



Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones

ISSN: 1409-2433

mta.cimpa@ucr.ac.cr

Universidad de Costa Rica

Costa Rica

Llinás Solano, Humberto

Teoremas Límites en Procesos de Bellman-Harris con Segundos Momentos Finitos

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, vol. 17, núm. 2, 2010, pp. 103-120

Universidad de Costa Rica

San José, Costa Rica

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=45326933001>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

TEOREMAS LÍMITES EN PROCESOS DE  
BELLMAN–HARRIS CON SEGUNDOS MOMENTOS  
FINITOS

LIMIT THEOREMS IN BELLMAN–HARRIS  
PROCESSES WITH FINITE  
SECOND MOMENTS

HUMBERTO LLINÁS SOLANO\*

*Received: 24 Jul 2008; Revised: 30 Jul 2009; Accepted: 6 Apr 2010*

---

**Resumen**

En este artículo estudiamos diferentes teoremas límites en un proceso crítico de Bellman-Harris con un sólo tipo de partículas y con segundos momentos finitos. Los límites encontrados se hallaron con base en los siguientes dos procesos: “Procesos bajo la condición de no extinción” y “procesos bajo la condición de extinción en el futuro cercano”. En la observación de estos dos procesos hemos tenido en cuenta los dos diferentes casos:  $\tau_i := d_i t$  y  $\tau_i := d_i \pm t$ , donde  $t$  es un punto de tiempo y  $d_i \in (0, \infty)$  son constantes fijas para todo  $i = 1, \dots, k$ . Para el caso  $\tau_i := d_i t$ , el lema de comparación 2.3 de Esty es útil para investigar el comportamiento asintótico de la función de generatriz conjunta  $F(s_1, \dots, \tau_k)$ , para  $t \rightarrow \infty$ ; para el

---

\*Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Norte, Km 5 Vía Puerto Colombia, Barranquilla, Colombia. E-Mail: [hllinas@uninorte.edu.co](mailto:hllinas@uninorte.edu.co)

caso  $\tau_i := t + d_i$ , no. Para éste último caso encontramos otro lema de comparación (lema 4.3), que es la base para demostrar teoremas límites si  $\tau_i := t \pm d_i$ .

**Palabras clave:** Proceso de Bellman-Harris, proceso crítico, segundos momentos finitos.

### Abstract

In this article are studied different theorems limits in a critical Bellman-Harris branching process with a only type of particle and with finite second moments. There were used two processes in order to figure out the limits as following as: “The condition of no extinction” and “The condition of extinction in the near future”. In the two previous processes is taken into account two different cases as:  $\tau_i := d_i t$  y  $\tau_i := d_i \pm t$ , where  $t$  is a point of time and  $d_i \in (0, \infty)$  are fixed for every  $i = 1, \dots, k$ . For the case where  $\tau_i := d_i t$ , the Esty’s comparison lemma 2.3 is used to investigate the asymptotic behavior of the joint probability generating function  $F(s_1, \dots, \tau_k)$ , for  $t \rightarrow \infty$ ; for the case  $\tau_i := t + d_i$ , is not used. For this last case is founded another comparison lemma (lemma 4.3), that is the base to demonstrate the theorems limits if  $\tau_i := t \pm d_i$ .

**Keywords:** Bellman-Harris process, critical process, finite second moments.

**Mathematics Subject Classification:** 60G07, 60J80

## 1 Introducción

El desarrollo de este trabajo está basado en las investigaciones realizadas por Athreya & Ney [1], Goldstein [4] y Esty [2] en donde estudian el proceso crítico de ramificación de Bellman-Harris con un sólo tipo de partícula y segundos momentos finitos. Los teoremas límites que presentan y demuestran los dos primeros sólo tienen en cuenta una sola generación y los que presenta Esty generaliza algunos de estos resultados a los casos en que se tienen en cuenta varias generaciones al mismo tiempo.

Básicamente, el objetivo de este trabajo es completar los resultados de Esty (los cuales, entre otros, se mencionan en las secciones 2 y 3) mediante la presentación y demostración de teoremas límites (véase la sección 5). Los límites encontrados se basan en el supuesto de que el proceso comienza con una sola partícula y en las siguientes dos condiciones: Procesos bajo la condición *no extinción* y procesos bajo la condición *extinción en el futuro cercano*. En la observación de estos dos procesos se han tenido en cuenta los dos diferentes casos:  $\tau_i := d_i t$  y  $\tau_i := d_i \pm t$ , donde  $t$  es

un punto de tiempo y  $d_i \in (0, \infty)$  son constantes fijas para todo  $i = 1, \dots, k$ . Para el caso  $\tau_i := d_i t$ , el lema de comparación 2.3 de Esty es útil para investigar el comportamiento asintótico de la función de generatriz conjunta de  $Z(t_1), \dots, Z(t_k)$  ( $t_i := \sum_{j=1}^i \tau_j$ , y  $\tau_j > 0$ ) para  $t \rightarrow \infty$ ; para el caso  $\tau_i := t + d_i$ , no. Para éste último caso encontramos otro lema de comparación (lema 4.3), que es la base para demostrar teoremas límites si  $\tau_i := t \pm d_i$ .

También cabe anotar que en la actualidad existen trabajos más recientes que presentan demostraciones detalladas de resultados análogos, pero sólo tienen en cuenta el proceso de Galton-Watson (ver, por ejemplo, Llinás [6], [7] y Hurtado & Llinás [8]).

El artículo está dividido en cinco secciones. La primera de ellas corresponde a la introducción. En la segunda y tercera se presentan algunos resultados conocidos e importantes relacionados con el proceso de Bellman-Harris con segundos momentos finitos. En la cuarta se presenta y demuestra un lema de comparación análogo al lema 2.3 de Esty, el cual nos será muy útil para demostrar teoremas límites para el caso en que  $\tau_i := t + d_i$ . En la quinta sección se presentan y demuestran tales teoremas límites en el proceso de Bellman-Harris con segundos momentos finitos, los cuales generalizan (al tener en cuenta varias generaciones al mismo tiempo) y complementan a aquéllos encontrados por Athreya & Ney [1], Esty [2] y Goldstein [4].

