \Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t}. \quad (4.3.1.2)$$

En términos de valores en los nodos de la malla, se tiene que:

$$\tau_i^n = \tau(E_i, t_n) \quad \text{y} \quad \tau_{i+1}^n = \tau(E_0 + (i+1)\Delta E, t_n). \quad (4.3.1.3)$$

Por lo tanto, la aproximación (4.13) en el nodo  $(E_i, t_n)$  puede reescribirse como

$$\frac{\partial \tau}{\partial E_t}(E_i, t_n) \approx \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{\Delta E}. \quad (4.3.1.4)$$

Evidentemente, la expresión anterior tiene un error de magnitud  $O(\Delta E)$ .

#### 4.3.2 Diferencia "backward"

Considere una expansión en serie de Taylor del impuesto  $\tau(E_t, t)$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tau(E_t - \Delta E, t) &= \tau(E_t, t) + (E_t - \Delta E - E_t) \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} \\ &\quad + \frac{(E_t - \Delta E - E_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} \\ &= \tau(E_t, t) - \Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} + O((\Delta E)^2). \end{aligned} \quad (4.3.2.1)$$

La segunda derivada parcial de la expresión anterior se evalúa en  $(E_t - \theta \Delta E, t)$  para algún  $\theta \in [0, 1]$ . Si se omite el término de error y se despeja  $\tau(E_t - \Delta E, t)$  de la ecuación anterior, se obtiene

$$\tau(E_t - \Delta E, t) \approx \tau(E_t, t) - \Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t}. \quad (4.3.2.2)$$

Ahora bien, en términos de valores en los nodos de la malla, si  $E_t = E_0 + i \Delta E$ , se tiene que

$$\tau(E_0 + (i-1) \Delta E, t_n) = \tau_{i-1}^n. \quad (4.3.2.3)$$

Por lo tanto, la ecuación (4.17) conduce a la siguiente aproximación:

$$\frac{\partial \tau}{\partial E_t}(E_i, t_n) \approx \frac{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n}{\Delta E}, \quad (4.3.2.4)$$

la cual tiene un error de magnitud  $O(\Delta E)$ .

#### 4.3.3 Diferencia central

La diferencia central utiliza las diferencias “forward” y “backward”. Por un lado, en virtud de (4.3.1.1), se obtiene que

$$\begin{aligned}\tau(E_t + \Delta E, t) &= \tau(E_t, t) + \Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} \\ &\quad + \frac{(E_t + \Delta E - E_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} + O((\Delta E)^3).\end{aligned}\tag{4.3.3.1}$$

Por otro lado, con base en (4.3.2.1), se tiene que

$$\begin{aligned}\tau(E_t - \Delta E, t) &= \tau(E_t, t) - \Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} \\ &\quad + \frac{(E_t - \Delta E - E_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} + O((\Delta E)^3).\end{aligned}\tag{4.3.3.2}$$

En consecuencia, si se toma la diferencia entre las ecuaciones (4.3.3.1) y (4.3.3.2) se sigue que

$$\frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} = \frac{\tau(E_t + \Delta E, t) - \tau(E_t - \Delta E, t)}{2\Delta E} + O((\Delta E)^2).\tag{4.3.3.3}$$

En términos de nodos de la malla, se obtiene la siguiente aproximación:

$$\frac{\partial \tau}{\partial E_t}(E_i, t_n) \approx \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n}{2\Delta E}.\tag{4.3.3.4}$$

La diferencia central tiene un error de magnitud  $O((\Delta E)^2)$ , el cual es menor que el de las diferencias “forward” o “backward”, como puede notarse, esto se debe a la cancelación de varios términos de las expansiones (4.3.3.1) y (4.3.3.2). Es importante destacar que en el cálculo de la diferencia central se requiere conocer los valores de  $\tau$  en  $E_t + \Delta E$  y  $E_t - \Delta E$ . De esta manera, si se está en la frontera de la región, es decir, en  $i = 0$  ó  $i = I$ , entonces no es posible calcular dicha aproximación y se tendrán que utilizar las diferencias “forward” o “backward”.

