Sophia, Colección de Filosofía de la Educación
ISSN: 1390-3861
revista-sophia@ups.edu.ec
Universidad Politécnica Salesiana
Ecuador

DOI: 10.17163/soph.n19.2015.14

Metodología activa en la construcción del conocimiento matemático

Active methodology in the construction of mathematical knowledge

Luis Alberto Puga Peña[*]
luis.puga@ute.edu.ec
Universidad Tecnológica Equinoccial / Quito, Ecuador

Lilian Mercedes Jaramillo Naranjo[**]
lilian.jaramillo@ute.edu.ec
Universidad Tecnológica Equinoccial / Quito, Ecuador

Resumen

La educación actual necesita potenciar procesos de construcción del conocimiento, de manera que se consiga seres críticos, solidarios, reflexivos y autónomos, para esto se requiere proponer metodologías activas fundamentadas en aportes de pedagogos constructivistas. Erróneamente se piensa que construir el conocimiento es tan solo transmitir ideas fraccionadas desarticulando procesos pedagógicos importantes, el artículo propone desarrollar una metodología activa en la construcción del conocimiento matemático. Para ello se ha propuesto una metodología activa que inicia con la narración de historias o cuentos motivadores para formular el problema; luego en forma interactiva los estudiantes en compañía del docente identifican y resuelven datos y fórmulas importantes, complementado con la enseñanza de valores humanos cristianos.

Esta metodología fortalece su formación integral y la transferencia del conocimiento a ser aplicado a nuevas situaciones significativas, a la vez que motiva a los estudiantes a despertar su ingenio y creatividad en la solución de problemas matemáticos.

El objetivo final es transformar una enseñanza tradicional en una enseñanza activa, participativa e interdisciplinaria.

Para desarrollar el método propuesto se ha tomado como ejemplo a las "ecuaciones algebraicas"

Palabras claves

Metodología activa, construcción, conocimiento, ecuaciones algebraicas.

Forma sugerida de citar: Puga Peña, Luis Alberto, & Jaramillo Naranjo, Lilian Mercedes (2015). Metodología activa en la construcción del conocimiento matemático. *Sophia: colección de Filosofía de la Educación, 19*(2), p. 291-314.

* Licenciado en Ciencia de la Educación, Profesor de Enseñanza Media en la Especialización de Matemática y Física, Magister en Docencia Matemática, Docente de la Universidad Tecnológica Equinoccial.

** Licenciada en Ciencias de la Educación, Dra. en Ciencias de la Educación, MSc. en Educación y Desarrollo Social, Mgs. en Tecnologías para la Gestión y Práctica Docente. Docente de la Carrera de Ciencias de la Educación del Sistema de Educación a Distancia de la Universidad Tecnológica Equinoccial.

Abstract

The present education needs to maximize knowledge construction processes, in order to get critics, loved, caring and thoughtful human beings. It is required to propose active methodologies grounded in constructivist contributions of teachers and philosophical thinkers. Mistakenly thought to build knowledge is only transmitting divided ideas, dismantling important pedagogical processes, the article proposes developing active methodology in the construction of mathematical knowledge. For this we have proposed an active methodology that begins with storytelling and motivational stories to formulate the problem; then interactively students in the company of teachers identify and solve critical data and formulas supplemented with Christian teaching of human values.

This methodology strengthens its comprehensive training and knowledge transfer to be applied to new significant situations, while motivating students to awaken their ingenuity and creativity in solving mathematical problems. The ultimate goal is to transform a traditional teaching in an active, participatory and interdisciplinary teaching.

To develop the proposed method is taken as an example to the "algebraic equations".

Introducción

Las metodologías activas permiten a los estudiantes construir conocimiento y aplicarlo integralmente en varios ámbitos de la vida (Labrador y Andreu, 2008: 16). El objetivo de esta investigación es desarrollar una propuesta metodológica alternativa que contribuya a la construccion del conocimiento matemático, propiciando la inclusión de nuevas técnicas que faciliten un aprendizaje activo en la resolución de problemas contextualizados.

Este artículo propone la aplicación de una metodología activa para fortalecer la construcción del conocimiento matemático, buscando involucrar la participación permanente de los estudiantes, para fortalecer así el aprendizaje significativo. Así mismo, aporta significativamente a cumplir los propósitos del aprendizaje basado en problemas, es decir, ayudar a los estudiantes a desarrollar conocimientos flexibles que pueden ser aplicados a muchas situaciones a diferencia del conocimiento inerte (Woolfolk, 2010: 318).

Cada vez adquiere más importancia la discusión sobre la relación existente entre el aprendizaje de la matemática y el método que se utiliza. Desde la antigüedad hasta nuestros días el problema del aprendizaje de esta asignatura no se ha superado, esto lo demuestra las estadísticas actuales:

> El Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEVAL) luego de evaluar los conocimientos de 45 000 estudiantes en Matemática, Lengua y Literatura, Ciencias Naturales y Estudios Sociales… La Matemática sigue siendo el dolor de cabeza para los menores. Por ejemplo, en el 4° de educación general básica el 25% no alcanzó niveles elementales en esta materia; en 7° año, el 30% presenta esta tendencia. Mientras que en 3° año de bachillerato, el 31% de evaluados no domina los números (Informe INEVAL, 2015).

La problemática fundamental de este artículo es la utilización de una inadecuada metodología en la construcción del conocimiento, actualmente en muchos de los casos, la actividad educativa consiste en transmitir los conocimientos al alumno, que los aprende y queda marcado por ellos. La mayor parte de los individuos son puros consumidores de conocimientos y solo algunos los fabrican o producen (Delval, 1997: 2).

Los estudiantes de nivel medio, de acuerdo a Picado (2006: 34) aprenden principalmente el tecnicismo de los conocimientos más no aprenden a aprender, lo cual impide el desarrollo de competencias para desempeñarse en el ámbito universitario y en el convivir diario. El excesivo tecnicismo en el proceso de enseñanza aprendizaje de matemáticas, especialmente a través del uso de fórmulas específicas no contextualizadas, limita la construcción del conocimiento Rey Pasto & Babini (1951: 171).

Muchas de las ocasiones, esto se debe a que los docentes desconocen o no aplican metodologías activas que permitan influir positivamente en la calidad educativa e incentivar en los estudiantes la construcción del conocimiento con reflexión, análisis y creatividad. Esto sin lugar a duda genera un problema de gradual importancia, puesto que la construcción del conocimiento en todas las áreas, especialmente en matemática, incentiva el desarrollo del pensamiento lógico y crítico para interpretar y resolver problemas para la vida (MINEDUC, 2010: 54). Así también, proporciona experiencias de aprendizaje que permiten al estudiante utilizar eficazmente lo que ha aprendido cuando afronte una nueva realidad (Mayer, 2004: 67).

