Actualidades Investigativas en Educación
Revista Electrónica publicada por el
Instituto de Investigación en Educación
Universidad de Costa Rica
ISSN 1409-4703
http://revista.inie.ucr.ac.cr
COSTA RICA

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA IDENTIFICAR CUÁNDO LA INTEGRAL DEFINIDA ES APLICABLE PARA RESOLVER UN PROBLEMA

DIDACTIC PROPOSAL TO IDENTIFY WHEN THE DEFINITE INTEGRAL IS APPLICABLE TO SOLVE A PROBLEM

Volumen 7, Número 2
Mayo-Agosto 2007
pp. 1-20

Este número se publicó el 30 de agosto 2007

Reinaldo Hernández Camacho

La revista está indexada en los directorios:

LATINDEX, **REDALYC**, **IRESIE**, **CLASE**, **DIALNET**, **DOAJ**, **E-REVIST@S**,

La revista está incluida en los sitios:

REDIE, **RINACE**, **OEI**, **MAESTROTECA**, **HUASCARAN**

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA IDENTIFICAR CUÁNDO LA INTEGRAL DEFINIDA ES APLICABLE PARA RESOLVER UN PROBLEMA

DIDACTIC PROPOSAL TO IDENTIFY WHEN THE DEFINITE INTEGRAL IS APPLICABLE TO SOLVE A PROBLEM

Reinaldo Hernández Camacho[1]

Resumen: *Mediante un trabajo investigativo realizado durante varios años, se ha podido comprobar, que los estudiantes universitarios y los egresados de ese nivel de enseñanza, no adquieren las habilidades necesarias para identificar problemas nuevos que pueden ser resueltos mediante una integral definida, cuando son utilizados los métodos tradicionales de enseñar el cálculo integral.*

Como resultado de esta investigación, se ha logrado precisar un conjunto de propiedades que representan condiciones necesarias y suficientes, para que la solución de un problema pueda ser obtenida directamente mediante el cálculo de una integral definida. Eso ha sido enunciado y demostrado en un teorema.

Palabras Clave: *CONCEPTOS/ INTEGRAL/ PROBLEMAS/, PROPIEDADES/ CUBA/*

Abstract: *Through a research carried out for some years, it has been possible to state that university students and graduates do not acquire the necessary abilities to identify new problems that can be solved by means of a definite integral, when the traditional methods of the teaching of the integral calculus are used.*

As a result of this research, a group of properties which represent the necessary and sufficient conditions so that the solution of a problem can be obtained directly through the calculus of a definite integral, were established. This process has been enunciated and demonstrated in a theorem.

Key word: *CONCEPTS/ INTEGRAL/ PROBLEM/ PROPERTIES/ CUBA/*

Introducción

La resolución de problemas matemáticos es un tema que ha sido abordado por muchos investigadores, desde diferentes puntos de vista. Tal vez, el dominio de la heurística y una buena estructuración de los conocimientos matemáticos, son los dos aspectos que se señalan como los de mayor incidencia a la hora de valorar las potencialidades de una persona para enfrentar con éxito la resolución de un problema matemático. En este trabajo se asumirá la siguiente definición de problema.

[1] *Doctor en Ciencias Pedagógicas por la Comisión de Grados Científicos del Ministerio de Educación Superior, Cuba. Profesor de Matemática en Enseñanza Media y Profesor de Matemática de Nivel Superior, titulos obtenidos en el Instituto Superior Pedagógico Juan Marinillo, Matanzas, Cuba. Actualmente se desempeña como Profesor de Análisis Matemático y de Álgebra Lineal, Investigador en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Matanzas, Cuba. Recibió la distinción "Orden Rafael María Mendive".*

Correo electrónico: *reinaldo.hernandez@umcc.cu*

Artículo recibido: *12 de junio, 2007*
Aprobado: *28 de agosto, 2007*

Definición: Problema.

Es una situación que se desea resolver, que se caracteriza por:

-Existe un estado inicial de la situación sin resolver; y un estado final donde se considera resuelta.

-La forma de pasar del estado inicial al estado final (la vía de solución) es desconocida inicialmente por la persona que intenta resolver el problema.

Observación.

El concepto de problema es relativo. Lo que es un problema para una persona puede que no lo sea para otra persona. Inclusive, lo que es un problema para una persona en un momento dado puede no serlo para esa misma persona posteriormente.

Etapas en la resolución de un problema.

Hay variedad en cuanto a las etapas que proponen diferentes autores en la resolución de un problema. No obstante, en la mayoría de las propuestas está presente la que hizo ese admirable pedagogo que se nombró George Polya. En algunos casos se han subdividido algunas de las etapas propuestas por Polya y en otros casos se han hecho ligeras variaciones.