Suponga ahora que se desean utilizar los puntos  $E_t$ ,  $E_t + \Delta E$  y  $E_t + 2\Delta E$  para aproximar la derivada de  $\tau$  con respecto de  $E_t$ . En este caso, se tiene que

$$\tau(E_t + \Delta E, t) = \tau(E_t, t) + \Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} + \frac{(\Delta E)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} + O((\Delta E)^3).\tag{4.3.3.5}$$

Por otro lado, si se expande  $\tau$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\tau(E_t + 2\Delta E, t) &= \tau(E_t, t) + (E_t + 2\Delta E - E_t) \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} \\ &\quad + \frac{(E_t + 2\Delta E - E_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} + O((\Delta E)^3) \\ &= \tau(E_t, t) + 2\Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} + 2(\Delta E)^2 \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} + O((\Delta E)^3)\end{aligned}\tag{4.3.3.6}$$

y se omite el término de error, se tiene

$$\tau(E_t + 2\Delta E, t) \approx \tau(E_t, t) + 2\Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} - 2(\Delta E)^2 \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2}. \quad (4.3.3.7)$$

Si se considera ahora la siguiente combinación de las ecuaciones (4.3.3.6) y (4.3.3.7):

$$\begin{aligned} & \tau(E_t + 2\Delta E, t) - 4\tau(E_t + \Delta E, t) \\ & \approx \tau(E_t, t) + 2\Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} + 2(\Delta E)^2 \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} \\ & \quad - 4 \left( \tau(E_t, t) + \Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} + \frac{(\Delta E)^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau(E_t, t)}{\partial E_t^2} \right) \\ & \quad - 3\tau(E_t, t) - 2\Delta E \frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} \end{aligned} \quad (4.3.3.8)$$

y se despeja  $\partial \tau(E_t, t) / \partial E_t$ , se obtiene

$$\frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} \approx \frac{4\tau(E_t + \Delta E, t) - 3\tau(E_t, t) - \tau(E_t - 2\Delta E, t)}{2\Delta E}. \quad (4.3.3.9)$$

La expresión anterior se puede expresar, en términos de nodos de la malla, como:

$$\frac{\partial \tau}{\partial E_t}(E_i, t_n) \approx \frac{4\tau_{i+1}^n - 3\tau_i^n - \tau_{i-2}^n}{2\Delta E}, \quad (4.3.3.10)$$

la cual tiene un error  $O((\Delta E)^2)$ . Esta aproximación es del mismo orden de ajuste que la diferencia central. De la misma manera, si lo que se desea es aproximar la derivada de  $\tau$  con respecto de  $E_t$  utilizando la diferencia “backward”, es decir, empleando  $E_t$ ,  $E_t - \Delta E$  y  $E_t - 2\Delta E$ , se tiene que

$$\frac{\partial \tau(E_t, t)}{\partial E_t} \approx \frac{-4\tau(E_t - \Delta E, t) + 3\tau(E_t, t) + \tau(E_t - 2\Delta E, t)}{2\Delta E} \quad (4.3.3.11)$$

o en términos de la malla

$$\frac{\partial \tau}{\partial E_t}(E_i, t_n) \approx \frac{-4\tau_{i-1}^n + 3\tau_i^n + \tau_{i-2}^n}{2\Delta E}, \quad (4.3.3.12)$$

la cual tiene un error  $(O(\Delta E)^2)$ . Por último, para aproximar la segunda derivada de  $\tau$  con respecto del precio de  $E_t$  en  $(E_i, t_n)$ , con base en la diferencia central, se puede mostrar fácilmente que

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2}(E_i, t_n) \approx \frac{\tau_{i+1}^n - 2\tau_i^n + \tau_{i-1}^n}{(\Delta E)^2}, \quad (4.3.3.13)$$

con un error de magnitud  $(O(\Delta E)^2)$ . Es importante destacar que en la práctica, la aproximación anterior se utiliza con mucha frecuencia.