## 2 Generalidades del proceso crítico de Bellman-Harris con un tipo de partícula y el lema de comparación de Esty

Tomando como base el modelo desarrollado para un proceso de Galton-Watson (véase Hurtado & Llinás[8]), consideraremos ahora que cada individuo tiene un tiempo de vida aleatorio  $T$  con la función de distribución

$$P\{T \leq t\} = G(t), \quad \text{con } G(-0) = 0 \quad \text{y} \quad G(+0) < 1.$$

La reproducción de la población “funciona” exactamente como en el proceso de Galton-Watson, es decir, con probabilidad  $p_i$  un individuo produce, después de su muerte,  $i$  individuos de la misma especie. Como antes, debemos hacer algunas exigencias: las probabilidades  $p_i$  y los tiempos de vida de las partículas son independientes del punto de tiempo  $t$  de parir, de la edad de las madres y del tamaño de la población en el tiempo  $t$  de parir. Este proceso  $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$  así descrito lo llamaremos PROCESO DE BELLMAN-HARRIS, en donde  $Z(t)$  representa el tamaño de la población en

el punto de tiempo  $t \in \mathbb{R}_0^+$ . Los datos del modelo son  $\{p_i\}$  y  $G(\cdot)$ . En lo que sigue, si se dice otra cosa, supondremos que el proceso comienza con una sola partícula, es decir,  $Z(0) = 1$ , y que  $p_0 + p_1 < 1$ . El proceso de Bellman-Harris representa una generalización del proceso de Galton-Watson, que además ha resultado muy caro, porque sin otras condiciones para la distribución  $G$  de la edad, se ha perdido la propiedad de Markov de  $\{Z(t)\}_t$ . Sin embargo, se pueden obtener resultados importantes debido a la estrecha relación de  $\{Z(t)\}_t$  con el llamado PROCESO ASOCIADO DE GENERACIONES  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ : si  $Z_n$  describe el tamaño de la  $n$ -ésima generación del proceso  $\{Z(t)\}_t$ , entonces,  $\{Z_n\}_n$  es un proceso de Galton-Watson con función generatriz de probabilidad (f.g.p.)  $f$ , definida por

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Además,  $f$  es la f.g.p. de la distribución de los descendientes de  $\{Z(t)\}_t$  (para más detalles, véase, por ejemplo, Harris [5], pág. 127). De nuevo, estudiaremos el tamaño de la población  $Z(t)$  con ayuda del estudio de su f.g.p.

$$F(t; s) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z(t) = k\} s^k, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

La investigación se divide de nuevo en 3 casos:  $m > 1$ ,  $m < 1$  y  $m = 1$  (el caso crítico). Sea  $Q(s; t) := 1 - F(s; t)$ . Con esto,  $Q(t) := Q(0; t)$  es la probabilidad de supervivencia del proceso hasta el tiempo  $t$ .

Sea  $G_n(t)$  la  $n$ -ésima convolución de  $G(t)$ , con  $G_0(t) = 1$  si  $t \geq 0$  y cero si  $t < 0$ . Además, sea  $\mu := E(T) = \int_0^{\infty} t dG(t)$ , el tiempo de vida media. Para todo  $0 \leq s_i \leq 1$ ,  $t_i := \sum_{j=1}^i \tau_j$ ,  $i = 1, \dots, k$ , y  $\tau_j > 0$  definimos la función de generatriz de probabilidad conjunta de  $Z(t_1), \dots, Z(t_k)$  como

$$\begin{aligned} F(s_1, \dots, s_k; \tau_1, \dots, \tau_k) &= \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{\infty} P\{Z(t_1) = j_1, \dots, Z(t_k) = j_k\} s_1^{j_1} \cdots s_k^{j_k}. \end{aligned}$$

Con esto, sea

$$Q(s_1, \dots, s_k; \tau_1, \dots, \tau_k) = 1 - F(s_1, \dots, s_k; \tau_1, \dots, \tau_k).$$

Si no hay confusión con la notación, a menudo escribiremos brevemente  $F(s_1, \dots, \tau_k)$ , para referirnos también a la f.g.p.  $F(s_1, \dots, s_k; \tau_1, \dots, \tau_k)$ ; de otro modo, escribiremos todos los argumentos.

Esty [2] ha encontrado una ecuación integral para la f.g.p.  $F(s_1, \dots, \tau_k)$  y ha demostrado que esta ecuación tiene una única solución acotada que también es una f.g.p. El caso unidimensional es conocido (véase Goldstein [4]).

**Teorema 2.1 (Esty, [2])** Sean  $s := \prod_{i=1}^k s_i$ ,  $f$  una f.g.p. y  $G$  una distribución sobre  $[0, \infty)$  con  $G(0^+) = 0$ . Sea

$$F_{ik}(y) := F(s_{i+1}, \dots, s_k; t_{i+1} - y, \tau_{i+2}, \dots, \tau_k)$$

para  $i = 1, \dots, k$ . Entonces la ecuación integral

$$\begin{aligned} F(s_1, \dots, s_k; \tau_1, \dots, \tau_k) = \\ = s[1 - G(t_k)] + \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^i s_j \int_{t_i}^{t_{i+1}} f[F_{ik}(y)] dG(y) \end{aligned} \quad (1)$$

tiene una solución que es una f.g.p.  $k$ -dimensional para cada  $\tau_1, \dots, \tau_k \geq 0$  y que es la única solución acotada.