Las etapas que propuso Polya son las siguientes:

1) Comprender el problema.

2) Captar las relaciones que existen entre los diversos elementos. Ver lo que liga la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan.

3) Poner en ejecución el plan.

4) Volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla. (Polya, George)

Dentro de los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución de problemas, ocupan un lugar destacado los conceptos matemáticos, y dentro de los conceptos se encuentran aquellos que están vinculados con las operaciones matemáticas.

Para cada una de las operaciones matemáticas que sean estudiadas, en cualquier nivel de enseñanza, existen dos importantes habilidades que los estudiantes deben desarrollar: La habilidad relacionada con el cálculo de la operación y la habilidad relacionada con la aplicación de ésta en la resolución de problemas.

Estas habilidades están relacionadas pero son muy diferentes. Un estudiante puede tener habilidad en el cálculo de una operación matemática y no tener habilidad para identificar cuándo tiene que aplicar esa operación en la resolución de un problema. Esto puede suceder desde la enseñanza primaria, con cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, hasta en la enseñanza universitaria con las derivadas y las integrales definidas. Un alumno puede ser muy bueno calculando, por ejemplo, multiplicaciones y divisiones y no tener la habilidad necesaria para identificar cuándo debe aplicar una de estas operaciones en la resolución de un problema. Análogamente, un estudiante universitario puede ser capaz de calcular derivadas e integrales con un elevado grado de dificultad y no ser capaz de identificar cuándo debe aplicar una de estas operaciones en la modelación de un problema.

Desarrollo.

¿Qué suele hacerse por tradición y qué puede hacerse para lograr que los estudiantes desarrollen habilidades en la identificación de los problemas que se resuelven mediante una integral definida?

Lo que suele hacerse, tradicionalmente, para que los estudiantes desarrollen habilidades en la aplicación de la integral definida en la resolución de problemas es mostrarles ejemplos de problemas que se resuelven mediante esa operación matemática. Estos ejemplos se muestran como aplicaciones aisladas de la operación, sin que se destaquen propiedades comunes entre ellos que sirvan para identificar otros problemas que puedan presentarse posteriormente.

Lo que puede y debe hacerse, es trabajar con el concepto asociado a la integral definida, teniendo en cuenta que los componentes que distinguen a un concepto son su contenido y su extensión. El contenido expresa las propiedades esenciales que tienen en común todos los elementos que pertenecen al concepto y la extensión es el conjunto de todos esos elementos. Dos conceptos son equivalentes si tienen la misma extensión, aunque el contenido puede variar de una definición a otra. En conclusión, los conjuntos de propiedades que se utilicen para definir un mismo concepto pueden ser diferentes en dos definiciones que se den de ese concepto, pero tienen que ser equivalentes, tienen que generar la misma extensión.

Ahora bien, para cada operación matemática existe un conjunto de propiedades esenciales que tienen en común todos los problemas que pueden resolverse mediante esa operación.

Ese conjunto de propiedades esenciales representan el contenido del concepto asociado a la operación, y el conjunto de todos esos problemas conforman la extensión del concepto.

Es necesario mostrar a los estudiantes una caracterización general de todos los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida y lograr que la interpreten y la apliquen en la identificación de los problemas que pueden resolverse mediante esa operación y que sean capaces, además, de justificar por qué un determinado problema no puede ser resuelto aplicando la integral definida.

A continuación se presenta un conjunto de propiedades que conforman el contenido del concepto de integral definida. Si un estudiante desarrolla habilidades en el análisis del cumplimiento de estas propiedades en un problema, estará en posibilidad de identificar cuándo un problema puede resolverse o no mediante una integral definida.

Caracterización de los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida.

Sean: P un conjunto de problemas que pertenecen a un mismo tipo de problemas, S el conjunto de las soluciones de dichos problemas y F un conjunto de funciones reales definidas en puntos de un intervalo [a, b], donde, para cada problema p$\in$ P su solución s$\in$S está relacionada con una función f $\in$ F.

Entonces, la solución **s** de un problema p$\in$P, que está relacionada con una función f$\in$F en [a, b], es equivalente a $\int_a^b f(x)dx$ si se cumplen las siguientes propiedades:

a) f está definida y es continua en todo punto de [a, b].

b) En ese tipo de problemas, si la función asociada fuera constante en [a, b]; es decir, si fuera una función g tal que $g(x) = c$ para todo x$\in$ [a, b], entonces la solución sería $s = c(b-a)$.

c) La solución **s** de un problema de ese tipo, en un intervalo [a, b], no se altera si se realiza cualquier partición de [a, b] y se toma como solución la suma de las soluciones del problema en cada uno de los subintervalos en que se ha dividido [a, b].

d) En ese tipo de problemas, cuanto mayor sea la imagen de la función asociada, mayor será la solución **s** del problema.