#### 4.4 El método explícito de diferencias finitas

Considere una ecuación diferencial parcial de segundo orden de la forma

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sigma(E_t, t) \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} + \mu(E_t, t) \frac{\partial \tau}{\partial E_t} + \gamma(E_t, t) \tau = 0, \quad (4.4.1)$$

donde  $\sigma(E_t, t) > 0$ . Por supuesto, junto con (4.4.1) se requiere especificar una condición final  $\tau(E_t, T) = h(E_t)$  para alguna función  $h$ . Al sustituir en la expresión anterior las aproximaciones con diferencias centrales de las derivadas parciales, obtenidas en las secciones anteriores, se tiene

$$\frac{\tau_i^n - \tau_i^{n+1}}{\Delta t} + \sigma_i^n \left( \frac{\tau_{i+1}^n - 2\tau_i^n + \tau_{i-1}^n}{(\Delta E)^2} \right) + \mu_i^n \left( \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n}{2\Delta E} \right) + \gamma_i^n \tau_i^n = 0. \quad (4.4.2)$$

El error en la ecuación es del orden  $O(\Delta t, (\Delta E)^2)$ . Las funciones  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $\gamma$  se valúan en  $E_i = E_0 + i\Delta E$  y en  $t_n = T - n\Delta t$ . Si se resuelve la ecuación anterior en términos de  $\tau_i^{n+1}$ , se sigue inmediatamente que

$$\tau_i^{n+1} = M_i^n \tau_{i-1}^n + (1 + N_i^n) \tau_i^n + P_i^n \tau_{i+1}^n, \quad (4.4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} M_i^n &= q_1 \sigma_i^n - \frac{1}{2} q_2 \mu_i^n, \\ N_i^n &= -2q_1 \sigma_i^n + (\Delta t) \gamma_i^n, \\ P_i^n &= q_1 \sigma_i^n + \frac{1}{2} q_2 \mu_i^n, \\ q_1 &= \frac{\Delta t}{(\Delta E)^2} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{\Delta t}{\Delta E}. \end{aligned}$$

La ecuación (4.4.3) se calcula en  $i = 1, 2, \dots, I-1$ , es decir, en puntos interiores, puesto que  $\tau_{-1}^n$  y  $\tau_{I+1}^n$  no están definidos. Así pues, existen  $I-1$  ecuaciones para  $I+1$  variables desconocidas  $\tau_i^n$ . Las condiciones de frontera para  $i=0$  e  $i=I$  proporcionan las dos ecuaciones faltantes. Debido a que la relación entre los valores del impuesto en el tiempo  $t_{n+1}$  es función sólo de los valores del impuesto en el tiempo  $t_n$ , a este método se le conoce como el método explícito de diferencias finitas. Aunque el método explícito es fácil de programar, no siempre converge. Por último, es importante destacar que la convergencia depende de la magnitud de los intervalos de tiempo y de niveles de contaminación, así como de las formas funcionales de  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $\gamma$ .

#### 4.5 Método implícito de diferencias finitas

El método implícito siempre converge y para aproximar  $\tau$  utiliza los nodos de la malla. En este caso, la relación “backward” entre los valores del impuesto sobre la malla se toma de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\tau_i^n - \tau_i^{n+1}}{\Delta t} + \sigma_i^{n+1} \left( \frac{\tau_{i+1}^{n+1} - 2\tau_i^{n+1} + \tau_{i-1}^{n+1}}{\Delta E^2} \right) \\ + \mu_i^{n+1} \left( \frac{\tau_{i+1}^{n+1} - \tau_{i-1}^{n+1}}{2\Delta E} \right) + \gamma_i^{n+1} \tau_i^{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

El error de este método es  $O(\Delta t, (\Delta E)^2)$ .

La ecuación (4.5.1) se puede escribir como

$$M_i^{n+1} \tau_{i-1}^{n+1} + (1 + N_i^{n+1}) \tau_i^{n+1} + P_i^{n+1} \tau_{i+1}^{n+1} = \tau_i^n, \quad (4.5.2)$$

donde

$$\begin{aligned} M_i^{n+1} &= -q_1 \sigma_i^{n+1} - \frac{1}{2} q_2 \mu_i^{n+1}, \\ N_i^{n+1} &= 2q_1 \sigma_i^{n+1} - (\Delta t) \gamma_i^{n+1}, \\ P_i^{n+1} &= -q_1 \sigma_i^{n+1} + \frac{1}{2} q_2 \mu_i^{n+1}, \\ q_1 &= \frac{\Delta t}{(\Delta E)^2} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{\Delta t}{\Delta E}. \end{aligned}$$

Como antes, esta ecuación no se cumple para  $i = 0$  ó  $i = I$ , las condiciones de frontera proporcionan las ecuaciones faltantes. Las diferencias principales entre este método y el método explícito son la estabilidad del método y el procedimiento de solución. Ahora, para calcular  $\tau_i^{n+1}$  a partir de  $\tau_i^n$  se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales.

