

Paniagua Vásquez, Carlos B.
CÁLCULO PARA COSTA RICA DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD Y SU
INCERTIDUMBRE, APLICANDO EL MÉTODO DE MONTE CARLO A LA FÓRMULA
INTERNACIONAL DE LA GRAVEDAD
Ingeniería. Revista de la Universidad de Costa Rica, vol. 17, núm. 2, agosto-diciembre,
2007, pp. 11-18
Universidad de Costa Rica
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Costa Rica

Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44170520008>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

CÁLCULO PARA COSTA RICA DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD Y SU INCERTIDUMBRE, APLICANDO EL MÉTODO DE MONTE CARLO A LA FÓRMULA INTERNACIONAL DE LA GRAVEDAD

Carlos Paniagua Vásquez

Resumen

Se determinó la aceleración de la gravedad (g), con su incertidumbre asociada y a un nivel adecuado, para su uso en todo el territorio continental de Costa Rica y para aquellas aplicaciones más comunes de la metrología, por medio del método de Monte Carlo aplicado a la Fórmula Internacional de la Gravedad.

Se obtuvo el mejor estimado de g en $9,775\ 89\ m\cdot s^{-2}$ y la incertidumbre estándar asociada de $0,003\ 41\ m\cdot s^{-2}$.

El tipo de incertidumbre alcanzado permite el uso de este valor en laboratorios secundarios que requieran, para sus usos, una incertidumbre mayor o igual que $0,003\ 41\ m\cdot s^{-2}$.

Palabras clave: aceleración de la gravedad, Fórmula Internacional de la Gravedad, Monte Carlo, usos generales metrología.

Abstract

It was determined gravity acceleration (g), with its uncertainty budget, at an suitable level fitness for purposes for use it in all the continental territory of Costa Rica, for common applications of the metrology, by the Monte Carlo method applied to the International Formula of Gravity.

The following result was obtained: best estimate is $9,775\ 89\ m\cdot s^{-2}$ and standard uncertainty $0,003\ 41\ m\cdot s^{-2}$. The difference in this value is not significant at the 66% level, two tails, with the experimental value of the Laboratory Costarricense de Metroología, LACOMET (2008).

Its uncertainty allows the use of this value in secondary laboratories that require, for its uses, a relative uncertainty greater o equal than 0,000 35.

Key words: gravity acceleration, International Gravity Formula, Monte Carlo, general uses in metrology.

Recibido: 16 de julio del 2008 • **Aprobado:** 17 de agosto del 2008

1 INTRODUCCIÓN

La fuerza de la gravedad permite definir el peso de un objeto, mantenernos en la superficie de la Tierra sin ser expulsados de ella y es el origen de la caída libre de los cuerpos. Esta fuerza es proporcional a la masa: $F = m \cdot g$, en donde g es la **aceleración de la gravedad**. Van Camp, Camelbeeck, & Richard (2003) se refieren a esta como una magnitud que depende, principalmente, de la altura sobre el nivel

del mar, de la latitud, y con una dependencia menor de la distribución de la masa interior y la rotación de la Tierra; la posición relativa de la Tierra con el sol y la luna, que causa las mareas.

En metrología, g interviene en la definición de las unidades derivadas del kilogramo, (entre otras el ampére, newton, pascal) y en la subsecuente determinación de las magnitudes correspondientes. Van Camp, Camelbeeck, & Richard (2003) son de

la opinión de que juega un papel muy importante en la nueva realización del kilogramo. El enfoque más prometedor es el de la balanza de Watt, que permite la definición del kilogramo en términos del metro, el segundo y la constante de Plank, (\hbar), lo que permite unir la masa a la potencia eléctrica que es medida en términos de los efectos de Josephson y Hall cuántico.