La ecuación integral (1) también la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F(s_1, \dots, \tau_k) = & \int_0^{t_1} f[F_{0k}(y)] dG(y) - \\ & - s_1 \int_0^{t_1} f[F_{1k}(y)] dG(y) + \\ & + s_1 F(s_2, \dots, s_k; t_2, \tau_3, \dots, \tau_k). \end{aligned} \quad (2)$$

Cuando el proceso es crítico, Esty [2] ha encontrado dos importantes propiedades con respecto a la f.g.p. conjunta  $F(s_1, \dots, \tau_k)$ .

**Teorema 2.2 (Esty, [2])** Si  $m = 1$ , entonces,

- (a)  $s_1 s_2 \cdots s_i F(s_{i+1}, \dots, \tau_k) \leq F(s_1, \dots, \tau_k)$ , para todo  $i = 1, \dots, k-1$ .
- (a)  $F(s_1, \dots, \tau_k)$  monótonamente creciente en  $t_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Los lemas de comparación son las bases del método para demostrar nuestros teoremas límites. En estos lemas hacemos una aproximación de de la f.g.p.  $F(s_1, \dots, \tau_k)$  de nuestro proceso de Bellman-Harris a través de las iteraciones  $f_n(\cdots)$  de un proceso de Galton-Watson más un error que depende de  $G_n(t_1)$ . Esta aproximación hace posible extender resultados conocidos del caso Galton-Watson al caso Bellman-Harris.

**Lema 2.3 (Lema de comparación de Esty, [2])** Sean  $m = 1$  y  $s := s_1 F(s_2, \dots, \tau_k)$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos

$$Q_n(s) - G_n(t_1) \leq Q(s_1, \dots, \tau_k) \leq Q_n(s) + [1 - G_n(t_1)].$$

### 3 Resultados conocidos para el caso de varianza finita

**Definición 3.1** Decimos que las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen cuando  $m = 1$ ,  $\mu < \infty$ ,  $\sigma^2 =: 2\tilde{\sigma}\mu < \infty$  y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2[1 - G(t)] = 0.$$

Análogo como en un proceso crítico de Galton-Watson, la probabilidad de supervivencia  $Q(t)$  en un proceso crítico de Bellman-Harris con varianza finita tiene la siguiente propiedad asintótica:

**Teorema 3.2 (Athreya & Ney, [1])** Si las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen, entonces,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}tQ(t) = 1$ .

Para estudiar el comportamiento asintótico de la f.g.p. conjunta  $F(s_1, \dots, \tau_k)$  debemos manipular, para  $n$  grande, las funciones  $G_n(t_1)$  contenidas en el lema de comparación 2.3. Goldstein [4] ha encontrado el siguiente resultado.

**Lema 3.3 (Goldstein, [4])** Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2[1 - G(t)] = 0$ , entonces,

$$(a) \ n := \left\lfloor \frac{t}{\mu}(1 + \varepsilon) \right\rfloor \implies \lim_{t \rightarrow \infty} tG_n(t) = 0,$$

$$(b) \ n := \left\lfloor \frac{t}{\mu}(1 - \varepsilon) \right\rfloor \implies \lim_{t \rightarrow \infty} t[1 - G_n(t)] = 0,$$

para cualquier  $\varepsilon > 0$ .

Ahora, definimos las correspondientes fracciones complejas  $y_k(x_1, \dots, x_k)$  de las variables  $x_1, \dots, x_k$  a través de

$$y_1(x_1) := \frac{1}{x_1}, \quad y_2(x_1, x_2) := y_1(x_1 + x_2^{-1})$$

y  $y_k(x_1, \dots, x_k) := y_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1} + x_k^{-1})$ , para  $k \geq 3$ .

Ya que la fórmula de iteración para el proceso de Galton-Watson y para el proceso de ramificación de Markov con tiempo continuo se cumple, es decir,

$$F(s_1, s_2) = F(s_1 F(s_2, t_2), t_1),$$

para el proceso no markoviano de Bellman-Harris no se cumple, Esty [2] ha demostrado que para un proceso crítico de Bellman-Harris con varianza finita la fórmula anterior es asintóticamente correcta.

**Lema 3.4 (Esty, [2])** Las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen. Sean  $0 < d_i < \infty$ ,  $\tau_i = d_i t$  y  $0 \leq s_i := s_i(t) \leq 1$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\sigma} t [1 - s_i(t)] =: \pi_i \leq \infty$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t[Q(s_1, \dots, \tau_k)] &= \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t[Q(s_1 F(s_2 F(\dots s_{k-1} F(s_k; \tau_k); \tau_{k-1}); \dots; \tau_1)] \\ &= \frac{1}{\tilde{\sigma}} y_{2k}(d_1, \pi_1, d_2, \pi_2, \dots, d_k, \pi_k), \end{aligned}$$

con la interpretación  $1/\infty = 0$ , es decir, si existe un último índice  $\tilde{k}$  tal que  $\pi_{\tilde{k}} = \infty$ , el límite anterior es igual a

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}} y_{2\tilde{k}-1}(d_1, \pi_1, d_2, \pi_2, \dots, \pi_{\tilde{k}-1}, d_{\tilde{k}}).$$

## 4 Lemas básicos

Sean  $t$  un punto de tiempo y  $d_i \in (0, \infty)$  constantes fijas para todo  $i = 1, \dots, k$ . Si  $\tau_i := d_i t$ , el lema de comparación 2.3 de Esty es útil para estudiar el comportamiento asintótico de  $F(s_1, \dots, \tau_k)$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Desafortunadamente hay dificultades si  $\tau_i := t + d_i$ . Para este último caso, debemos encontrar otro lema de comparación. Para ello, primero necesitamos el siguiente teorema.