La metodología activa aquí propuesta, pretende iniciar la construcción del conocimiento matemático con base a la formulación de un problema, procurando que surja de una situación cotidiana y real, creada mediante la narración de una historia o un cuento. Posterior a ello se utiliza a la lectura comprensiva como una motivación de lo planteado en la narración, de tal manera que los estudiantes encuentren los datos y determinen la incógnita, para que luego utilizando el álgebra lo modelicen.

Este artículo se ha divido en tres partes, en la primera se expone la fundamentación filosófica del conocimiento matemático y la historia de esta ciencia, de tal manera que se pueda contextualizar las metodologías activas en esta área. Posterior a ello se realiza una reflexión sobre los métodos activos en la construcción del conocimiento matemático y se concluye con un ejemplo práctico en ecuaciones algebraicas.

Las consideraciones que aquí se plantean, responden a una percepción personal de la experiencia docente e investigativa de los autores y, por tanto, no compromete otras posturas relacionadas a este tema. Esta propuesta busca contribuir al logro de uno de los objetivos fundamentales de la Reforma Curricular Ecuatoriana, la cual es, el desarrollo del pensamiento crítico desde el contexto del estudiante para reflejarlo en los procesos de enseñanza y aprendizaje (MINEDUC, 2010: 34). Asimismo, se pretende potenciar las formas de razonamiento y pensamiento abstracto al hacer énfasis en elementos pedagógicos para la resolución de problemas, desde la construcción del pensamiento matemático.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, a continuación se explicará los temas mencionados.

Fundamentación filosófica del conocimiento matemático

El matemático francés Jean Diudonné lanzó el grito de "abajo Euclides", que propuso ofrecer a los estudiantes una enseñanza basada en el carácter deductivo de la matemática y que partiera de unos axiomas básicos en contraposición a la enseñanza falsamente axiomática de la geometría en aquellos momentos. La heurística moderna, inaugurada por Polya con la publicación de su obra *How to solve it* (Polya, 1945), trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones típicamente útiles en este proceso matemático (Citado por García, 2003: 59).

Asimismo, Descartes estableció cuatro principios: en primer lugar, la aceptación como cierto solamente de aquello que aparezca en la mente como cierto y verdadero; en segundo lugar, que este proceso ofrezca ideas básicas, claras y distintas, en tercer lugar, que a partir de estas ideas y a través de la deducción lógica es posible obtener el conocimiento verdadero, y, finalmente, la verificación, que valora la verdad de las proposiciones (Ruiz, 2003: 240).

Esto significa que la propuesta de una metodología activa en la construcción del conocimiento, se fortalece cuando se indica que para cambiar de paradigmas tradicionales, es necesario que se incorpore enseñanzas participativas, desde el inicio del aprendizaje, planteando problemas contextualizados e identificando procesos. Se culmina el ciclo con la redacción de datos en la resolución de problemas, en donde se involucran nuevas áreas del conocimiento a través de la interdisciplinaridad. La misma que es considerada como un proceso dinámico que busca proyectarse, a través de la integración de varias disciplinas, para la búsqueda de soluciones a problemas reales (Tamayo y Tamayo, 2003: 20).

De igual manera debemos hacer hincapié que el conocimiento matemático está mediado por una reflexión educativa a partir de los estudios en Historia de las Matemáticas. En efecto diversos estudios muestran que:

> Las matemáticas son una construcción humana, y como tal, están ligadas al ámbito social y cultural que las produce. Con esta postura filosófica, se pretende contribuir al derrumbe de la concepción tradicional, según la cual se considera a las matemáticas como una disciplina completamente abstracta y formal, desligada del hombre y de su entorno. Se intenta mostrar por el contrario, que las matemáticas son el producto de una actividad viva de razonamiento, en la que han intervenido históricamente, de una u otra forma, diversos aspectos del contexto sociocultural (Dummentt, 1978: 34).

El conocimiento matemático utiliza al profesor para la planeación de secuencias didácticas de estudio, diseñadas especialmente para desarrollar las habilidades y necesidades cognitivas de sus estudiantes y que pueden ser modificadas de acuerdo con el progreso y dificultades que vaya observando en ellos. Para esto, otra tarea importante del profesor es escuchar los razonamientos de sus estudiantes mediante una dinámica especial de clase en la que interactúe con ellos. Esta comunicación también requiere que el profesor utilice este conocimiento especializado para responder de manera eficaz a sus estudiantes (Mochón et al., 2010: 90).

En la investigación realizada por Powell y Hanna (2006: 67) se complemetan las definiciones anteriormente mencionadas, puesto que los autores exploran cómo desarrollan los maestros su conocimiento matemático para la enseñanza en el ámbito discursivo de su práctica docente. En sus reflexiones, los autores proponen una perspectiva teórica más elaborada que se basa en la idea de que el conocimiento matemático para la enseñanza y el conocimiento pedagógico se intersectan y articulan en la práctica, de tal manera que resultan inseparables e indistinguibles (Citado en Mochón et al., 2010: 123). Además, extienden la noción del componente epistemológico del conocimiento del profesor a una idea extra, que es la de inferir el conocimiento matemático existente de los estudiantes y la evolución de éste.

Para sustentar lo anteriormente mencionado, es importante abordar la conceptualización de los métodos activos en la construcción del conocimiento.

¿Por qué enseñar matemática con nuevos métodos activos para conseguir la construcción del conocimiento matemático?

En los estudios relacionados con la historia y enseñanza de las matemáticas se analizan aspectos, conceptos o métodos históricos que pueden incidir, directa o indirectamente, en las reflexiones sobre la enseñanza o el aprendizaje de la matemática. Las formas directas de intervención son aquellas posibilidades de aprovechar un estudio histórico en el ámbito de una propuesta educativa. Están relacionadas fundamentalmente con estrategias didácticas de intervención. Las formas indirectas de incidencia, son aquellas que circulan en el ámbito escolar a veces de manera inconsciente, tales como las concepciones acerca de la matemática y su enseñanza (Anacona, 2003: 34).