#### 4.6 Método de diferencias finitas para modelos de dos factores

Muchos modelos para determinar impuestos utilizan dos movimientos Brownianos. Por ejemplo, cuando el nivel de contaminación tiene volatilidad estocástica o cuando el impuesto se descuenta a una tasa variable. A continuación, se presenta el método de diferencias finitas para encontrar soluciones numéricas de este tipo de impuesto. En dimensiones mayores (tres o más), definitivamente es mejor utilizar el método de simulación Monte Carlo.

Considere la siguiente ecuación de dos factores de riesgo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \sigma(E_t, r_t, t) \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} + \mu(E_t, r_t, t) \frac{\partial \tau}{\partial E_t} + \gamma(E_t, r_t, t) \tau \\ + \beta(E, r, t) \frac{\partial^2 \tau}{\partial r_t^2} + \alpha(E_t, r_t, t) \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t \partial r_t} + \phi(E_t, r_t, t) \frac{\partial \tau}{\partial r_t} = 0. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

En este caso se utiliza una malla tridimensional

$$E_i = E_0 + i\Delta E, \quad r_j = r_0 + j\Delta r \quad y \quad t_n = T - n\Delta t.$$

La tasa impositiva se escribe como  $\tau(E_i, r_j, t_n) = \tau_{ij}^n$ . Para resolver esta ecuación mediante diferencias finitas se requiere una condición final  $\tau(E_i, r_j, T) = \tau_{ij}^0$ . La ecuación (4.6.1) se aproximarán utilizando diferencias centrales. En consecuencia, la segunda derivada  $\partial^2 \tau / \partial E_t \partial r_t$  se aproxima mediante la expresión

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial \tau}{\partial r_t} \right)}{\partial E_t} \approx \frac{\frac{\partial \tau}{\partial r_t}(E_t + \Delta E, r_t, t) - \frac{\partial \tau}{\partial r_t}(E_t - \Delta E, r_t, t)}{2\Delta E}. \quad (4.6.2)$$

Observe que

$$\frac{\partial \tau}{\partial r_t}(E_i + \Delta E, r_j, t) \approx \frac{\tau_{i+1,j+1}^n - \tau_{i+1,j-1}^n}{2\Delta r}$$

y

$$\frac{\partial \tau}{\partial r_t}(E_i - \Delta E, r_j, t) \approx \frac{\tau_{i-1,j+1}^n - \tau_{i-1,j-1}^n}{2\Delta r},$$

lo cual conduce a una discretización de (4.6.1) de la forma

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\tau_{i+1,j+1}^n - \tau_{i+1,j-1}^n}{2\Delta r} - \frac{\tau_{i-1,j+1}^n - \tau_{i-1,j-1}^n}{2\Delta r} \right) \frac{1}{2\Delta E} \\ &= \frac{\tau_{i+1,j+1}^n - \tau_{i+1,j-1}^n - \tau_{i-1,j+1}^n + \tau_{i-1,j-1}^n}{4(\Delta E)(\Delta r)}. \end{aligned}$$

Esta aproximación preserva la propiedad

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t \partial r_t} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial r_t \partial E_t}.$$

De esta manera, el método de diferencias explícitas para dos factores conduce a

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_{ij}^n - \tau_{ij}^{n+1}}{\Delta t} + \sigma_{ij}^n \left( \frac{\tau_{i+1,j}^n - 2\tau_{ij}^n + \tau_{i-1,j}^n}{(\Delta E)^2} \right) + \mu_{ij}^n \left( \frac{\tau_{i+1,j}^n - \tau_{i-1,j}^n}{2\Delta E} \right) + \gamma_{ij}^n \tau_{ij}^n \\ &+ \beta_{ij}^n \left( \frac{\tau_{i,j+1}^n - 2\tau_{ij}^n + \tau_{i,j-1}^n}{(\Delta r)^2} \right) \\ &+ \alpha_{ij}^n \left( \frac{\tau_{i+1,j+1}^n - \tau_{i+1,j-1}^n - \tau_{i-1,j+1}^n + \tau_{i-1,j-1}^n}{4(\Delta E \Delta r)} \right) \\ &+ \phi_{ij}^n \left( \frac{\tau_{i,j+1}^n - \tau_{i,j-1}^n}{2\Delta r} \right) = 0 \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

con un error  $O(\Delta t, (\Delta E)^2, (\Delta r)^2)$ .