Observaciones:

- En este trabajo, la expresión **tipo de problemas**, se utiliza con el significado siguiente: Conjunto de problemas, cuyas soluciones están asociadas cada una de ellas a una función real en un intervalo [a, b], y todos los problemas tienen exactamente las mismas características, con la única excepción de la función asociada, que puede ser diferente de un problema a otro.
- Es recomendable que se presenten a los estudiantes tanto problemas que puedan ser modelados mediante una integral definida, como otros que no puedan serlo porque incumplan alguna de las propiedades necesarias y suficientes.
- Para que una persona pueda analizar si en un problema se cumplen o no cada una de las propiedades que componen la caracterización anterior, es necesario que comprenda el contexto del problema desde el punto de vista extramatemático.

Aplicación de la caracterización en la solución de problemas.

Los ejemplos que serán presentados a continuación deben ser resueltos en elaboración conjunta con los estudiantes.

Analizar si los siguientes problemas pueden resolverse o no mediante la integral definida de la función f en el intervalo indicado.

Ejemplo 1

A partir de los 40 días de nacido y hasta cumplir un año, el aumento en kilogramos por días de un cerdo es $f(x) = 0{,}001x + 0{,}2$, donde x indica la edad en días. ¿Cuántos kilogramos aumenta el cerdo entre los 40 y los 100 días de nacido?

Análisis:

a) La función f está definida y es continua en el intervalo [40, 100].

b) Si la función asociada fuera constante (si fuera constante la cantidad de kilogramos por días que aumenta el cerdo), la solución del problema (la cantidad de kilogramos que aumenta el cerdo en el intervalo [40, 100]), podría obtenerse multiplicando esa constante C por la longitud del intervalo. Es decir, la solución sería: $S = C(100 - 40)$.

c) Cuanto mayor sea la imagen de la función asociada (la cantidad de libras por días que aumenta el cerdo), mayor será la solución del problema (la cantidad de libras que aumenta entre los 40 y los 100 días de nacido).

d) Si se realiza cualquier partición del intervalo [40, 100] y se calcula el aumento en libras del cerdo en cada uno de los subintervalos obtenidos mediante esa partición, la suma de los aumentos producidos en cada uno de los subintervalos, será siempre igual al aumento total en el intervalo [40, 100].

Por lo tanto, en este problema se cumplen todas las propiedades necesarias y suficientes para que su solución pueda obtenerse mediante una integral definida.

$$\therefore \mathrm{S} = \int_{40}^{100} (0{,}001x + 0{,}2)dx = 16{,}2$$

El puerco aumenta 16,2 kilogramos entre los 40 y los 100 días de nacido.

Ejemplo 2

Un hombre debe dar 10 viajes para recoger 10 sacos de malanga que se encuentran alineados a igual distancia en un surco. La función $f(x) = 20x$ representa la cantidad de metros que debe recorrer el hombre para recoger el saco número x, donde x representa el número de orden del saco. ¿Cuántos metros en total debe recorrer el hombre para recoger los primeros 6 sacos?

Análisis:

a) La función f no es continua en el intervalo [0, 6], porque está definida sólo para x=1, 2,...,6 y no está definida para los restantes puntos del intervalo [0, 6].

   Basta que se incumpla una de las propiedades para que la solución no pueda obtenerse mediante la integral definida de la función f en el intervalo dado. Por lo tanto, la solución de este problema no es equivalente a la integral: $\int_0^6 20x dx$.

   No obstante, para las restantes propiedades se tiene lo siguiente:

b) Considerando, por ejemplo, el intervalo [2, 2], en donde la función f es constante e igual a 40. La solución del problema en este intervalo (la cantidad de metros que debe recorrer el hombre para recoger el saco número dos, que es el único que está en ese intervalo), es precisamente 40. Pero esa solución no puede obtenerse multiplicando la constante 40 por la longitud del intervalo, pues esa longitud es cero. No se cumple, entonces, esa propiedad.

c) Cuanto mayor sea la imagen de la función asociada mayor es la solución de este tipo de problema. Se cumple.

d) Si se realiza una partición del intervalo [0, 6] en los subintervalos [0, 3] y [3, 6], la suma de las soluciones en estos dos subintervalos no es igual a la solución en el intervalo [0, 6] completo, pues en el primer caso se toma dos veces la solución en el punto x=3; es decir, los 60 metros que se deben recorrer para recoger el tercer saco.