2 METODOLOGÍA

2.1 Fórmula para el cálculo de g

En 1979 la International Association of Geodesy (IAG) adoptó el Sistema Geodésico de Referencia 1980 (GRS80), que condujo al Sistema Geodésico Mundial 1984 (WGS84), y a la Fórmula Internacional de la Gravedad (IGF) según lo establecen Feathersotne & Dentith (1997), conocida también como fórmula somigliana, ecuación (1).

$$g = g_e \frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (1)$$

En donde:

k es la constante normal de la gravedad, adimensional;

g_e es la gravedad normal en el ecuador; en $m \cdot s^{-2}$;

e^2 es el cuadrado de la primera excentridad numérica; y

ϕ es la latitud geodésica del elipsoide terrestre medio.

Los valores para estas constantes se muestran en el Cuadro 1.

Este modelo funciona muy bien en la superficie del elipsoide, pero falla cuando uno se mueve lejos de esa superficie, este cambio con la altura se corrige y se obtiene la ecuación (2).

Cuadro 1. Valores para las constantes

Constante	GRS80
g_e ($m \cdot s^{-2}$)	9,780 326 771 5
k	0,001 931 851 353
e^2	0,006 694 380 022 90

Fuente: (Feathersotne & Dentith, 1997).

En donde:

H_P es la altura sobre el nivel del mar en m; y

$-3,086 \cdot 10^6$ es el coeficiente de corrección de la altura sugerido por Hofmann-Wellenhof & Moritz (2005), adimensional,

Con base en la ecuación (2) y con las premisas siguientes se realizan los cálculos.

2.2 Posición geográfica de Costa Rica

- **Puntos extremos de latitud**

Esta información fue suministrada por el Instituto Geográfico Nacional (2008).

- Sur: $08^\circ 02' 26''$ (Punta Burica, punto más meridional del territorio continental).
- Norte: $11^\circ 13' 12''$ (lugar donde el Río Sapoá entra a Nicaragua).

En notación decimal se tiene:

- Latitud sur: $8,040\ 56^\circ$
- Latitud norte: $11,220\ 00^\circ$

- **Puntos extremos de altitud**

Esta información fue suministrada, vía correo electrónico, por el Instituto Geográfico Nacional (2008).

- 0 m, nivel del mar
- 3 819 m sobre el nivel del mar, Cerro Chirripó

$$g = \left\{ 9,780\,326\,771\,5 \cdot \left[\frac{1 + 0,001\,931\,851\,353 \cdot \sin^2(\phi)}{\sqrt{1 - 0,006\,694\,380\,022\,90 \cdot \sin^2(\phi)}} \right] - 3,086 \cdot 10^{-6} \cdot H_p \right\} \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (2)$$

2.3 Premisas

Para la latitud, el valor mínimo es $a = 8,040\,56^\circ$ y el máximo $b = 11,220\,00^\circ$; se puede asignar a la latitud una distribución rectangular con un rango $[a; b]$. La función de distribución de probabilidad (FDP) está dada por la ecuación (3).

$$g_\phi(\xi) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \leq \xi \leq b \\ 0 & \text{demás valores} \end{cases} \quad (3)$$

Con mejor expectativa y varianza:

$$E(\phi) = \frac{a+b}{2} \quad (4)$$

En donde:

$E(\phi)$ es la expectativa o valor esperado de la latitud, expresado en grados ($^\circ$).

Y con varianza

$$V(\phi) = \frac{(a+b)^2}{12} \quad (5)$$

En donde:

$E(\phi)$ es la varianza de la latitud, expresado en grados al cuadrado ($^\circ$)².

Para la altura, las consideraciones son análogas con $c = 0\text{ m}$ y $d = 3\,819\text{ m}$, con un rango de $[c; d]$. La FDP estará dada por:

$$g_{H_p}(\xi) = \begin{cases} 1/(d-c) & c \leq \xi \leq d \\ 0 & \text{demás valores} \end{cases} \quad (6)$$