**Teorema 4.1** Sean  $0 \leq s_i \leq 1$ , para todo  $i = 1, \dots, k$  y  $s := \prod_{i=1}^k s_i$ . Definamos la sucesión  $\{F_n(\dots)\}_{n \in \mathbf{N}_0}$  por  $F_0(s_1, \dots, \tau_k) = s$  y

$$\begin{aligned} F_{n+1}(s_1, \dots, \tau_k) &= s[1 - G(t_k)] + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^i s_j \int_{t_i}^{t_{i+1}} f[F_n^i(y)] dG(y). \end{aligned} \quad (3)$$

Siendo  $F_n(s_{i+1}, \dots, s_k; \tau_{i+1} - y, \dots, \tau_k) =: F_n^i(y)$ , para todo  $n \in \mathbf{N}_0$ . Si  $m \leq 1$ , entonces, para todo  $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s_1, \dots, \tau_k) = F(s_1, \dots, \tau_k)$$

uniformemente sobre conjuntos  $t_k$ -compactos de  $[0, \infty)$ .

*Demostración.* Primero demostraremos por inducción sobre  $n$ , que la sucesión  $\{F_n(\dots)\}_{n \in \mathbf{N}_0}$  es monotonamente creciente en  $n$ . El caso  $n = 0$  es trivial si se tiene en cuenta que  $s \leq f(s)$ , para todo  $s \in [0, 1]$ . Ahora, demostraremos el paso de inducción  $n \rightarrow n + 1$ . Por hipótesis de inducción, tenemos que  $F_{n+1}(\dots) \geq F_n(\dots)$  y debido a que  $m \leq 1$ , sigue que



$f_n(s)$  es monótonamente creciente en  $s$ . Por consiguiente,  $f[F_{n+1}(\cdots)] \geq f[F_n(\cdots)]$ . Sea  $F_n(s_{i+1}, \dots, s_k; \tau_{i+1} - y, \dots, \tau_k) =: F_n^i(y)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_{n+2}(\cdots) - F_{n+1}(\cdots) &= \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^i s_j \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f[F_{n+1}^i(y)] - f[F_n^i(y)]\} dG(y) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

O sea,  $F_n(\cdots) \leq F_{n+1}(\cdots)$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ahora demostraremos (nuevamente por inducción sobre  $n$ ), que  $0 \leq F_n(s_1, \dots, \tau_k) \leq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . El caso  $n = 0$  es claro. Ahora, demostraremos el paso de inducción  $n \rightarrow n+1$ . Debido a la monotonía de  $F_n(\cdots)$ , sigue el resultado para todo  $n$ , porque

$$\begin{aligned} 0 &\leq F_{n+1}(s_1, \dots, \tau_k) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\prod_{j=0}^i s_j}_{\leq 1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underbrace{f(1)}_{=1} dG(y) + \underbrace{s}_{\leq 1} [1 - G(t_k)] \leq 1. \end{aligned}$$

Ahora, demostraremos (también por inducción sobre  $n$ ), que

$$F_{n+1}(s_1, \dots, \tau_k) - F_n(s_1, \dots, \tau_k) \leq m^n G_n(t_k),$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . El caso  $n = 0$  es claro. El paso de inducción  $n \rightarrow n+1$  se demuestra con ayuda del teorema del valor medio y con ayuda de la hipótesis de inducción porque

$$\begin{aligned} F_{n+2}(s_1, \dots, \tau_k) - F_{n+1}(s_1, \dots, \tau_k) &\leq \\ &\leq m^{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} G_n(t_k - y) dG(y) \\ &= m^{n+1} \cdot G_{n+1}(t_k). \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} F_{n+r+1}(\cdots) - F_n(\cdots) &= \sum_{l=0}^r [F_{n+l+1}(\cdots) - F_{n+l}(\cdots)] \\ &\leq \sum_{l=0}^r m^{n+l} \cdot G_{n+l}(t_k) \\ &\leq \sum_{l=n}^{\infty} m^l \cdot G_l(t_k), \end{aligned} \tag{4}$$

para todo  $r \in \mathbb{N}_0$ . En Athreya [1, Lemma IV.4.1] está demostrado que  $\sum_{j=0}^{\infty} m^j G_j(t_k) < \infty$ . Por consiguiente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{\infty} m^j G_j(t_k) = 0$ . Con esto y con (1) tenemos que  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es una sucesión de Cauchy y converge a  $F$ . Debido a la monotonía de  $G_n(t_k)$  con respecto a  $n$ , la serie  $\sum_{j=0}^{\infty} m^j G_j(t_k)$  converge uniformemente en  $t_k \leq t < \infty$ . Por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s_1, \dots, \tau_k) = F(s_1, \dots, \tau_k)$  uniformemente en  $t \in [t_k, \infty]$ , para todo  $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ . ■

Con ayuda del siguiente lema podemos demostrar fácilmente otro lema de comparación.

**Lema 4.2** Sean  $m = 1$  y  $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$  y sea  $s := \prod_{i=1}^k s_i$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , tenemos

$$(a) \quad 0 \leq F(s_1, \dots, \tau_k) - F_n(s_1, \dots, \tau_k) \leq \sum_{i=1}^k (1 - s_i) \cdot G_n(t_i)$$

$$(b) \quad 0 \leq f_n(s) - F_n(s_1, \dots, \tau_k) \leq (1 - s) \sum_{i=1}^k [1 - G_n(t_i)],$$

donde  $F_n(s_1, \dots, \tau_k)$  está definida en el teorema 4.1.

*Demostración.* Sea

$$F_n(s_1, \dots, s_k; \tau_{i+1} - y, \dots, \tau_k) := F_n(\tau_{i+1} - y),$$

para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ . Análogo la notación para  $F(\dots)$ .