Con estos argumentos teóricos prácticos, se visualiza la necesidad de incorporar nuevas metodologías que permitan al estudiante aprender a aprender, concepto de mucha relevancia en las épocas actuales. Se añade también que los aprendizajes actuales deben responder a una cultura moderna, en el sentido de que vamos incorporando en los procesos de aprendizaje técnicas motivadoras en función de las necesidades de la sociedad con el fin de que lleven a los estudiantes a integrarse con:

> Una sociedad del conocimiento que reclama que cada persona sea capaz de localizar, comprender, analizar, relacionar…los diferentes datos a los que tenemos acceso para convertirlos así en conocimiento y poder aplicarlos en las diferentes situaciones, o para comprender las diferentes realidades que nos rodean (López, 2011: 56).

Por ello, la matemática fortalecida con varias habilidades del pensamiento permitirá a los estudiantes entender que todas las habilidades desarrolladas les llevarán a comprender que las áreas integradas ayudan a solucionar problemas propuestos.

Díaz, Barriga y Hernández (2010: 87) mencionan que enseñar no solo implica proporcionar información, sino también ayudar a aprender y a desarrollarse como personas, y para ello el docente debe conocer bien a sus alumnos: cuáles son sus ideas previas, qué son capaces de aprender en un momento determinado, su estilo de aprendizaje, los motivos intrínsecos y extrínsecos que los motivan o desalientan, sus hábitos de trabajo, las actitudes y valores que manifiestan frente al estudio concreto de cada tema.

Con el fin de potencializar el conocimiento matemático, a continuación se expresará los métodos activos.

Metodologías activas

A lo largo de la historia ha existido diferentes críticas al sistema educativo de cada época, así Sócrates criticó la educación tradicional griega, Cicerón lo hizo con la educación romana, Erasmo se enfrentó a la educación medieval. En el siglo XVII se modifica la educación del siglo anterior, se hace más amplia, se da paso a nuevos métodos de enseñanza, se aplica el método inductivo en todas las áreas de estudio, está situación paulatinamente rinden sus frutos en el siglo siguiente. En el siglo XVIII Pestalozzi se convirtió en un educador por excelencia, defensor del aprendizaje a través de la práctica y observación, pilares importantes en el nacimiento de una metodología activa. Fue a finales del siglo XIX y a inicios del siglo XX cuando se inició un importante movimiento de renovación educativa y pedagógica conocido como Educación nueva:

> Una corriente que buscaba cambiar el rumbo de la educación tradicional para darle un sentido activo al introducir nuevos estilos de enseñanza. El alumno se convierte en el centro del proceso educativo, se rechaza el aprendizaje memorístico y se fomenta el espíritu crítico a través del método científico. Los nuevos métodos en el siglo XX se caracterizan por una enseñanza cada vez menos expositiva y dogmática: las cosas en lugar de las palabras; el estudio por la observación personal en lugar del conocimiento por el maestro; la construcción real acompañada de la explicación teórica, etc. (Gima, 2008: 5).

Es así que desde la época citada hasta nuestros días se da lugar a la práctica de metodologías activas, entendiéndolas como aquellos métodos, técnicas y estrategias que utiliza el docente para convertir el proceso de enseñanza en actividades que fomenten la participación activa del estudiante y lleven al aprendizaje. Al respecto se manifiesta que:

> La metodología activa para la construcción del conocimiento busca formar en el estudiante habilidades tales como autonomía, desarrollo del trabajo en pequeños equipos multidisciplinares, actitud participativa, habilidades de comunicación y cooperación, resolución de problemas, creatividad, tomando en cuenta estos aspectos, los métodos que se ajustan bien a esta realidad son el aprendizaje mediante resolución de problemas, y el aprendizaje cooperativo, como lo propone (Aiche, 2011: 108).

Aprendizaje mediante la resolución de problemas

Uno de los métodos activos que contribuyen en la construcción del conocimiento es el aprendizaje mediante la resolución de problemas, esta denominación proviene de la expresión inglesa “problem-based learning”, que es considerada como aquel proceso pedagógico que concibe el aprendizaje como una carrera de obstáculos construidos por quien enseña (situaciones problémicas) y que el estudiante debe superar a lo largo de una o varias etapas de aprendizaje. El cumplimiento de estas fases se caracterizará por la evidente adquisición de competencias; este método se ha venido imponiendo desde 1970 en la educación superior (Pochet, 1995: 95).

Otras razones para la adopción del método activo resolución de problemas han sido:

- El desarrollo exponencial del saber humano en estas últimas décadas y la imposibilidad, o la no pertinencia, de querer y poder enseñarlo todo.
- El alto grado de pérdida y el olvido de muchos de estos conocimientos por parte de los estudiantes, de un año al otro, e inclusive entre la época de los estudios en la universidad y la vida profesional.
- El carácter excesivamente teórico o poco contextualizado de los contenidos frente a las necesidades y las realidades de los asuntos en la vida diaria profesional.
- El papel pasivo del estudiante en relación con la reiterada actitud transmisionista del docente frente a un número cada vez mayor de estudiantes.
- El bajo nivel en cuanto al desarrollo de una actividad cognitiva y metodológica, en relación con las competencias necesarias para el trabajo de campo y sus múltiples tareas (Meneses, 2013: 134).

Algo importante en esta metodología es tener en claro ¿Qué es una situación problémica?, al respecto Meirieu, P. (1988), citado por Meneses Urbina, D., 2013) propone que el problema es "el obstáculo cognitivo al cual el aprendiz se enfrenta". Generalmente y para efectos académicos, el problema está definido a partir de un contenido enunciado por el profesor, en función de ciertos objetivos y las competencias que se desea desarrollar (p.123).

Para que se aplique correctamente el método de resolución de problemas, la pedagogía moderna propone, de manera consensuada, las siguientes etapas (cfr. Bugerere, 2002, citado por Meneses, D., 2013).

- **Etapa 1. Comprensión del problema.** A partir de una situación problémica, los estudiantes, en compañía de sus orientadores, deben, ante todo, proponerse aclarar los términos y los conceptos, así como abordar con precisión y alto grado de definición el enunciado de estos.
- **Etapa 2. Hipótesis, metodologías y planificación.** Una vez el problema ha sido definido, se proponen las hipótesis de solución que son respuestas preliminares o posibles del problema. Igualmente, se proponen los procedimientos y las acciones para la resolución del problema, y se elabora el plan o el programa para el logro de este propósito.
- **Etapa 3. Ejecución y procedimientos.** Es la fase donde se integran los conocimientos y se puede entrever, con anticipación, la solución del problema central. En esta etapa es importante llegar a diagnósticos y pronósticos realistas y, ojalá, prospectivos.
- **Etapa 4. Evaluación de resultados.** Debe realizarse en relación directa con las preguntas problémicas y las hipótesis planteadas (p. 128 -129).