En realidad, la solución de este problema es equivalente a $S = \sum_{x=1}^{6} 20x$

Ejemplo 3

La función $f(x) = 50x - x^2$ representa el total de arrobas de caña cortada que fue acumulando un machetero durante 8 horas, siendo x las horas que iban transcurriendo. ¿Cuántas arrobas de caña por horas estaba cortando el machetero al cumplirse las 7 horas de iniciarse la jornada?

Análisis:

a) La función f está definida y es continua en [0, 7].

b) Pero si f fuera constante (si fuera constante la cantidad de arrobas de caña cortada que se iban acumulando), la solución del problema (la cantidad de arrobas de caña que se iban cortando por horas) no se obtendría multiplicando esa constante por la longitud del intervalo.

Por lo tanto, la solución de este problema no se obtiene mediante el cálculo de la integral definida de la función $f(x) = 50x - x^2$.

En realidad la solución es equivalente a $f'(6)$.

Ejemplo 4

Calcular el área de un rectángulo, que tiene como base al intervalo [2, 8] del eje de las x (de las abscisas); y cuya altura es el máximo de la función f definida por $f(x) = x^2$ en el propio intervalo [2, 8].

Análisis:

a) La función f está definida y es continua en [2, 8].
b) Si f fuera constante la solución podría obtenerse mediante el producto de esa constante por la longitud del intervalo.
c) Cuando mayor sea la imagen de la función asociada mayor es la solución del problema.
d) Pero si se realizan particiones del intervalo [2, 8], por ejemplo, en [2, 4] y [4, 8], la suma de las soluciones en cada uno de esos dos subintervalos no es igual a la solución en el intervalo [2, 8] completo.

$S[2;8] = f(8)(8-2) = 64(6) = 384u^2$, que es en realidad la solución del problema.

Por otra parte:

$$\begin{aligned} S[2;4] + S[4;8] &= f(4)(4-2) + f(8)(8-4) \\ &= 16(2) + 64(4) \\ &= 32 + 256 = 288\,u^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de este problema no es equivalente a la integral definida: $\int_2^8 x^2 dx$

Un ejercicio con mayor grado de dificultad para resolver en equipo, con estudiantes aventajados en la asignatura de Matemática.

Deducir la fórmula para calcular el volumen de un cono circular recto de altura h y radio de la base r.

Solución:

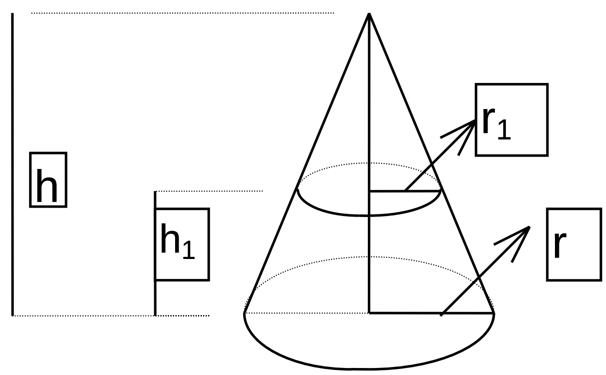
Para resolver este problema debe determinarse, en primer lugar, una función que indique el área de cada sección plana horizontal del cono en función de su distancia al plano de la base.

En la figura, **r** y **h** representan el radio y la altura respectivamente del cono, mientras que r_1 indica el radio de una sección plana horizontal del cono que está a una distancia h_1 de la base.

Por el teorema de las transversales:

$$\frac{h}{r} = \frac{h-h_1}{r_1}$$

$$r_1 = \frac{r(h-h_1)}{h}$$



Entonces, el área de una sección plana horizontal de altura h_1, se obtiene aplicando la fórmula del área del círculo: A= πr^2, con $r = r_1$. Entonces $A(h_1) = \dfrac{\pi r^2 (h-h_1)^2}{h^2}$

Se analizará ahora si la solución de este problema cumple las propiedades de la caracterización general.

1) La función A definida por $A(h_1) = \dfrac{\pi r^2 (h-h_1)^2}{h^2}$ está definida y es continua para $0 \leq h_1 \leq h$; es decir, en el intervalo [0, h].

2) Si el área de cada una de las secciones planas paralelas al plano de la base fuera constante para cualquier altura h_1, el volumen podría calcularse como el producto de esa constante por la altura total h.

3) El volumen total del cono puede obtenerse como la suma de los volúmenes que se obtendrían en cada uno de los subintervalos, si se realiza una partición cualquiera del intervalo [0, h].

4) Cuanto mayor sea el valor de la imagen $A(h_1)$ que representa el área de una sección plana horizontal del cono a una altura h_1, mayor será su volumen.