- (a) (i) Primero demostraremos la desigualdad izquierda por inducción sobre  $n$ . El caso  $n = 0$  es claro si se tiene en cuenta que  $\{F_n(\dots)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  es monotonamente creciente, el teorema 4.1 y que  $\prod_{j=i+1}^k s_j \leq f(\prod_{j=i+1}^k s_j) \leq f[F(s_{i+1}, \dots, \tau_k)]$  para todo  $k$ . El paso de inducción  $n \rightarrow n + 1$  es claro por hipótesis de inducción porque

$$F(\dots) - F_{n+1}(\dots) = \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^i s_j \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underbrace{\{H_n^i(y)\}}_{\geq 0} dG(y),$$

$$\text{siendo } H_n^i(y) := f[F(\tau_{i+1} - y)] - f[F_n(\tau_{i+1} - y)].$$

(ii) Ahora demostraremos el lado derecho de la desigualdad (de nuevo con inducción sobre  $n$ ). Debido a que  $G(t_0) = 0$  y a que

$$\begin{aligned}
 F(\cdots) - F_0(\cdots) &= \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\prod_{j=0}^i s_j}_{\leq 1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \underbrace{f[F(\tau_{i+1} - y)]}_{\leq 1} - \prod_{j=i+1}^k s_j \right\} dG(y) \\
 &= G(t_k) - \sum_{i=1}^k \prod_{j=i}^k s_j \cdot G(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i+1}^k s_j \cdot G(t_i) \\
 &\leq \sum_{i=1}^k (1 - s_i) \cdot G_1(t_i), \text{ porque } G_1(t_1) = G(t_1),
 \end{aligned}$$

el caso  $n = 0$  está demostrado. Ahora demostraremos el paso de inducción  $n \rightarrow n + 1$ . Por el teorema del valor medio, hipótesis de inducción y el hecho de que el preproceso es crítico, se obtiene el resultado para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , porque

$$\begin{aligned}
 F(\cdots) - F_{n+1}(\cdots) &\leq \\
 &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\prod_{j=0}^i s_j}_{\leq 1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{F(\tau_{i+1} - y) - F_n(\tau_{i+1} - y)\} dG(y), \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} (1 - s_j) \cdot G_n(t_j - y) dG(y) \\
 &= \sum_{j=1}^k (1 - s_j) G_{n+1}(t_j).
 \end{aligned}$$

- (b) (i) Primero demostraremos la desigualdad izquierda con inducción sobre  $n$ . Ya que  $f_0(s) - F_0(s_1, \dots, \tau_k) = 0$ , entonces, el caso  $n = 0$  es claro. Ahora demostraremos el paso de inducción  $n \rightarrow n + 1$ . Sea  $\tilde{s}_{i+1} := \prod_{j=i+1}^k s_j$ . De la figura 1 obtenemos, con  $u := s$  y  $v := \tilde{s}_{i+1}$ , que  $\frac{f(\tilde{s}_{i+1})}{\tilde{s}_{i+1}} = \frac{x}{s} \leq \frac{f(s)}{s}$ , es decir,  $f(\tilde{s}_{i+1}) \leq \frac{f(s)}{s_1 \cdots s_i}$ .

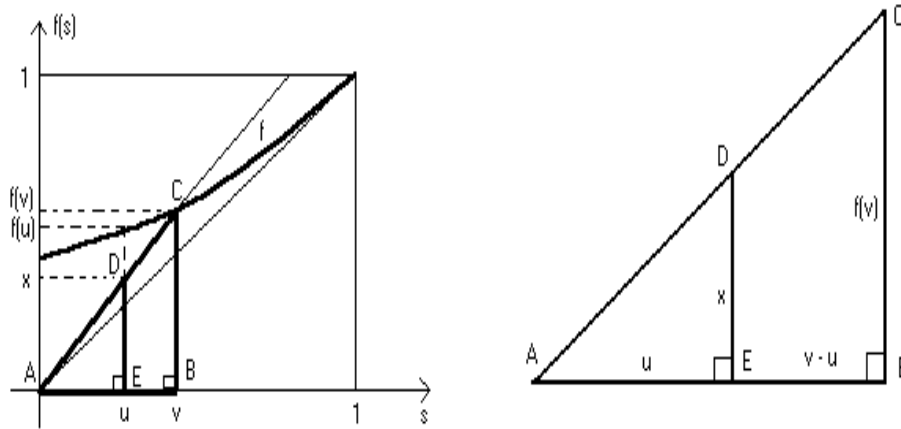


Figura 1: Relaciones en el caso (sub-)crítico.

Con esto, con la hipótesis de inducción y el hecho de que  $f$  es monotonamente creciente, se tiene el resultado para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , porque, haciendo  $\tilde{G}(t_i) := G(t_{i+1}) - G(t_i)$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(s) - F_{n+1}(\cdots) &= \\
 &= [f_{n+1}(s) - s][1 - G(t_k)] + \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{[f_{n+1}(s) - s_0 \cdots s_i f_{n+1}(\tilde{s}_{i+1})]}_{\geq 0} \cdot \tilde{G}(t_i) \geq 0.
 \end{aligned}$$

(ii) Ahora, demostraremos el lado derecho de la desigualdad (también con inducción sobre  $n$ ). El caso  $n = 0$  es claro porque

$$f_0(s) - F_0(s_1, \dots, \tau_k) = 0 \leq (1-s) \sum_{i=1}^k [1 - \underbrace{G_0(t_i)}_{=0}].$$

Ahora probaremos el paso de inducción  $n \rightarrow n + 1$ . Sea  $\tilde{s}_{i+1}$  como antes. Sea  $\tilde{s}_{i+1} := \prod_{j=i+1}^k s_j$ . Por el teorema del valor medio e hipótesis de inducción sigue el el resultado para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , porque