#### 4.7 Aplicación del método de diferencias finitas para impuestos óptimos

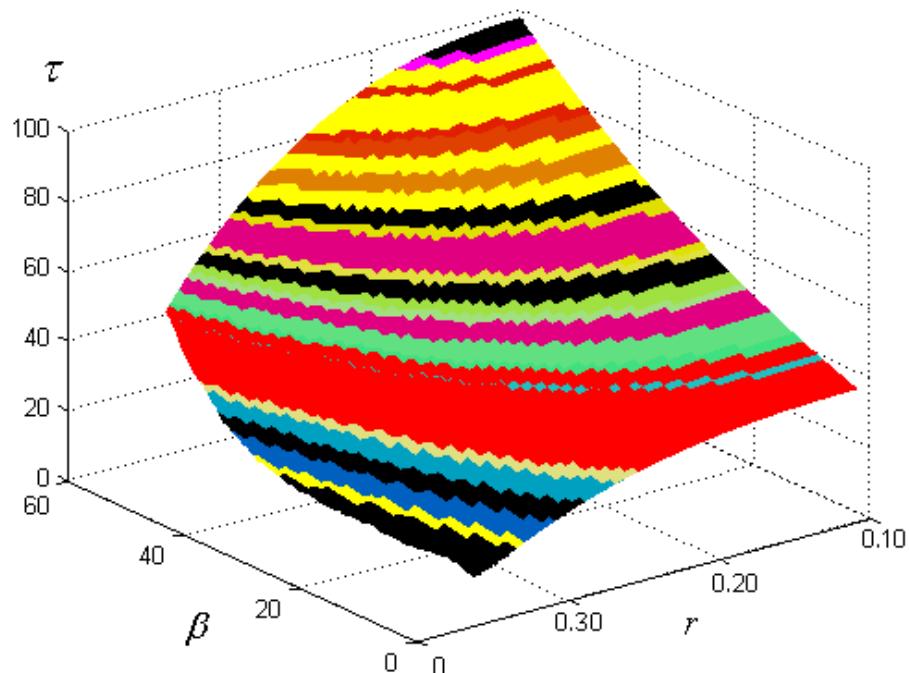
En esta sección se aplica el método explícito de diferencias finitas con dos factores  $E_t$  y  $V_t$  para aproximar el valor del impuesto que se obtiene como solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial E_t} r E_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial E_t^2} V_t S_t^2 - r \tau + (\alpha - \lambda \beta) \frac{\partial \tau}{\partial V_t} V_t \\ &+ \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial V_t^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial E_t \partial V_t} \beta E_t V_t^{3/2} \rho = 0, \end{aligned}$$

la cual fue deducida en el capítulo 3 para impuestos por contaminación con volatilidad estocástica, específicamente la ecuación (3.4.15).

La gráfica 4.7 muestra las soluciones aproximadas para un impuesto óptimo para diferentes valores de  $r$  y  $\beta$  cuando  $\rho = \alpha = \lambda = 0$ . En este caso, para la generación de la malla, se han tomado los valores  $N = 4000$  e  $I = 300$  en una corrida de Mathlab<sup>©</sup> versión 6.1. El orden de error del método empleado es  $O(\Delta t, (\Delta E)^2, (\Delta V)^2)$ . En este caso, afortunadamente, se alcanzó la convergencia del método explícito.

Gráfico 4.7 Valores aproximados del impuesto óptimo



Observe que conforme la tasa de interés real aumenta, el factor de descuento disminuye y, en consecuencia, el valor del impuesto óptimo disminuye. Asimismo, cuando la volatilidad de la volatilidad aumenta, se tiene que el impuesto óptimo aumenta.