Se observa pues que la solución de este problema se ajusta a las propiedades de la caracterización general. Entonces:

$$V = \int_0^h \frac{\pi r^2 (h-h_1)^2}{h^2}\, dh_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Ejercicios propuestos:

Analice si los siguientes problemas pueden resolverse o no mediante la integral definida de la función f en el intervalo que corresponda.

1) Una bicicleta tuvo durante 4 horas una velocidad promedio equivalente a la velocidad mínima que alcanzó un auto en el mismo intervalo de tiempo. La velocidad del auto en km. por horas fue de $f(x) = 3{,}125x^2 - 25x + 60$, siendo x las horas que iban transcurriendo ($0 \leq x \leq 4$) ¿Cuál fue el espacio recorrido por la bicicleta durante las 4 horas?

2) En una fila hay 10 personas ordenadas de acuerdo a sus estaturas de menor a mayor. Cada persona es 2 centímetros más alta que la anterior. Las estaturas en centímetros de estas personas se pueden expresar mediante la función $f(x) = 164 + 2x$, donde x representa el orden en la fila de cada persona. ¿Cuál es la suma de las estaturas de las 10 personas?

3) La cantidad de quintales de papas recolectados, que fue acumulando una brigada en una jornada de 8 horas de trabajo, se puede expresar mediante la función $f(x) = 10x - 0{,}2x^2$, $(0 \leq x \leq 8)$, donde x representa la cantidad de horas que iban transcurriendo. ¿Cuántos quintales de papas por horas, como promedio, recogió la brigada durante las 8 horas de trabajo?

4) La cantidad de vueltas por minutos que iban dando las ruedas de una bicicleta al bajar una loma, puede expresarse mediante la función $f(x) = \frac{20}{3}x^2 - \frac{40}{3}x$, siendo x la cantidad de minutos transcurridos a partir del inicio de la bajada $(0 \leq x \leq 4)$. ¿Cuántas vueltas dieron las ruedas de la bicicleta durante los 4 minutos que duró la bajada de la loma?

5) Un obelisco tiene la forma de una pirámide (pero no recta). Una de las caras laterales del obelisco es de forma triangular con el vértice hacia arriba. Está situada perpendicularmente a la base y tiene una altura de 6 metros. La cantidad de litros de pintura que se iban utilizando por cada metro de altura, para pintar la superficie de esa cara, puede expresarse mediante la función $f(x) = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x$, donde x expresa la altura en metros $(0 \leq x \leq 6)$. ¿Cuántos litros de pintura se necesitaron para pintar toda la superficie de esa cara del obelisco?

6) Para construir el techo de una sombrilla de playa se le pusieron 8 vueltas de alambrón en forma de circunferencias. Las longitudes en metros de estas vueltas de alambrón están dadas por la función $f(x) = 2\pi(1{,}8 - 0{,}2x)$, donde x representa el número de orden de la vuelta. ¿Cuál es la longitud total en metros que tienen las 8 vueltas de alambrón?

7) Se ha puesto un jarro con agua a calentar en un fogón durante 8 minutos. El aumento por minutos de la temperatura del agua en grados celsio lo expresa la función $f(x) = 1{,}25x^2 - 2{,}5x$. ¿Cuánto aumenta la temperatura del agua durante los 8 minutos?

8) Un depósito de cemento en forma de pirámide invertida tiene una compuerta en su parte inferior. Al abrirse la compuerta comienza a caer cemento en un camión de volteo. La cantidad de metros por minutos en que va disminuyendo la altura del volumen del cemento en el depósito está dado por la función $f(x) = 0{,}1x + 0{,}2$, $(0 \leq x \leq 10)$, donde x representa la cantidad de minutos transcurridos. ¿Cuántos metros disminuye en total la altura del volumen del cemento en los primeros 6 minutos?

9) En una tienda se van a vender 40 artículos manufacturados de un mismo tipo, permitiéndose al comprador elegir el que desee. Previendo que los artículos de más baja calidad irán quedando para el final, se determinó vender los 20 primeros a un precio fijo de 10 pesos cada uno; pero a los últimos 20 se les irá rebajando el precio, de manera que cada uno se venderá a razón de 20 centavos menos que el anterior. ¿Cuál es el importe total de la venta?

10) En un terreno que tiene forma de trapecio, se han sembrado 18 surcos de tomate. La longitud de los surcos va disminuyendo a partir del primero, por la forma trapezoidal del terreno. La cantidad de matas de tomate que tiene cada surco puede expresarse mediante la función $f(x) = 300 - 5x$, donde x representa el número del surco a partir del primero y hasta el último. ¿Cuántas matas de tomate tienen en total los 5 primeros surcos?