Y con mejor expectativa y varianza:

$$E(H_p) = \frac{c+d}{2} \quad (7)$$

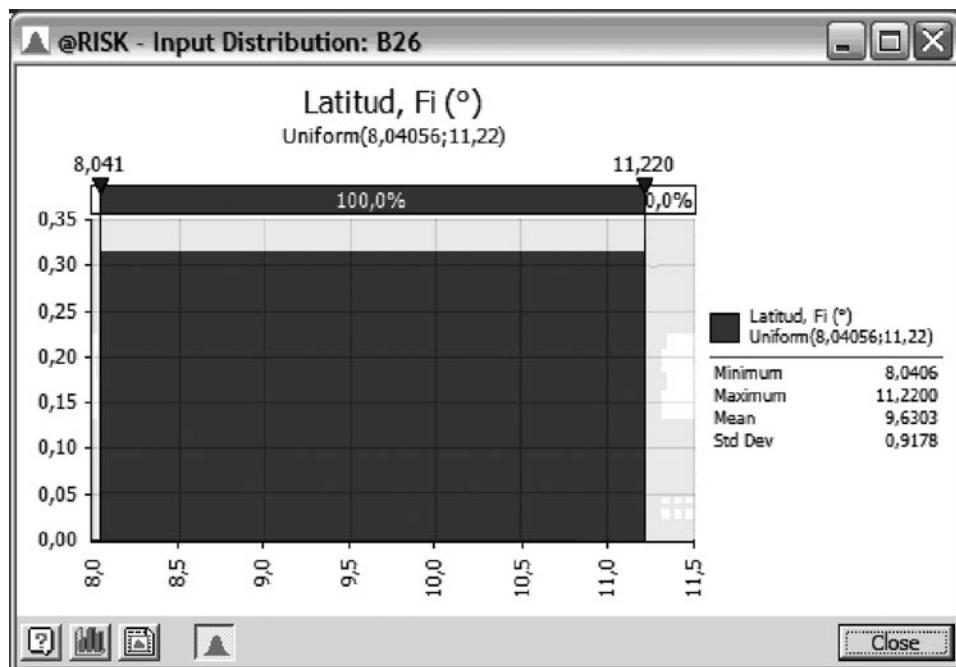
$$V(H_p) = \frac{(c+d)^2}{12} \quad (8)$$

Con esta información se puede predecir el valor de la ecuación (2) propagando sus FDP y obtener del resultado: la FDP, la expectativa y la varianza de g . (ecuación 9)

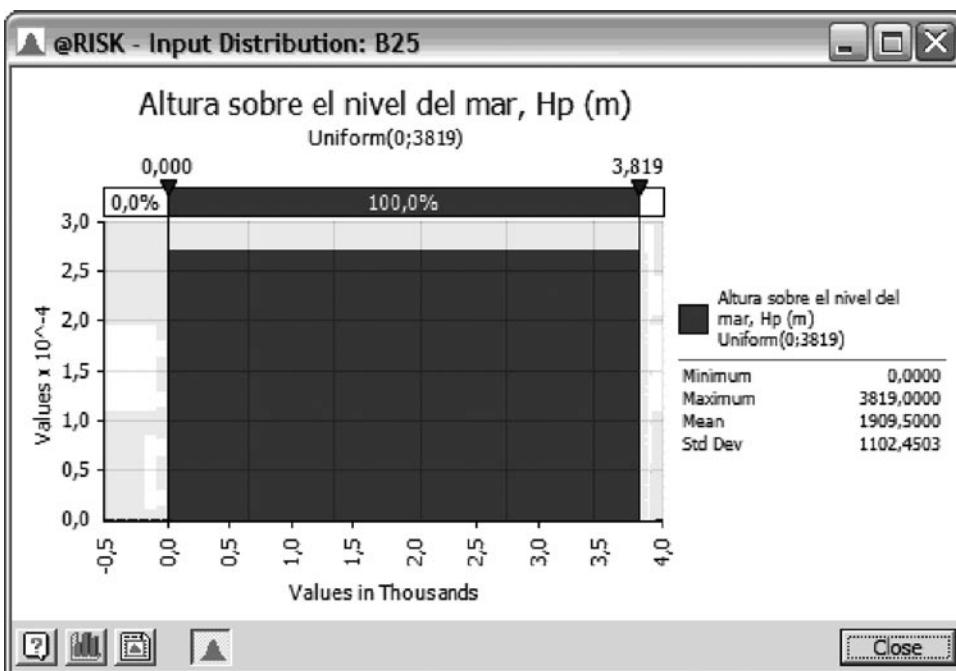
Se pueden propagar las FDP ya que cumplen los requisitos para propagación de distribuciones que estipula el Suplemento 1 a la GUM BIPM, (2006):