Además, en toda unidad pedagógica que se ponga en marcha para el aprendizaje por resolución de problemas lo más probable es que el tiempo de trabajo individual se alterne con el de trabajo en grupo. Una descripción de esta situación la suministra Marcel Lebrun, en términos genéricos:

> Después de que el docente haya presentado el problema, así como las actividades y los medios para desarrollarlas (actividad 1), los estudiantes se reúnen en grupos con el fin de descomponer el asunto en todas sus partes, acudiendo al desencadenamiento mental (brainstorming) o lluvia de ideas alrededor del problema, emitiendo toda clase de hipótesis y preguntas, pero compartiendo este trabajo entre todos. Enseguida, conviene abordar el asunto de manera individual (etapa 2), de tal manera que se puedan seguir las pistas que dejó la etapa 1. Luego, se reúnen todos otra vez (etapa 3) con el fin de compartir los resultados de sus trabajos. Finalmente, el trabajo individual reforzará lo hecho en grupo y viceversa (etapa 4) (Lebrun, 2002: 56).

Según el mencionado autor cuando el docente aplica la metodología en base a la resolución de problemas el estudiante aprende superando el obstáculo, dentro de un contexto realista del problema, lo cual no solo lo motiva e impulsa, sino que también incrementa sus potencialidades de aprendizaje. De igual manera como es conocido resolver un problema implica miradas múltiples y aproximaciones de tipo interdisciplinar y transdisciplinar para establecer lazos y vínculos entre los saberes que concurren en su resolución.

Asimismo, un elemento importante a tener en cuenta es no ver la resolución de problemas como un resultado. Los métodos activos tienen que dirigirse hacia el aprovechamiento del potencial que brinda este proceso, para que en su curso se pueda incidir en determinados valores sin marginar el desarrollo del pensamiento lógico del resolutor, es decir el educando (Sigarreta, 2003: 17).

De los anteriores planteamientos se deduce que el aprendizaje cooperativo constituye un tipo de método activo, que se explica a continuación.

El aprendizaje cooperativo

Es uno de los métodos activos más importantes en la construcción de conocimiento y en la consecución de un aprendizaje significativo, al respecto el Proyecto Salesiano de Innovación Educativa y Curricular manifiesta:

> El aprendizaje cooperativo es aquel en el que el sujeto construye su propio conocimiento mediante un complejo proceso interactivo de aprendizaje (los protagonistas actúan simultáneamente y recíprocamente

> en un contexto determinado, en torno a una tarea o a un contorno de aprendizaje (PROSIEC, 2007: 230).

Conforme a lo citado se concluye que el ser humano no aprende en solitario, sino que, por el contrario, la actividad constructivista del sujeto está medida por la influencia de los otros, y por ello el aprendizaje es en realidad una actividad de reconstrucción de los saberes de una cultura.

Para Etienne Bourgeois, el aprendizaje cooperativo es una actividad en la cual:

> Se trata de hacer trabajar a los estudiantes en grupos suficientemente compactos, para que cada uno tenga la posibilidad de participar en una tarea colectiva que ha sido claramente asignada. Además, los estudiantes son motivados a realizar la tarea sin la supervisión directa e inmediata del profesor (Bourgeois, 1997: 225).

La concepción del autor se contrapone a la de la pedagogía tradicional que ignora al grupo y se organiza para neutralizarlo tanto como se pueda. Incluso, los salones de clase y la arquitectura de los establecimientos educativos están hechos para gravitar alrededor del maestro, lo que impide las interacciones del grupo (Meneses, 2013: 134).

Conforme a lo citado se puede concluir que el aprendizaje cooperativo es una alternativa necesaria para resolver las exigencias de la sociedad actual, entre las cosas más importantes además de apuntalar en la construcción del conocimiento, el método del aprendizaje cooperativo:

> Cualifica la participación de los alumnos en su proceso de aprendizaje escolar, dado que además de incrementar su actividad-comunicación, la diversifica, haciendo "uso" tanto del cerebro izquierdo como del derecho. Plantea una dirección no frontal, mediatizada, del proceso de enseñanza escolar, que favorece el desarrollo de las potencialidades del sujeto que aprende, en particular su autonomía personal y social. Establece un tipo de relación de cooperación entre los alumnos, que estimula su desarrollo cognitivo y socio-afectivo, lo que resulta imprescindible para el aprendizaje de actitudes y valores socialmente valiosas (Ferreiro, 2007: 7).

Una vez que en líneas anteriores se nota la importancia de la aplicación del método del aprendizaje cooperativo en la formación de la persona y en la construcción de los conocimientos, con la finalidad de que se aplique adecuadamente la metodología del aprendizaje cooperativo se toma en cuenta las siguientes componentes:

Componentes del aprendizaje cooperativo: entre las más importantes el Proyecto Salesiano de Innovación Educativa y Curricular PROSIEC, determina las siguientes:

> **Interdependencia positiva.** Esta existe cuando se percibe un vínculo con los compañeros del grupo de tal forma que no se puede lograr el mejoramiento sin todos los miembros del grupo (y viceversa), y que se debe coordinar esfuerzos para que todos los compañeros puedan completar sus tareas. De esta manera todos los estudiantes comparten sus recursos, se proporcionan apoyo mutuo y celebran juntos sus triunfos.
> **La interacción cara a cara,** es muy importante porque existe un conjunto de actividades cognitivas y dinámicas interpersonales que solo ocurren cuando los estudiantes interactúan entre sí en relación a los materiales y actividades.
> **Valoración personal-responsabilidad personal.** El propósito de los grupos de aprendizaje es fortalecer académica y afectivamente a sus integrantes: Se requiere de la existencia de una evaluación del avance personal, la cual va hacia el individuo y su grupo. De esta manera, el grupo puede conocer quien necesita más apoyo para completar las actividades y evitar que unos descansen con el trabajo de los demás.
> **Habilidades personales y manejo de pequeños grupos.** Los estudiantes deben desarrollar las habilidades sociales que se requieren para lograr una colaboración de alto nivel y estar motivados. En particular se debe aprender a: Conocerse y confiar unos en otros, comunicarse de manera precisa y sin ambigüedades, aceptarse y apoyarse unos a otros, resolver conflictos constructivamente.
> **Procesamiento en grupo.** Los miembros del grupo necesitan reflexionar y discutir entre sí cual es el nivel del logro de sus metas y mantenimiento de relaciones de trabajo efectivo (2007: 229-230).