11) En un establo hay 6 vacas, a las cuales se les suministra pienso en el horario de 8 a.m. a 6 p.m. La cantidad de Kg. de pienso por hora que va consumiendo una vaca va disminuyendo y puede expresarse aproximadamente por $f(t) = 4 - 0{,}32t$, siendo t las horas transcurridas a partir de las 8 a.m. y hasta las 6 p.m. ¿Qué cantidad de pienso consume una vaca de las 12 m.d. a las 4 p.m.?

12) La función f definida por $f(x) = 0{,}5x + 3{,}5$ representa aproximadamente el por ciento de pérdida por meses del peso de la cebolla "Red Creole C-5", por almacenamiento a una temperatura entre 20 y 25 grados centígrados, siendo x la cantidad de meses transcurridos a partir de su almacenamiento y hasta los 6 meses.
¿Qué por ciento del peso de la cebolla se ha perdido cuando han transcurrido los primeros 75 días de almacenada?

13) Cuando se estaba fundiendo una placa en un segundo piso, una pequeña porción del concreto contenido en un depósito que se utilizaba para subirlo, se iba derramando poco a poco mientras era ascendido a 10 metros de altura; por lo que su peso disminuía ligeramente; pudiéndose expresar el peso total en newton del depósito con el concreto aproximadamente como $p(x) = 200 - 1{,}2x$, siendo x la altura en metros que iba alcanzando el depósito. Hallar el trabajo realizado para subir el depósito los 10 metros.

14) Un hombre ha situado 100 dólares en un banco con un interés compuesto del 10 por ciento anual. Esto le proporciona una ganancia por años equivalente a $f(t) = 10.(1{,}1)^{t-1}$. ¿A cuánto asciende su ganancia al cabo de 8 años?

15) En un envase que tiene forma parecida a una semiesfera y que inicialmente se encuentra vacío, se van echando uno a uno 5 cubos de agua. Por cada cubo de agua que se vierte, la altura de la superficie líquida aumenta una cantidad de centímetros que viene dada

por la función $f(x) = 6 - 0{,}1x^2$, donde x representa en cada caso el número de orden del cubo de agua que se ha vertido. ¿Cuál es la altura total en centímetros que alcanza la superficie del agua dentro del envase después que se vierten los 5 cubos de agua?

16) Ante la necesidad de aumentar el ritmo de producción en una fábrica, se tomó el acuerdo de pagar a mayor precio, cuanto mayor fuera la cantidad de toneladas producidas en el día. Cada tonelada producida por una brigada se pagó a un precio dado por $f(x) = 40 + 4x$ dólares, donde x representa el total de toneladas producidas por la brigada en el día. ¿Cuántos pesos ganó en total la brigada un día en que produjo 5 toneladas?

Respuestas a los ejercicios propuestos.

Ejercicio 1: No se resuelve por integrales. S = 10(4) = 40

Ejercicio 2: No se resuelve por integrales. S = $\sum_{x=1}^{10}(164 + 2x)$

Ejercicio 3: No se resuelve por integrales. S = $\frac{f(8)}{8}$

Ejercicio 4: Se resuelve por integrales. S = $\int_0^4 \left(\frac{20}{3}x^2 - \frac{40}{3}x \right) dx$

Ejercicio 5: Se resuelve por integrales. S = $\int_0^6 \left(-\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x \right) dx$

Ejercicio 6: No se resuelve por integrales. S = $\sum_{x=1}^{8} 2\pi(1{,}8 - 0{,}2x)$

Ejercicio 7: Se resuelve por integrales. S = $\int_0^8 \left(1{,}25x^2 - 2{,}5x\right) dx$

Ejercicio 8: Se resuelve por integrales. S = $\int_0^6 \left(0{,}1x + 0{,}2\right)dx$

Ejercicio 9: No se resuelve por integrales. S = $200 + \sum_{x=1}^{20}(10 - 0{,}2x)$

Ejercicio 10: No se resuelve por integrales. S = $\sum_{x=1}^{5}(300 - 5x)$

Ejercicio 11: Se resuelve por integrales. S = $\int_4^8 (4 - 0{,}32t)dt$

Ejercicio 12: Se resuelve por integrales. S = $\int_0^{2,5} (0{,}5x + 3{,}5)dx$

Ejercicio 13: Se resuelve por integrales. S = $\int_0^{10} (200 - 1{,}2x)dx$

Ejercicio 14: No se resuelve por integrales. S = $\sum_{x=1}^{8} 10(1{,}1)^{t-1}$

Ejercicio 15: No se resuelve por integrales. S = $\sum_{x=1}^{5}(6 - 0{,}1x^2)$

Ejercicio 16: No se resuelve por integrales. S = $5.f(5)$

Anexo.

La caracterización que se ha presentado en este trabajo, está basada en una definición alternativa de la integral definida. A su vez, la equivalencia entre esa definición alternativa y la definición tradicional está validada por un teorema con su correspondiente demostración.