## 5. Método Monte Carlo para estimar impuestos óptimos

Suponga que el nivel de contaminación se comporta de acuerdo a un movimiento geométrico Browniano, es decir,

$$dE_t = \mu E_t dt + \sigma E_t dW_t, \quad (5.1)$$

donde  $\mu$  es el nivel promedio de contaminación esperada,  $\sigma$  es la volatilidad instantánea y  $dW_t \sim N(0, dt)$ . El valor del impuesto óptimo está dado por

$$\tau(E_t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(E_{T-t} - K, 0) \mid \mathcal{F}_0] \quad (5.2)$$

Si se utilizan incrementos discretos, el nivel de contaminación, en la ecuación (5.1), se puede escribir como

$$\Delta E_t = \mu E_t \Delta t + \sigma E_t \sqrt{\Delta t} \mathcal{E}, \quad (5.3)$$

donde  $\mathcal{E}$  es una variable normal estándar. Esta forma discreta de simular  $E_t$  es conocida como el método de Euler. En este caso, a partir de un valor inicial  $E_0$  y la generación de un número aleatorio de  $\mathcal{E}$ , se calcula un posible valor de  $\Delta E_1$ , el cual, posteriormente, se utiliza para calcular  $E_1 = E_0 + \Delta E_1$ , y así sucesivamente. El método es fácil de aplicar a una ecuación diferencial estocástica y tiene un error del tipo  $O(\Delta t)$ . Por otro lado, la aplicación del lema de Itô, a (5.1), conduce a la siguiente ecuación:

$$d(\ln E_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t, \quad (5.4)$$

la cual tiene una versión discreta dada por

$$E_{t+\Delta t} = E_t \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \mathcal{E} \right\}. \quad (5.5)$$

En este caso, los valores simulados del nivel de contaminación se inician con un valor  $E_0$  y la generación de un número aleatorio de  $\mathcal{E}_1$  para obtener un posible valor de  $E_1$  y así sucesivamente. Con base en las ideas anteriores, se puede proponer el siguiente algoritmo para determinar el valor aproximado del impuesto óptimo:

- (i) Simular el comportamiento de  $E_t$ , partiendo de un valor presente,  $E_0$ , y continuando hasta la fecha  $T$ , lo cual proporciona una posible trayectoria (realización) del impuesto;
- (ii) Calcular para cada realización el valor intrínseco del impuesto;
- (iii) Repetir  $n$  veces los pasos anteriores;
- (iv) Calcular el promedio de los valores intrínsecos obtenidos;
- (v) Calcular el valor presente del promedio anterior, lo cual finalmente proporciona el impuesto óptimo.

Observe que entre mayor sea el número de realizaciones, mayor será la precisión del resultado. Si se aumentan en cien veces las simulaciones, entonces la precisión aumenta en una décima. Por supuesto, la precisión también depende de la calidad de los números aleatorios, por lo que es recomendable llevar a cabo una prueba de aleatoriedad.

Vale la pena mencionar que en la práctica es muy frecuente emplear variables aleatorias uniformes en  $[0,1]$  para generar variables aleatorias normales estándar a través del método de Box-Muller, el cual establece que se pueden utilizar

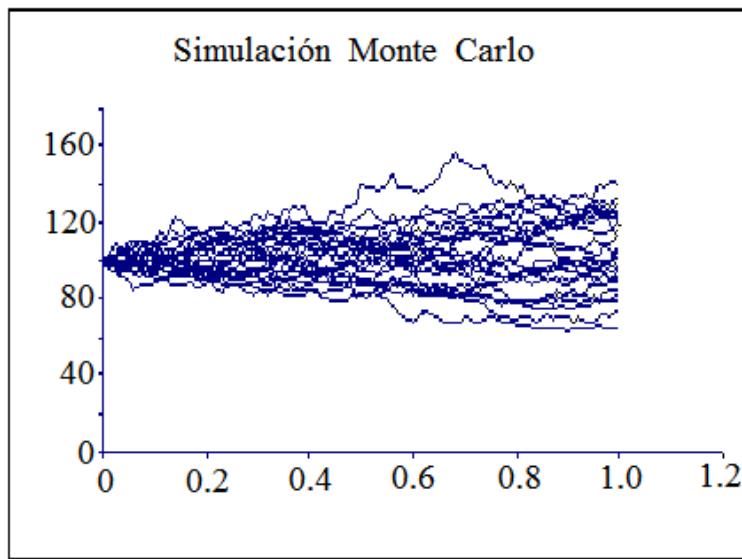
$$\mathcal{E} = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$