De acuerdo con lo que señala la cita anterior el método del aprendizaje cooperativo no solo ayuda a crecer en el ámbito social, cultivando actitudes de liderazgo y de solidaridad, sino también a que el estudiante construya su propio conocimiento. Una cuestión importante que no se debe descuidar es el papel que debe cumplir el docente, al respecto el Grupo de Investigación en Metodologías Activas de la Universidad Politécnica de Valencia en el documento Metodologías Activas:

> La función del profesor es encontrar un equilibrio entre su exposición en clase y las actividades en equipo. Planifica la interacción e interviene orientando y ayudando a resolver conflictos. Evalúa la capacidad de los alumnos, sus progresos y la experiencia en sí misma; lo que le servirá para mejorar las propuestas futuras.
> El profesor debe observar, escuchar e intervenir en cada uno de los equipos cuando sea apropiado. Puede seguir los siguientes pasos:

- Plantea una ruta por la clase para observar a cada equipo.
- Utilizar un registro formal de observación de comportamientos y acciones específicas de los estudiantes.

A la hora de diseñar una tarea para el trabajo de los equipos, los pasos a seguir pueden ser los siguientes:

- Analizar lo que los estudiantes ya saben, lo que pueden hacer y sus necesidades.
- Hacer preguntas abiertas, cortas y simples o con múltiples respuestas
- Todas las actividades deben estar encaminadas a imitar los tipos de colaboración existente en el ejercicio profesional (Gima, 2008: 49).

Además, es indispensable conformar adecuadamente los grupos de trabajo tomando en cuenta, que estos deber ser heterogéneos, estar conformados por un número impar de miembros (3 o 5). Todos los miembros tiene trabajos y responsabilidades específicas (organizador, motivador, secretario, expositor, coordinador). Los grupos deben conservar los mismos integrantes por lo menos durante un mes (PROSIEC, 2007: 231).

Una vez analizadas las metodologías activas que fortalecen la construcción del conocimiento matemático, a continuación se explicarán sus principales definiciones y alcances, para así poder reflejar estos conceptos en un ejemplo práctico.

Construcción del conocimiento

El conocimiento constituye un aspecto esencial para la vida del hombre por tanto es natural que estos dediquen una buena parte de su actividad a adquirir nuevos conocimientos, para ello en todas las sociedades los adultos ponen un gran énfasis en conseguir que los niños adquieran los conocimientos que se consideran indispensables para la vida social y para la supervivencia, transmitiéndoles las adquisiciones que esa sociedad ha ido acumulando a lo largo del tiempo y que constituyen lo que solemos denominar la cultura.

Lamentablemente la mayor parte de la gente no produce conocimientos; sólo aprovecha y usa los conocimientos disponibles que otros tienen.

Está claro que el conocimiento es un producto de la actividad social que se produce, se mantiene y se difunde en los intercambios con los otros (Delval, 1997: 1).

Esto nos indica que los conocimientos son producidos o construidos por las personas, que estos, están en la mente de cada individuo y que se generan en los intercambios con los otros, se comunican a los otros y se perfeccionan en el comercio con los demás, en el proceso de compartirlos y contrastarlos con lo que piensan o saben hacer los demás. Los individuos pueden producir conocimientos que antes no existían, dando lugar al progreso cultural, pero la mayoría de los conocimientos los recibimos de los otros o los adquirimos a través de nuestra actividad en los intercambios sociales (Delval, 1997: 1).

En base a la teoría de la construcción del conocimiento expuesta, ahora es pertinente explicar la construcción del conocimiento matemático:

Construcción del conocimiento matemático

Las matemáticas se han construido como respuesta a preguntas que han sido traducidas en otros tantos problemas. Uno de los objetivos esenciales de la matemática es precisamente que lo que se enseña esté cargado de significado, y que éste tenga sentido para el estudiante, un problema esencial es "enseñar" la matemática sin un proceso constructivo, al respecto (Cobo, 2014: 72) manifiesta "mostrando a los estudiantes las matemáticas acabadas, hechas, cerradas y sin, o con poca, posibilidad de construirlas no es la mejor manera de avanzar ni en la motivación, ni en la actitud, ni en el progreso de los conocimientos matemáticos de los estudiantes".

Lo ideal para adquirir un buen aprendizaje de esta asignatura es construirla con los estudiantes, en este proceso según lo que plantea la Guía de Aprendizaje Construcción del Conocimiento Matemático en la Escuela: (Universidad Pedagógica Nacional de México, 2002: 22).

> Los estudiantes parten de experiencias concretas. Paulatinamente, y a medida que hacen abstracciones, pueden prescindir de los objetos físicos. El diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista ayudan al aprendizaje y a la construcción del conocimiento; es así, tal proceso es reforzado por la interacción con los compañeros y con el maestro. El éxito en el aprendizaje de la matemática en buena medida depende del diseño de actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas en la interacción con los otros (Universidad Pedagógica Nacional de México, 2002: 22).

Según Edilma Palomares de Feuillet (2007), estas son algunas condiciones que se debe tomar en cuenta para la construcción del conocimiento matemático:

1. El lenguaje
2. Los axiomas
3. La aplicación
4. La traducción, y,
5. La noción de orden

1. **El lenguaje:** Es fundamental para el aprendizaje de la matemática, debe combinarse y diferenciarse del lenguaje corriente con su sentido habitual, las del lenguaje utilizadas con un significado diferente y las pertenecientes propiamente a la matemática, En muchas ocasiones la dificultad matemática de un problema está econdida en la forma de presentación de su enunciado. Los docentes debemos estar muy atentos en realizar las precisiones y las diferenciaciones de las expresiones del lenguaje matemático, requisito indispensable para que el estudiante tenga las bases para el desarrollo del razonamiento matemático.

2. **Los axiomas:** La construción del conocimiento matemático implica siempre la utilización de leyes y de ciertas formas lógicas, sin éstas es imposible que se puedan encadenar los elementos del lenguaje. Además, "los estudiantes presentan dificultades en la completación de razonamientos, en la escogencia o selección de una alternativa entre varias, debido a que no existe claridad en los axiomas básicos" (Palomares, 2007: 121).

3. **La aplicación:** "El saber aplicar es una de las condiciones más difíciles a la cual tienen que enfrentarse los estudiantes". Con frecuencia se cree que una vez que se llega a la fórmula general, los estudiantes están en capacidad de resolver los casos particulares. Sin embargo, los estudiantes conociendo las reglas generales muchas veces no son capaces de aplicarlas correctamente. Una forma adecuada de asegurar la aplicación es iniciar por la deducción de la fórmula, utilizarla reemplazando valores simples para asegurar una adquisición lo más perfecta posible y finalmente con una complicación progresiva de los valores numéricos o literales para llegar a los casos más generales (Palomares, 2007: 123).