A continuación se presenta la definición alternativa y el teorema con la demostración, aunque no es recomendable desarrollar estos aspectos con los estudiantes en el aula.

Definición alternativa de la integral definida.
(Para funciones continuas).

Sea F un conjunto de funciones reales definidas y continuas en todo punto de un intervalo [a, b].

La integral definida de una función $f \in F$ en el intervalo [a, b], se denota $\int_a^b f(x)dx$ y se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:

a) Si f es constante e igual a C en un intervalo [m, n] $\subset$ [a, b] entonces

$$\int_m^n f(x)dx = C(n-m)$$

b) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x $\in$ [m, n] $\subset$ [a, b] y $g \in F$

$$\int_m^n f(x)dx \leq \int_m^n g(x)dx$$

c) Para toda partición P= $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_p\}$ de [m, n] $\subset$ [a, b] se cumple que:

$$\int_m^n f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{p-1}}^{x_p} f(x)dx$$

Observaciones:

- Esta definición alternativa es más apropiada que la definición tradicional para reconocer cuándo puede aplicarse la integral definida en la solución de un problema, pero no lo es para el desarrollo de habilidades en el cálculo de integrales definidas.
- Es recomendable introducir esta definición cuando se vayan a resolver problemas aplicando la integral definida, después que los estudiantes hayan desarrollado habilidades en el cálculo de esta operación.
- La equivalencia entre la definición alternativa que se ha dado aquí y la definición tradicional de integral definida, está contenida en el siguiente teorema:

Teorema

Sea S una función, tal que, para cada función f definida y continua en todo punto del intervalo $[a,b]$ y para cada intervalo $[x_m,x_n] \subset$ [a, b], S asocia un número real que denotaremos por $S_f\,[x_m,x_n]$

Entonces:

$S_f\,[x_m,x_n] = \int_{x_m}^{x_n} f(x)dx$, para toda función f definida y continua en todo punto de $[a,b]$ y para todo intervalo $[x_m,x_n] \subset$ [a, b] sí y sólo sí S cumple las siguientes propiedades:

1) Cuando f es constante e igual a c en un intervalo $[x_m,x_n] \subset$ [a, b] entonces

$S_f\,[x_m,x_n] = c(x_n - x_m)$

2) Cuando $f(x) \leq g(x)$ para todo x $\in [x_m, x_n] \subset$ [a, b] entonces

$S_f\,[x_m,x_n] \leq S_g\,[x_m,x_n]$, siendo g definida y continua en $[x_m,x_n]$

3) Para toda partición P = $\{x_o, x_1, x_2, ..., x_p\}$ de $[x_m,x_n] \subset$ [a, b] se cumple que:

$S_f\,[x_m,x_n] = S_f\,[x_o,x_1] + S_f\,[x_1,x_2] + ... + S_f\,[x_{p-1},x_p]$

Demostración:

Es necesario demostrar que:

a) Si S cumple las propiedades 1,2 y 3 entonces

$S_f\,[x_m,x_n]=\int_{x_m}^{x_n} f(x)dx$, para toda función f definida y continua en todo punto de [a, b] y para todo intervalo $[x_m,x_n] \subset$ [a, b].

b) Si $S_f\,[x_m,x_n]=\int_{x_m}^{x_n} f(x)dx$, para toda función f definida y continua en todo punto de $[a,b]$ y para todo intervalo $[x_m,x_n] \subset$ [a, b] entonces S cumple las propiedades 1,2 y 3.

Demostremos a)

Sea P = $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_p\}$ una partición del intervalo $[x_m,x_n] \subset$ [a, b] con

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (i = 1,2,..., p) y norma de partición δ(p).

Sean m_i y M_i el mínimo y el máximo, respectivamente, de la función f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (i = 1,2,…, p)

Sean h y g dos funciones reales definidas en $[a,b]$, tales que $h(x)=m_i$ y $g(x)=M_i$ si $x \in [x_{i-1}, x_i]$, (i=1,2,..., p)

Como h y g son constantes en $[x_{i-1}, x_i]$:

$S_h\,[x_{i-1}, x_i] = m_i\,(x_i - x_{i-1})$ y $S_g\,[x_{i-1}, x_i] = M_i\,(x_i - x_{i-1})$

Como $h(x) \le f(x) \le g(x)$ para todo x $\in [x_{i-1}, x_i]$,

$S_h\,[x_{i-1}, x_i] \le S_f\,[x_{i-1}, x_i] \le S_g\,[x_{i-1}, x_i]$

Luego $\sum_{i=1}^{p} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{p} S_f\,[x_{i-1}, x_i] \le \sum_{i=1}^{p} M_i\,(x_i - x_{i-1})$