- f es continua con respecto a los elementos de entrada X_i de X en las cercanías de los mejores estimados x_i de X_i ;
- la FDP de salida Y es continua
- la FDP de salida Y es unimodal

$$g = \left\{ 9,780\,326\,771\,5 \cdot \left[\frac{1 + 0,001\,931\,851\,353 \cdot \sin^2(8,04^\circ \leq \phi \leq 11,22^\circ)}{\sqrt{1 - 0,006\,694\,380\,022\,90 \cdot \sin^2(8,04^\circ \leq \phi \leq 11,22^\circ)}} \right] - 3,086 \cdot 10^{-6} \cdot (0 \leq H_p \leq 3\,819) \right\} \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (9)$$

**Figura 1.** FDP de ϕ ($8,04^{\circ} \leq \phi \leq 11,22^{\circ}$).

Fuente: (xxxx)

**Figura 2.** FDP de H_p ($0 \text{ m} \leq H_p \leq 3819 \text{ m}$).

Fuente: (xxxx)

2.4 Programación

No fue necesario desarrollar ningún tipo de programación para realizar los cálculos, se usó *@Risk 5.0*, complemento de *Excel®*^l que cumple con los requisitos de usar el algoritmo de Wichmann and Hill para la generación de números pseudoaleatorios pedido por la GUM, BIPM (1995), ya que usa la función interna de Excel® para la generación de los pseudonúmeros aleatorios. *@Risk 5.0* permite propagar las FDP por medio del método de Monte Carlo.

2.5 Información proporcionada a *@Risk 5.0*.

(Nota: no se realizó ningún redondeo intermedio)

Para visualizar fácilmente la información proporcionada a *@Risk*, se resume la ecuación (9) a:

$$g = \left\{ k_1 \cdot \left[\frac{1 + k_2 \cdot \sin^2(\phi)}{\sqrt{1 - k_3 \cdot \sin^2(\phi)}} \right] - k_4 \cdot H_p \right\} \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

con $8,04^\circ \leq \phi \leq 11,22^\circ$ y $0 \leq H_p \leq 3819$

Y se alimenta con la información mostrada en el Cuadro 2.

3 RESULTADOS

3.1 FDP del predicho de g obtenido

3.2 Convergencia

Se realizaron pruebas variando el número de iteraciones, para determinar la convergencia a tres niveles, los resultados se muestran en el Cuadro 3.

Cuadro 2. Información alimentada a *@Risk 5.0*.

Datos			
Latitud mínima (°)	8,040 56	Altura mínima (m)	0
Latitud máxima (°)	11,220 00	Altura máxima (m)	3819
Predicho			
g ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)	9,780 327 ecuación 2	H_p m	$0 \text{ m} \leq H_p \leq 3819 \text{ m}$
k_1	9,780 326 771 5	ϕ °	$0,04^\circ \leq \phi \leq 11,22^\circ$
k_2	0,001 931 851 353	ϕ rad	$\phi^\circ \cdot \pi / 180$
k_3	3,086E-06	$\text{sen}(\phi)$	
k_4	0,006 694 380 022 90	$\text{sen}^2(\phi)$	

Fuente: (Feathersotne & Dentith, 1997) y (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005).

Cuadro 3. Valores predichos de g y su desviación estándar, de acuerdo con el número de iteraciones.

Número de iteraciones	Valor predicho ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)	Desviación estándar ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)
10 000 000	9,775 891	3,41E-03
5 000 000	9,775 891	3,41E-03
1 000 000	9,775 891	3,41E-03

Fuente: (El autor).