4. **La traducción:** "El problema de la traducción es importante, tanto en lo que se refiere a la matemática como al conjunto de la evolución intelectual". Traducir correctamente es a menudo plantear bien el problema y esto es posible sólo a partir del momento en que domina el problema, es decir, cuando se es capaz de resolverlo. En la construcción del conocimiento matemático se presenta frecuentemente la necesidad de traducir especialmente del lenguaje común al algebraico así como al simbólico, Por ejemplo el triángulo ABC es equilátero, se puede traducir por el triángulo que tiene sus tres lados iguales o el triángulo con AB=BC=CD. El docente de matemática deberá tomar conciencia de esta condición esencial del razonamiento que equivale a la abstracción progresiva que a su vez, se apoya en el grado inmediatamente inferior y ésta en lo concreto (Palomares, 2007: 123).

5. **La noción de orden:** Consiste escencialmente en el conocimiento perfecto de ciertas secuencias matemáticas que partiendo de una proposición A llega a una proposición B. El orden es una condición necesaria pero no suficiente en la construcción del conocimiento matemático.

Las condiciones presentadas para que se pueda construir el conocimiento matemático, deben permitir reflexionar al docente en el trabajo con nuestros estudiantes, para que ellos, a través de un proceso de construcción de los conceptos matemáticos "lleguen a explorar ese mundo de la matemática, estimulando la imaginación creadora, teniendo en cuenta el gusto y la alegría que manifiestan durante el desarrollo del trabajo, tomando una actitud abierta y receptiva ante las respuestas que den" (Palomares, 2007: 125).

Tomando como soporte científico lo manifestado anteriormente, presentamos la propuesta de metodología activa en la construcción del conocimiento.

Metodología propuesta

Iniciamos citando lo expresado por Giménez "Es importante saber si los estudiantes construyen o no, pero también lo es saber: cómo construyen, qué papel otorgamos a cada uno de los protagonistas, y cómo reflexionamos sobre las construcciones (2000: 6).

La metodología activa que proponemos aplicar en la construcción del conocimiento matemático, integra lineamientos de los principales métodos activos, (el de resolución de problemas y el aprendizaje cooperativo) o incluye a ambos, lo que interesa realmente es que cumpla con la función importante de ser un método participativo, motivante, dinámico en la construcción del conocimiento.

Fases en la aplicación de la metodología propuesta

Fase 1. Elaboración del problema o (situación problémica). El docente elabora la situación problémica, en función de las competencias que se buscan desarrollar a través de los procesos de aprendizaje, procurando que surja de una situación cotidiana y real, creada mediante la narración de una historia o un cuento,

Ejemplo: Para el desarrollo del ejemplo tomamos en cuenta el tema de las ecuaciones algebraicas, en especial la ecuación algebraica de sexto grado, se desarrolla el problema con el nombre de la horca:

La horca

El rey de un país decidió construir una horca para ejecutar en ella a ladrones y malhechores.

—¿De qué alto debo hacer la horca? —preguntó al astrólogo.

Este temía el castigo porque la ira del rey se encendía con facilidad, así que miró la bola mágica y dijo:

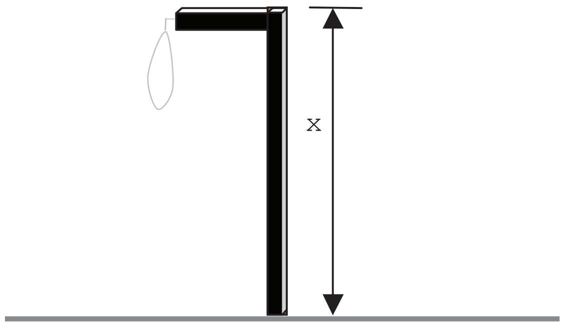
—Si su majestad desea tener éxito en la corrección de los delincuentes, la horca debe tener una altura especial. Si a la sexta potencia de su altura, medida en metros, se sumara su cuarta potencia con sus cuatro cuadrados, y aun cuatro metros más, se debería obtener cero.

El rey se puso a pensar: ¿qué cantidad de metros es esa? ¡Ayúdale a averiguarlo, por favor!

Fase 2. Modelización, procedimientos y acciones: Los estudiantes, en compañía de su docente, mediante una lectura comprensiva de lo planteado en la narración, deberán encontrar los datos y la incógnita. Luego, utilizando el álgebra modelizan la situación, de igual manera se plantean los procedimientos y acciones para la resolución del problema, y se elabora el plan para lograr este propósito.

Ejemplo: Tomando como base, el problema de la horca, conjuntamente con los estudiantes procedemos a modelizar, para ello nos ayudamos de un esquema gráfico;

Llama x a la altura de la horca:



Formaliza las condiciones establecidas por el astrólogo:

$$x^6 + x^4 + 4x^2 + 4 = 0.$$

Fase 3. Ejecución (Construcción del conocimiento). A continuación y siguiendo una metodología dinámica y activa, apoyándose en el modelo y la teoría constructivista como algo necesario, se integran los conocimientos y se da solución al problema central. En esta etapa es necesario e importante lograr diagnósticos y pronósticos objetivos (realistas) y, ojalá, prospectivos.

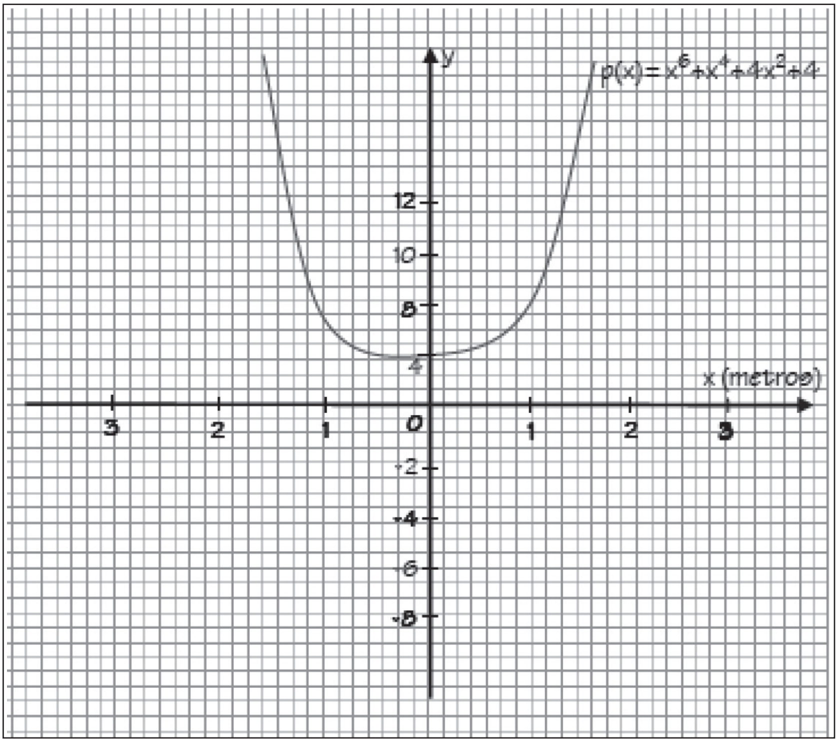
Ejemplo: Una vez que se ha modelizado el problema, resolvemos detallando paso a paso e indicando los procesos algebraicos correspondiente:

¡Obtuviste una ecuación algebraica de sexto grado! ¿Cómo encontrar el valor de la incógnita, escondida en ella? ¡Inténtalo por el método de intervalos encajados!