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(s) - F_{n+1}(s_1, \dots, \tau_k) &\leq \\
 &\leq f_{n+1}(\tilde{s}_{i+1}) - F_{n+1}(s_1, \dots, \tau_k) \\
 &\leq f_{n+1}(\tilde{s}_{i+1}) - s[1 - G(t_k)] + \\
 &\quad + \underbrace{m}_{=1} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f_n(\tilde{s}_{i+1}) - F_n(\dots)\} dG(y) - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^i s_j \underbrace{f_{n+1}(\tilde{s}_{i+1})}_{\geq \tilde{s}_{i+1}} \cdot [G(t_{i+1}) - G(t_i)] - \\
 &\quad - f_{n+1}(\tilde{s}_{i+1}) \cdot [G(t_1) - \underbrace{G(t_0)}_{=0}] \\
 &\leq (1-s) \sum_{r=1}^k [1 - G_{n+1}(t_r)].
 \end{aligned}$$

Con esto, el teorema queda completamente demostrado.  $\blacksquare$

**Lema 4.3 (Lema de comparación)** Sean  $m = 1$ ,  $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ ,  $s := \prod_{i=1}^k s_i$  y  $b := k(1-s)$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , tenemos

$$Q_n(s) - bG_n(t_k) \leq Q(s_1, \dots, \tau_k) \leq Q_n(s) + b[1 - G_n(t_1)].$$

*Demostración.* Primero restamos la desigualdad del lema 4.2a de la de 4.2b y luego utilizamos el hecho de que  $s \leq s_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k$  y  $G$  es monotonamente creciente en  $t$ .  $\blacksquare$

Desafortunadamente, el lema de comparación 2.3 de Esty es sólo útil si  $\tau_i := d_i t$ . Si  $\tau_i := t \pm d_i$  tenemos dificultades para encontrar el comportamiento asintótico de  $F(s_1, \dots, \tau_k)$ . Por consiguiente, debemos encontrar otro método. Para ellos, fue muy importante la aplicación del lema de comparación 4.3 en vez del lema 2.3. Esto fue una buena alternativa ya que hemos demostrado un lema que es la base para encontrar teoremas límites si  $\tau_i := t \pm d_i$ .

**Lema 4.4** Sean  $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k < \infty$  números reales fijos y  $t_0 := 0$ ,  $t_i := t + b_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ . Si las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen, entonces, tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{\sigma}(1-s)t + 1] \left[ \frac{Q(s_1, \dots, s_k; \tau_1, \dots, \tau_k)}{1-s} \right] = 1$$

uniformemente en  $0 \leq s_i \leq 1$  con  $s := \prod_{i=1}^k s_i < 1$ . El resultado anterior sigue también si  $t_i := t - b_i$  para  $0 < b_k < \dots < b_2 < b_1$ .

*Demostración.* Sea

$$H_t(s_1, \dots, \tau_k) := [\tilde{\sigma}(1-s)t + 1] \left[ \frac{Q(s_1, \dots, \tau_k)}{1-s} \right].$$

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $n := \left\lceil \frac{t_k}{\mu}(1+\varepsilon) \right\rceil$ . Por el lado izquierdo de la desigualdad del lema 4.3, obtenemos

$$\begin{aligned} H_t(s_1, \dots, \tau_k) &\geq \\ &\geq [\hat{\sigma}(1-s)n + 1] \left[ \frac{Q_n(s)}{1-s} \right] - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \hat{\sigma} n Q_n(0) \pm \\ &\quad \pm a Q_n(s) - k \left[ \tilde{\sigma} \pm \frac{b}{t_k} \right] t_k G_n(t_k) \\ &=: A_{n,\varepsilon}(s_1, \dots, \tau_k). \end{aligned}$$

Harris [5] ha demostrado que  $f_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , para todo  $s \in [0, 1]$ . Por el teorema 1.1 de Goldstein [4], el corolario 1.2 (también de Goldstein [4]) y el lema 3.3a, obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_{n,\varepsilon}(s_1, \dots, \tau_k) = 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

uniformemente en  $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ , con  $s < 1$ . Ya que  $\varepsilon > 0$  fue escogido arbitrariamente,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} H_t(s_1, \dots, \tau_k) \geq 1,$$

uniformemente en  $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ , con  $s < 1$ . Ahora demostraremos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} H_t(s_1, \dots, \tau_k) \leq 1,$$

uniformemente en  $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ , con  $s < 1$ . Para ello, sean nuevamente  $\varepsilon > 0$  y ahora  $n := \left\lceil \frac{t_1}{\mu}(1+\varepsilon) \right\rceil$ . Por el lado derecho de la desigualdad del lema 4.3, obtenemos análogamente

$$H_t(s_1, \dots, \tau_k) \leq B_{n,\varepsilon}(s_1, \dots, \tau_k),$$

donde

$$\begin{aligned} B_{n,\varepsilon}(s_1, \dots, \tau_k) &:= \\ &:= [\hat{\sigma}(1-s)n + 1] \left[ \frac{Q_n(s)}{1-s} \right] + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \hat{\sigma} n Q_n(0) + \\ &\quad + \frac{\tilde{\sigma}}{1-\varepsilon} Q_n(s) + k \left[ \tilde{\sigma} \pm \frac{\tilde{\sigma} b_1 + 1}{t_1} \right] t_1 [1 - G_n(t_1)]. \end{aligned}$$

Nuevamente, por el teorema 1.1 de Goldstein [4], el corolario 1.2 (también de Goldstein [4]) y el lema 3.3b, obtenemos

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} B_{n,\varepsilon}(s_1, \dots, \tau_k) = 1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

uniformemente en  $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ , con  $s < 1$ . Ya que  $\varepsilon > 0$  fue escogido arbitrariamente, con esto queda completamente demostrado el teorema. ■

## 5 Teoremas límites

### Procesos bajo la condición “no extinción”

Observamos  $k$  generaciones antes y después de la generación en el punto de tiempo  $t$ . En este caso, estudiamos como antes el comportamiento asintótico de la f.g.p. conjunta de estas  $k$  generaciones, cuando la generación en el punto de tiempo  $t$  no se ha extinguido aún. Primero observaremos la situación “ $t_i := b_i t$ ” con constantes fijas  $b_i$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