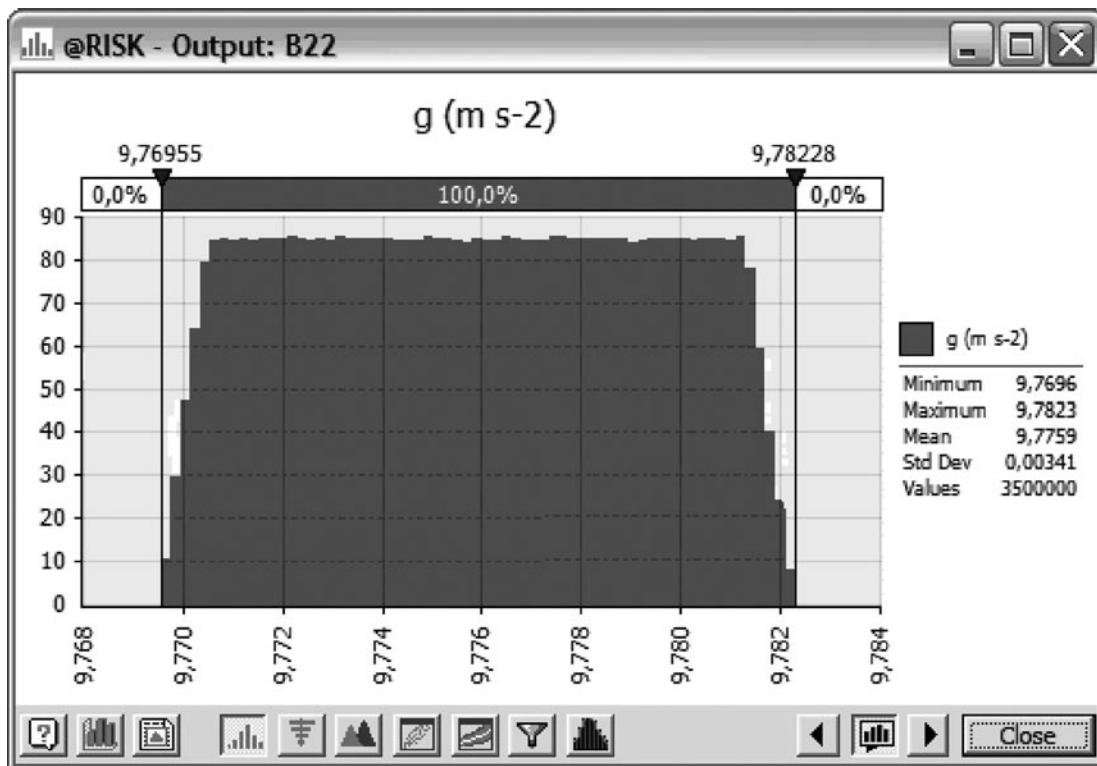


Figura 3. Predicho g ($m \cdot s^{-2}$), altura sobre nivel del mar, H_p ($0 m \leq H_p \leq 3819 m$) y latitud, ϕ ($8,04^\circ \leq \phi \leq 11,22^\circ$).

Fuente: (xxxx)

Cuadro 4. Información proporcionada por @Risk 5.0.

Name	g ($m s^{-2}$)	Altura sobre el nivel del mar, H_p (m)	Latitud, F_i ($^\circ$)
Description	Output	Risk Uniform (B17; B18; RiskName ("Altura sobre el nivel del mar, H_p (m)"))	Risk Uniform (B15; B16; Risk Name ("Latitud, F_i ($^\circ$))))
Cell	B22	B25	B26
Minimum	9,769554	2,78E-03	8,040561
Maximum	9,782277	3818,998	11,22
Mean	9,775891	1909,5	9,63028
Std Deviation	3,41E-03	1102,451	0,9178257
Variance	1,16E-05	1215398	0,8424041
Skewness	1,08E-04	-1,49E-09	-8,01E-10
Estadístico		Valor predicho	
Número de iteraciones		10 000 000	
Promedio ($m \cdot s^{-2}$)		9,775 891	
Desviación estándar ($m \cdot s^{-2}$)		0,003 413	