Llama $p(x)$ a tu polinomio. La ecuación adquiere esta forma:

$$p(x)=x^6+x^4+4x^2+4=0.$$

¡Realiza un gráfico aproximado del polinomio p(x)! Si utilizas como ayuda un graficador de ecuaciones, obtendrás lo siguiente:



¡La curva no corta el eje x! ¡Significa que la ecuación de la horca no tiene raíces reales! Es decir, la horca, requerida por el rey, no se la puede construir. ¡Es inútil tratar de aplicar el método de Weierstrass en casos como este!, ¿no crees?

Si deseas verificar el teorema fundamental del álgebra, encuentra las seis raíces complejas de la ecuación de la horca. ¿Cuál crees que sea el método más conveniente? ¡Intenta por descomposición en factores! Para ello agrupa los dos primeros y los dos últimos términos:

$$(x^6+x^4)+(4x^2+4)=0.$$

Extrae factor común en forma de monomio de los dos grupos. Te resultará:

$$x^4(x^2+1)+4(x^2+1)=0.$$

Obtuviste una expresión de la cual puedes extraer factor común polinómico:

$$(x^2+1)(x^4+4)=0.$$

Para encontrar las raíces de la ecuación, aplica el teorema:

Teorema

$$\text{Si } \; a\cdot b=0 \;\Rightarrow\; a=0 \;\vee\; b=0.$$

Obtendrás:

$$x^2+1=0 \quad o \quad x^4+4=0. \qquad (*)$$

Has logrado tu objetivo: el polinomio de la horca quedó factorado. Ahora, en lugar de resolver una ecuación de sexto grado, únicamente tienes que resolver una ecuación cuadrática y una cuártica, lo cual es mucho más sencillo. ¡Manos a la obra!

Empieza por la primera ecuación:

$$x^2+1=0.$$

Pasa el número 1 al lado derecho. Te resultará:

$$x^2=-1.$$

Si sacas la raíz cuadrada de los dos lados de la ecuación, obtendrás:

$$x=\pm\sqrt{-1}.$$

Es decir,

$$x_1=i \text{ metros},$$
$$x_2=-i \text{ metros}.$$

Encontraste dos de las seis raíces de la ecuación de la horca.

Ahora analiza la segunda ecuación de la fórmula (*):

$$x^4+4=0.$$

¡Encuentra sus raíces factorando este polinomio de cuarto grado! Para ello suma y resta una misma cantidad. Esta debe ser el doble producto de las raíces cuadradas de los dos términos, es decir: $4x^2$.

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$$

Agrupa los tres primeros términos:

$$(x^4+4x^2+4)-4x^2=0.$$

Explicita el trinomio cuadrado perfecto:

$$(x^2+2)^2-4x^2=0.$$

Obtuviste una diferencia de cuadrados perfectos. ¡Factórala! Se producirá:

$$[(x^2+2)+2x][(x^2+2)-2x]=0.$$

Eliminando paréntesis y ordenando en forma descendente los términos de cada factor, te resultará:

$$[x^2+2x+2][x^2-2x+2]=0.$$

¡En hora buena! Has logrado el objetivo de factorar la expresión. Ahora, en lugar de resolver una ecuación cuártica, debes resolver dos ecuaciones cuadráticas. ¡Adelante!

Cada ecuación cuadrática posee dos raíces. ¡Encuéntralas! Para ello aplica el teorema:

Teorema

$$\text{Si} \quad a \cdot b=0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \quad \vee \quad b=0.$$

En tu caso esto significa que

$$x^2+2x+2=0 \quad o \quad x^2-2x+2=0. \qquad (**)$$

Descompón en factores la primera ecuación cuadrática. ¡Aplica el método de completación de cuadrados! Obtendrás:

$$x^2+2x+1-1+2=0.$$

Reagrupando y sumando, se producirá:

$$(x^2+2x+1)+1=0.$$

Explicita el cuadrado:

$$(x+1)^2+1=0.$$

Pasa el término independiente al otro lado, cambiando de signo:

$$(x+1)^2=-1.$$

Extrae la raíz cuadrada. Este será el resultado:

$$x+1=\sqrt{-1}=\begin{cases} i, \\ -i. \end{cases}$$

Pasando el número 1 al lado derecho, encontrarás nuevas dos raíces complejas de la ecuación de la horca:

$$x_3=(-1+i)\,metros,$$
$$x_4=(-1-i)\,metros.$$

Factora la segunda ecuación cuadrática de la fórmula (**). Utiliza el método anterior:

$$x^2-2x+1-1+2=0.$$

Reagrupando y sumando, se producirá:

$$(x^2-2x+1)+1=0.$$

Explicita el cuadrado:

$$(x-1)^2+1=0.$$

Pasa el término independiente al otro lado, cambiando de signo:

$$(x-1)^2=-1.$$

Extrae la raíz cuadrada. Este será el resultado:

$$x-1=\sqrt{-1}=\begin{cases} i, \\ -i. \end{cases}$$

Pasando el número (-1) al lado derecho, encontrarás las dos últimas raíces complejas de la ecuación de la horca:

$$x_5=(1+i)\,metros,$$
$$x_6=(1-i)\,metros.$$

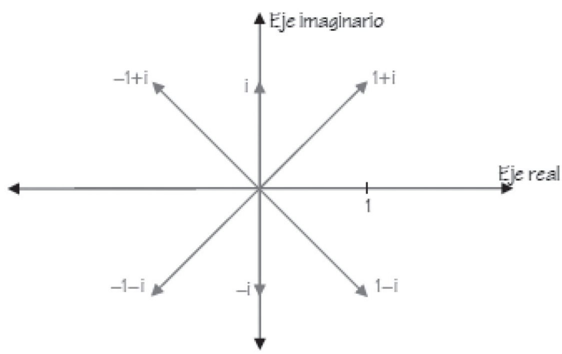
Sintetiza todo lo encontrado:
las raíces de la ecuación de la horca son seis:

$$x_1=i\ metros,$$
$$x_2=-i\ metros,$$
$$x_3=(-1+i)\,metros,$$
$$x_4=(-1-i)\,metros,$$
$$x_5=(1+i)\,metros,$$
$$x_6=(1-i)\,metros.$$