**Teorema 5.1** *Si las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen, entonces, las correspondientes distribuciones  $k$ -dimensionales de los procesos*

$$\left\{ \frac{Z(b_1 t)}{\tilde{\sigma} t}, \dots, \frac{Z(b_k t)}{\tilde{\sigma} t} \mid Z(t) > 0, \ 0 < b_1 < \dots < b_k \leq 1 \right\}$$

y

$$\left\{ \frac{Z(b_1 t)}{\tilde{\sigma} t}, \dots, \frac{Z(b_k t)}{\tilde{\sigma} t} \mid Z(t) > 0, \ 1 < b_1 < \dots < b_k < \infty \right\},$$

convergen, para  $t \rightarrow \infty$ , hacia la de unos procesos con exactamente las mismas propiedades como en los teoremas 3.1 de y 3.3 de Hurtado & Llinás [8], respectivamente.

*Demostración.* Completamente analogo a las demostraciones de los teoremas en las referencias mencionadas. Véase también Llinás [6]. En estos casos, aplicamos el lema 3.4. ■

Si consideramos los correspondientes casos uni y bidimensionales del teorema anterior, obtenemos resultados análogos como en el proceso Galton-Watson.

**Corolario 5.2** *Si las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen, entonces, las correspondientes distribuciones de*

$$\left\{ \frac{Z(bt)}{\tilde{\sigma} t}, \frac{Z(t)}{\tilde{\sigma} t} \mid Z(t) > 0 \right\} \quad y \quad \left\{ \frac{Z(bt)}{\tilde{\sigma} t} \mid Z(t) > 0 \right\}$$

con  $b \in (0, 1]$  y  $b \in (1, \infty)$ , respectivamente, convergen, cuando  $t \rightarrow \infty$ , hacia un procesos exactamente con las mismas propiedades como en los corolarios 3.2 y 3.4 de Hurtado & Llinás [8], respectivamente.

*Demostración.* Completamente análogo a las demostraciones de los corolarios en las referencias mencionadas. Véase también Llinás [6]. En estos casos, aplicamos el lema 3.4. ■

Ahora, consideraremos la situación  $t_i := t \pm b_i$  con constantes fijas  $b_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .

**Teorema 5.3** Sean  $0 < b_k < \dots < b_2 < b_1 < \infty$  números reales cualesquiera y  $\tilde{Z}_i(t) := \frac{Z(t-b_i)}{\sigma t}$  con  $i = 1, \dots, k$ . Si las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen, entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \tilde{Z}_1(t) \leq x_1, \dots, \tilde{Z}_k(t) \leq x_k / Z(t) > 0, \right\} = 1 - e^{-\min\{x_1, \dots, x_k\}},$$

para todo  $x_1, \dots, x_k \geq 0$ . El resultado anterior no cambia si consideramos los puntos de tiempos “ $t + b_i$ ”, para todo  $i = 1, \dots, k$  pero con  $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k < \infty$ . Esto significa que la distribución límite está concentrada sobre la “diagonal”  $\{(x_1, \dots, x_k) / x_i \in \mathbb{R}\}$  y allí está distribuida exponencialmente, es decir, que, asintóticamente, el proceso (bajo la condición de que él no se ha extinguido aún en el tiempo  $t$ ) se distribuye de la misma manera en los tiempos  $t \pm b_1, \dots, t \pm b_k$  para todo  $b_i$ , es decir, entre  $t - b_i$  y  $t + b_i$  no cambia mucho.

*Demostración.* Demostraremos el teorema sólo para el caso “ $t - b_i$ ”, porque, para el caso “ $t + b_i$ ” la demostración es análoga. Sea  $\tau_{k+1} = b_k$  y, para todo  $i = 1, \dots, k$ , sean  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  con  $t_i := t - b_i$ . Además, sea  $A_k := \{Z(t_1) = j_1, \dots, Z(t_k) = j_k\}$ . Por tanto,

$$P\{A_k / Z(t) > 0\} = \frac{P\{A_k\} - P\{A_k, Z(t) = 0\}}{P\{Z(t) > 0\}}.$$

Sea  $s_i := e^{-\frac{\lambda_i}{\sigma t}}$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ , y  $s_{k+1} = 0$ . Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ . La correspondiente transformada de Laplace del proceso está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t(\lambda_1, \dots, \lambda_k) &:= \\ &:= E \left\{ e^{-\frac{1}{\sigma t}[\lambda_1 Z(t_1) + \dots + \lambda_k Z(t_k)]} / Z(t) > 0 \right\} \\ &= \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} P\{A_k / Z(t) > 0\} e^{-\frac{1}{\sigma t}[\lambda_1 j_1 + \dots + \lambda_k j_k]} \\ &= \frac{Q(s_1, \dots, s_k, 0; \tau_1, \dots, \tau_{k+1})}{Q(t)} - \frac{Q(s_1, \dots, \tau_k)}{Q(t)}. \end{aligned}$$