Fuente: (@Risk 5.0)

3.3 Redondeo

De acuerdo con la información del numeral 3.2 y la tolerancia numérica (semientrvalo que contiene todos los números que pueden ser expresados con un número significativo de dígitos decimales) asociada a un valor, descrita en el Suplemento 1 a la GUM, BIPM, (2006), se puede tener certeza que esta corresponde al menos a $0,000\,001 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

3.4 Obtención de la información

La información que brinda @Risk 5.0 se muestra en el Cuadro 4.

3.5 Expresión de los resultados: los resultados considerados adecuados para uso en todo el país, para aplicaciones con una incertidumbre límite de $0,003\,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ son:

Mejor estimado ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) **9,775 89**

Incertidumbre estándar asociada ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) **0,003 41**

Nota: Se da un número excesivo de decimales para no perder información de acuerdo con el numeral 7.2.6 de la GUM, BIPM, (2006).

CONCLUSIONES

Se comparó este valor con el valor experimental obtenido en el Laboratorio Costarricense de Metrología, LACOMET (2008): $9,779\,06 \text{ m/s}^2$ y se comprobó que no es significativamente diferente, a un nivel de confianza del 68 %, a dos colas.

El tipo de incertidumbre alcanzado permite el uso de este valor en laboratorios secundarios que requieran, para sus usos, una incertidumbre relativa mayor o igual que 0,000 35.

NOTA

Para este trabajo se usó software comercial; la identificación de este no implica una recomendación por parte del autor del INII, ni que esta sea la mejor opción del mercado.

Commercial software were used for this work, such identification does not imply a recommendation by the author or by the INII, nor does it imply that this software are necessarily the best available for the purpose.

AGRADECIMIENTO

Se reconocen los aporte técnicos y comentarios, así como la revisión integral de este documento, a los funcionarios del Instituto de Investigaciones en Ingeniería (INII): MSc. María Lorena Blanco Rojas, Ph.D. Gerardo Padilla Víquez y al Ing. Raziel Sanabria Sandí.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIPM Joint Committee for Guides in Metrology. *JCGM 101: 2008. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method.* (2008). Sèvres: BIPM.

Feathersotne, W. & Dentith M. (1997). A geodetic approach to gravity data reduction for geophysics. *Computer & Geoscience*, 23, (10).

Hofmann-Wellenhof, B. & Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*, New York: SpringerWein.

Instituto Geográfico Nacional. Recuperado el 20080616 10:30 h http://www.mopt.go.cr/ign/geografia_posicion.html.

Instituto Geográfico Nacional. Benavides, L.. Mensaje a: <carlosbpaniagua@gmail.com>, Jul 16, 2008 at 1:27 PM. Message-ID: 487E4BB9.00001D.02188@IGNACUÑA. Comunicación personal.

ISO. *ISO/IEC Guide 98:1995. Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)*. Genève: ISO.

Laboratorio Costarricense de Metroología.
CERTIFICADO DE CALIBRACIÓN,
LACOMET 08330308. 2008-06-18

Microsoft ® Office Excel 2003, SP3. Microsoft Corporation, One Microsoft Way Redmond, WA 98052-6399, USA.

VanCamp, M., Camelbeeck, T. & Richard, P. (2003).
The FG5 absolute gravimeter: metrology and geophysics. *Physicalia Magazine, Journal of the Belgian Society*, 25 (3), 161-174.

SOFTWARE UTILIZADO

@RISK 5.0 Industrial (2008). Palisade Corporation 798 Cascadilla Street Ithaca, NY 14850-3239, USA.

SOBRE EL AUTOR

Carlos B. Paniagua Vásquez

Licenciado en Química
Investigador Invitado del Instituto de Investigaciones en Ingeniería Universidad de Costa Rica
Teléfono: (506) 2202- 6159
Facsímil: (506) 2253-4617
Correo electrónico: carlosbpaniagua@gmail.com