ó

$$\mathcal{E} = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$$

para generar valores de  $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  con  $U_1, U_2 \sim U[0, 1]$ . En la Gráfica 5.1 se presenta la simulación de 25 trayectorias del nivel de contaminación.

Gráfico 5.1 Simulación Monte Carlo de 25 trayectorias del impuesto



Para calcular el impuesto óptimo con el método de simulación Monte Carlo considerando 1000 realizaciones con  $E_0 = 100$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\mu = 4.0\%$ ,  $K = 105$ , se tiene que  $\tau = 5.4240$ .

## 6. Conclusiones

En este trabajo de investigación se ha determinado un impuesto por contaminación ambiental. Los casos por contaminación extrema y por contaminación con volatilidad estocástica se han analizado. En el primer caso se obtuvo una fórmula cerrada y en el segundo se han utilizado métodos numéricos para generar soluciones aproximadas. En todos los casos estudiados se considera un consumidor racional representativo que obtiene satisfacción de un bien que viene acompañado de una envoltura o recipiente que tiene un costo en términos reales para el consumidor. Dicha envoltura no produce satisfacción, es desecharla, y no es biodegradable.

Asimismo se llevó a cabo una aplicación del método de diferencias finitas para aproximar impuestos óptimos como soluciones de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, particularmente cuando el nivel de contaminación presenta volatilidad estocástica. Por último se empleó el método de simulación Monte Carlo para aproximar el valor de un impuesto óptimo.

Por supuesto, más investigación se requiere a fin de incorporar un umbral estocástico, por ejemplo, un umbral cuya dinámica esté determinada por el movimiento geométrico browniano.

## BIBLIOGRAFÍA

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*. Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Dixit, A. K, and R. S. Pindyck. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton (University Press, Princeton NJ).
- Henderson, V., and D. G. Hobson (2002). Real Options with Constant Relative Risk Aversion. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27(2), pp. 329-355.
- Lewis, A. L. (2000). *Option Valuation Under Stochastic Volatility: With Mathematica Code*, Finance Press. U. K.
- Masaki, K. (2003). *Stochastic Processes with Applications to Finance*, Chapman & Hall, ACRC Press Company.
- Merton, R. C. (1969). "Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case". *Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 3, pp. 247-257.
- Merton, R. C. (1994). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model". *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, No. 4, pp. 373-413.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing".
- Metropolis, N. and S. Ulam (1949). "The Monte Carlo Method". *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 44, No. 247, pp. 335-341. *Bell Journal of Economics*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Reiss, R. D., Thomas, M., 2001. *Statistical Analysis of Extreme Values*. Second edition Birkhäuser-Verlag, Basel, Switzerland.
- Ross, S. M. (1999). *Simulación*. Segunda edición, Pearson, Prentice Hall.
- Schwartz, E. S. and L. Trigeorgis (2001), *Real Options and Investment under Uncertainty*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England.
- Smith G. D. (1986). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods* (Oxford Applied Mathematics & Computing Science Series). 3rd edition. Oxford University Press.
- Strobel, F. (2005). Monetary integration and inflation preferences: a real options analysis. *European Economic Review*, 49(4), pp. 845-860.
- Venegas-Martínez, F. (2008). "Temporary Stabilization in Developing Countries and the Real Option of Waiting when Consumption Can Be Delayed". *International Journal of Economic Research*, Vol. 7, forthcoming.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre)*, 2da. edición, Cengage Learning Editors (anteriormente International Thomson Editors),- México.
- Venegas-Martínez, F. y G. P. Aguilar (2004). "Maximización de utilidad y valuación de derivados con volatilidad estocástica". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas, REMEF*, Vol. 4, No. 2, pp. 73-82.
- Wilmott, P., S. Howison, and J. Dewynne (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press.