Ahora demostraremos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Q(s_1, \dots, s_k, 0; \tau_1, \dots, \tau_{k+1})}{Q(t)} = 1$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Q(s_1, \dots, \tau_k)}{Q(t)} = \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

donde  $\lambda := \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ . Por el lema 4.4 tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{[\tilde{\sigma}t + 1]Q(s_1, \dots, s_k, 0; \tau_1, \dots, \tau_{k+1})\} = 1$$

uniformemente en  $s_1, \dots, s_k$ . Con esto, por el corolario 3.2 y ya que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t_i} = 1$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{Q(s_1, \dots, s_k, 0; \tau_1, \dots, \tau_{k+1})}{Q(t_k)} &= \\ &= \frac{[\tilde{\sigma}t + 1]Q(s_1, \dots, s_k, 0; \tau_1, \dots, \tau_{k+1})}{\frac{t}{t_k} \cdot \tilde{\sigma}t_k Q(t_k) + Q(t_k)} \end{aligned}$$

converge hacia 1, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Con esto, hemos demostrado la primera afirmación. Para la demostración de la segunda, sea  $s := \prod_{i=1}^k s_i = e^{-\lambda/\tilde{\sigma}t}$ . Debido a que  $(1 - s) \sim \frac{\lambda}{\tilde{\sigma}t}$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , tenemos

$$\frac{Q(s_1, \dots, \tau_k)}{Q(t_k)} \sim \frac{[\tilde{\sigma}(1 - s)t + 1] \left[ \frac{Q(s_1, \dots, \tau_k)}{1 - s} \right]}{\left[ 1 + \frac{1}{\lambda} \right] \cdot \frac{t}{t_k} \cdot \tilde{\sigma}t_k Q(t_k)},$$

para  $t$  grande. Debido a que  $t \sim t_i$ , cuando  $t \rightarrow \infty$  y todo  $i = 1, \dots, k$ , al lema 4.4 y al corolario 3.2, obtenemos la segunda afirmación. En conclusión, hemos demostrado que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}_t(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \frac{1}{1 + \lambda}$ , para cualesquiera  $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ . El teorema queda completamente demostrado cuando aplicamos el teorema de continuidad para transformadas de Laplace (véase Feller [3]). ■

Si consideramos el caso unidimensional, obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 5.4** *Si las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen, entonces, el proceso  $\left\{ \frac{Z(t \pm b)}{\tilde{\sigma}t} / Z(t) > 0, b \in (0, \infty) \right\}$  converge en distribución, cuando  $t \rightarrow \infty$ , hacia una variable aleatoria que tiene distribución exponencial con parámetro 1.*

Como interpretación del corolario anterior podemos decir que, asintóticamente, el proceso (bajo la condición de que él no se ha extinguido aún en el tiempo  $t$ ) se distribuye de la misma manera en los tiempos  $t \pm b$  para todo  $b$ , es decir, entre  $t - b$  y  $t + b$  no cambia mucho.

### Procesos bajo la condición “extinción en el futuro cercano”

En esta situación observamos  $k$  generaciones antes resp. después de la generación en el punto de tiempo  $t$ . En este caso, estudiamos como antes el comportamiento asintótico de la distribución conjunta de estas  $k$  generaciones cuando la generación en el punto de tiempo  $t$  no se ha extinguido aún, pero la generación en el punto de tiempo  $ct$ ,  $c > 1$ , sí se ha extinguido.

**Teorema 5.5** *Si las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen, entonces, la correspondiente distribución  $k$ -dimensional del proceso*

$$\left\{ \frac{Z(b_1 t)}{\tilde{\sigma} t}, \dots, \frac{Z(b_k t)}{\tilde{\sigma} t} / Z(t) > 0, Z(ct) = 0, \right\},$$

con

$$0 < b_1 < \dots < b_k \leq 1 < c < \infty$$

y

$$1 \leq b_1 < \dots < b_k < c < \infty$$

respectivamente, converge, cuando  $t \rightarrow \infty$ , hacia la de un proceso con exactamente las mismas propiedades como en los teoremas 3.5 y 3.7 de Hurtado & Llinás [8], respectivamente.

*Demostración.* Completamente análogo a las demostraciones de los teoremas en las referencias mencionadas. Véase también Llinás [6]. En estos casos aplicamos el lema 3.4. ■

Los correspondientes casos uni y bidimensionales del teorema anterior conducen a resultados análogos como en el proceso de Galton-Watson.

**Corolario 5.6** *Si las condiciones  $BH(1, \sigma^2, \mu, 0)$  se satisfacen, entonces, las correspondientes distribuciones de*

$$(a) \left\{ \frac{Z(bt)}{\tilde{\sigma} t} / Z(t) > 0, Z(ct) = 0 \right\}, \quad 0 < b < 1 < c < \infty,$$

$$(b) \left\{ \frac{Z(bt)}{\tilde{\sigma} t}, \frac{Z(t)}{\tilde{\sigma} t} / Z(t) > 0, Z(ct) = 0 \right\}, \quad 1 < b < c < \infty,$$

convergen, cuando  $t \rightarrow \infty$ , hacia las de un proceso con exactamente las mismas propiedades como en los corolarios 3.6 y 3.8 de Hurtado & Llinás [8], respectivamente.

*Demostración.* Completamente análogo a las demostraciones de los corolarios en las referencias mencionadas. Véase también Llinás [6]. En estos casos aplicamos el lema 3.4. ■

## Referencias

- [1] Athreya, K.; Ney, P. (1972) *Branching Processes*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [2] Esty, W. (1975) “Critical age-dependent branching processes”, *The Annals of Probability*: 49–60.
- [3] Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol.2*. Wiley, New York
- [4] Goldstein, M.(1971) “Critical age-dependent branching processes: single and multitype”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **17**: 74–88.
- [5] Harris, T. (1964) *Theory of Branching Processes*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [6] Llinás, H. (2002) *Grenzwertsätze bei Kritischen Verzweigungsprozessen*. Tesis doctoral, Universidad de Mainz, Alemania.
- [7] Llinás, H.; Zapata, H. (2006) “Proceso crítico de Galton-Watson con segundos momentos infinitos”, *Matemáticas: Enseñanza Universitaria (ERM)* **14**(2): 41–63.
- [8] Hurtado, J.; Llinás, H. (2007) “Teoremas límites en procesos de Galton-Watson con varianza finita”, *Matemáticas: Enseñanza Universitaria (ERM)* **15**(2): 65–79.