¡Ninguna ofrece una solución al problema planteado por el rey! Sin embargo, con las seis raíces encontradas has verificado que el teorema fundamental del álgebra se cumple a la perfección en el caso de la ecuación de la horca:

$$x^6+x^4+4x^2+4=(x-i)(x+i)(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i).$$

Representa geométricamente sus seis raíces complejas en el plano complejo:



Como ves, el teorema fundamental del álgebra te da la información completa sobre las posibilidades reales de resolver el problema; y también te indica cuando no hay ninguna.

Fase 4. Evaluación de resultados y práctica de valores. Debe realizarse en relación con la pregunta principal del problema así como en base a la modelización realizada. El docente tiene la posibilidad de evaluar en el proceso de la construcción del conocimiento en las diferentes fases. Situación importante en esta fase es la terminación de la historia que se inició en la fase uno, y la enseñanza de un valor humano-cristiano.

Ejemplo: Tomando en cuenta el problema de la horca.

—¡No existe ningún número que cumpla la condición de la bola mágica! —exclamó el rey.— ¡No puedo construir la horca!

Reflexionó sobre el asunto y decidió, en vez de castigar a los malechores, ayudar a que todos los habitantes de su reino puedan vivir una vida creativa y alegre.

Conclusiones

En este artículo se ha analizado los lineamientos teóricos relacionados a la metodología activa y sus implicaciones en la construcción del conocimiento matemático. Se han sugerido dos metodologías activas con importantes resultados en la construcción del conocimiento en general, estas son: el aprendizaje para la resolución de problemas y el aprendizaje cooperativo.

Estos métodos estimulan la inteligencia natural de los estudiantes, lo cual les permitirá aplicar el conocimiento en otras situaciones similares de su propia vida, además que abre un espacio para la creatividad innata del estudiante. Permite también cultivar la destreza de escribir a través de las narrativas literarias, aspecto que convierte un tema matemático formal en una experiencia dinámica y fascinante. De la misma forma este artículo propone que los problemas en la matemática deben ser planteados con sencillez, y a la vez con profundidad de manera que nos permitan entender que las ideas matemáticas no han surgido fuera de la vida sino dentro de ella.

El método activo propuesto, será de gran ayuda para los docentes, ya que con su aplicación es posible conseguir una verdadera construcción del conocimiento, además de desarrollar la inteligencia, comprensión y creatividad de los estudiantes.

Aplicando la metodología activa los estudiantes no solo construirán el conocimiento matemático nuevo, sino que serán capaces de vincular ese conocimiento a un lenguaje matemático que le dé significado.

Bibliografía

AICHE, Messaoud
2011 *Enseigner le projet d'architecture.* Londres: Universitaires Europeénnes.
ANACONA, Maribel
2003 La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista Ema 8*(1).
BOURGEOIS, Etienne
1997 *Interacciones sociales y aprendizaje.* Niza: Andereg 3.
DELVAL, Juan
1997 *¿Cómo se construye el conocimiento?* España: Universidad Autónoma de Madrid.
DÍAZ BARRIGA ,F., & HERNÁNDEZ, G.
2010 *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una Interpretación constructivista.* México: McGraw-Hill.
DUMMENTT, Michael
1978 *La Filosofía del a Matemática de Wittgenstein.* Universidad de Murcia.
FERREIRO, Ramón
2007 Aprendizaje cooperativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 9*(2). http://redie.uabc.mx/vol9no2/contenido-ferreiro.html, consultado el 8 de noviembre de 2015.
GARCÍA, José
2003 *Didáctica de las Ciencias. Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad.* Colombia: Magisterio.
GIMA (Grupo de Innovación en Metodologías Activas)
2008 *Metodologías activas.* España : Editorial Universidad Politécnica de Valencia (UPV) http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm)
GIMÉNEZ, Joaquín
2002 ¿Construir o no construir? Esa no es la cuestión. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 25*, 5-7.
LABRADOR, J., & ANDREU, María de los Ángeles
2008 *Libro Metodologías Activas.* España: Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
LEBRUN, Marcel
2002 *Teorías y métodos pedagógicos para enseñar y aprender: el papel de las TIC en la educación.* Bruselas: De Boeck.
LÓPEZ-JURADO, Marta
2011 *Educación para el siglo XXI.* España: RGM, S.A.- Urduliz
MAYER, Richard
2004 *Psicología de la Educación. Enseñar para un aprendizaje significativo.* España: Pearson.
MENESES, David
2013 *Los métodos pedagógicos activos en la enseñanza-aprendizaje de la arquitectura.* Colombia.
MERIEUX, Philippe
1988 *Aprender sí, ¿pero cómo?.* París: ESF.
MINISTERIO DE EDUCACIÓN (MINEDUC)
2010 Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica. Ecuador.
PALOMARES DE FEUILLET, Edilma
2007 *Construcción de conocimientos matemáticos.* Colombia, Pasto: Universidad de Nariño, Programa de Matemática y Estadística.

PICADO, Flor María
2006 *Didáctica General. Una prospectiva integradora.* Costa Rica: Editorial Universitaria.
POCHET, Bernard
1995 Aprendizaje por problemas: ¿una evolución o un progreso esperado? *Revista Francesa de Pedagogía, 111*, 95-107.
PROSIEC
2007 Proyecto Salesiano de Innovación Educativa y Curricular. Quito: Editorial Don Bosco.
REY PASTO, José & BABINI, José
1951 *Historia de la matemática.* Argentina: Espasa Calpe. Primera edición.
RUÍZ, Ángel
2003 Historia y filosofía de las matemáticas. San José, Costa Rica: Ed. UNED.
SIGARRETA, José María
2003 La resolución de problemas y su incidencia en la personalidad. *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática.* Argentina.
TAMAYO Y TAMAYO, Mario
2003 *La interdisciplinariedad.* Colombia: Editorial ICESI.
WOOLFOLK, Anita
2010 *Psicología Educativa.* España: Pearson, Décimo Primera Edición..

Fecha de entrega del documento: 10 de marzo de 2015
Fecha de aprobación del documento: 18 de septiembre de 2015