$\sum_{i=1}^{p} m_i \Delta x_i \le S_f\,[x_m, x_n] \le \sum_{i=1}^{p} M_i \Delta x_i$

Pero $\sum_{i=1}^{p} m_i \Delta x_i$ y $\sum_{i=1}^{p} M_i \Delta x_i$ son respectivamente la suma inferior y superior de Darboux, para una función continua en un intervalo cerrado $[x_m, x_n]$. Entonces,

$$\lim_{\delta(p)\to 0} \sum_{i=1}^{p} m_i \Delta x_i \leq S_f [x_m, x_n] \leq \lim_{\delta(p)\to 0} \sum_{i=1}^{p} M_i \Delta x_i$$

$$\int_{x_m}^{x_n} f(x)dx \leq S_f [x_m, x_n] \leq \int_{x_m}^{x_n} f(x)dx$$

Por lo tanto

$$S_f [x_m, x_n] = \int_{x_m}^{x_n} f(x)dx$$

En particular:

$$S_f [a, b] = \int_a^b f(x)dx$$

Demostremos b)

Es suficiente demostrar que $\int_{x_m}^{x_n} f(x)dx$, para toda función f definida y continua en todo punto de [a, b] y para todo intervalo $[x_m, x_n] \subset$ [a, b], cumple las propiedades 1, 2 y 3.

Esto es:

1) Si $f(x)$ =c (constante) en $[x_m, x_n] \subset$ [a, b], entonces $\int_{x_m}^{x_n} f(x)dx = c(x_n - x_m)$.

2) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x $\in [x_m, x_n] \subset$ [a, b] y g está definida y es continua en $[x_m, x_n]$ entonces $\int_{x_m}^{x_n} f(x)dx \leq \int_{x_m}^{x_n} g(x)dx$ (Por propiedad de la integral definida.)

3) Si P= $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_p\}$ es una partición del intervalo $[x_m, x_n] \subset$ [a, b], entonces:

$\int_{x_m}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{p-1}}^{x_p} f(x)dx$ (Por propiedad de la integral definida).

Queda pues demostrado el teorema.

Conclusiones.

La propuesta didáctica que aquí se ha presentado está basada en la necesidad de que los estudiantes interpreten el contenido de los conceptos matemáticos. Es decir, que reconozcan y sean capaces de analizar, si en un problema dado, están presentes o no todas las propiedades que conforman el contenido de un concepto, para poder decidir, con precisión, si ese problema puede ser modelado o no mediante ese concepto matemático.

Aunque en este trabajo se ha desarrollado una propuesta, específicamente, para la forma de enseñar a los estudiantes a identificar el contenido del concepto de integral definida en un problema, ideas similares a estas pueden ser aplicadas para cualquier otro concepto matemático. Pueden citarse, como ejemplos, un trabajo semejante a este relacionado con el concepto de derivada de una función real en un punto, u otro, en proceso de realización, vinculado con la aplicación de los conceptos de integrales dobles y triples.

La estructura didáctica que ha sido propuesta aquí, se ha llevado a la práctica, por el autor de este trabajo, durante varios cursos con estudiantes universitarios y se han obtenido muy buenos resultados.

Referencias

Ausubel, David Paul. (1997). **Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo**. México: Editorial Trillas.

Ballester, Sergio. (1999). **La sistematización de los conocimientos matemáticos. Proposiciones metodológicas**. La Habana: Editorial Academia.

Campistrous, Luis y Rizo, Celia. (1996). **Aprende a resolver problemas matemáticos**. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Delgado, José Raúl. (1999). **La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del conocimiento y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas.** Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba.

Hernández, Reinaldo. (1998). **Cómo enseñar a identificar los problemas que se resuelven mediante derivada o integral definida**. III Taller internacional: La enseñanza de la Matemática y la Computación. Matanzas, Cuba: Instituto Superior Pedagógico Juan Marinello.

Hernández, Reinaldo. (2000). **Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto**. Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba.

Hernández, René. (1999). **Naturaleza e historia de la Matemática. Relación con la enseñanza**. Matanzas: COMAT′ 99.

Llivina, Miguel. (1999). **Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos**. Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba.

Mederos, Otilio. (1998). **La operación generalización de conceptos**. III Taller Internacional sobre Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. Tomo I. La Habana: Instituto Superior José Antonio Echevarría.

Polya, George. (1986). **Cómo plantear y resolver problemas.** México: Editorial Trillas.

Santos, Luís Miguel. (1994). **La Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas**. México: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.

Torres, Paúl. (1999). **Didácticas cubanas en la enseñanza de la Matemática. Proposiciones metodológicas**. La Habana. Cuba: Editorial Academia.