



Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones

ISSN: 1409-2433

mta.cimpa@ucr.ac.cr

Universidad de Costa Rica

Costa Rica

ACUÑA ORTEGA, OSVALDO

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE UN TEOREMA DE BENABOU DE BOOLEANIDAD DE UN
TOPOS ELEMENTAL

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, vol. 15, núm. 2, julio-diciembre, 2008, pp. 101-107

Universidad de Costa Rica

San José, Costa Rica

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=45326936001>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE UN TEOREMA DE BENABOU DE BOOLEANIDAD DE UN TOPOS ELEMENTAL

OSVALDO ACUÑA ORTEGA*

Recibido/Received: 16 May 2008 — Aceptado/Accepted: 11 Jul 2008

Resumen

En este trabajo probamos que en un topos elemental, todo objeto A tal que $A + A$ tiene una función de elección interna, entonces todo subobjeto de A tiene complemento. También consideramos un concepto débil de función de elección y probamos que cualquier objeto K –finito decidible posee una función de elección de este tipo internamente.

Palabras clave: Teoría de topos, finitud, axioma de elección.

Abstract

We prove that any elementary topos any object A such that $A + A$ has an internal choice map, then every subobject of A has complement. We also consider a weaker concept of choice map and we prove that any K –finite decidable object has this kind of choice map (internally).

Keywords: Topoi, finiteness, choice.

Mathematics Subject Classification: 18B25.

1 Introducción

Jean Benabou probó en [2] que en un topos elemental es booleano si y solo si el objeto $1 + 1$ tiene una función de elección (interna). En esta nota probaremos que si A es un objeto de un topos elemental (o simplemente un topos) entonces todo subobjeto de A tiene complemento si $A + A$ tiene una función de elección interna. También introduciremos una versión más débil del concepto de función de elección y probaremos que todo objeto K –finito decidible tiene una función de elección (interna) de este tipo, en particular $1 + 1$ tiene una función de elección de esta clase internamente.

*CIMPA, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

2 Desarrollo

Definición 2.1. (a) Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en un topos \mathbf{E} , denotamos por $\pi(f)$ al objeto de \mathbf{E} definido por

$$\pi(f) = \{g \in X^Y / f \circ g = id_Y\} \subseteq X^Y$$

(b) Si X es un objeto de \mathbf{E} , sean

$$\mathcal{E}_X = \{(X', x) / X' \subseteq X \wedge x \in X'\},$$

$pr_1 : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ y $pr_2 : \mathcal{E}_X \rightarrow P(X)$ son las dos proyecciones y $\mathcal{P}(X) = \Omega^X$ es el “conjunto de partes de X ”. La imagen de pr_1 es el objeto

$$\mathcal{P}^+(X) = \{X' \subseteq X / \exists_{x \in X} x \in X'\}$$

(c) Una función de elección para X es un morfismo $f : \mathcal{P}^+(X) \rightarrow X$ tal que

$$\models \forall_{X' \in \mathcal{P}^+(X)} f(X') \in X'.$$

(d) Sea X un objeto de \mathbf{E} , decimos que X es un objeto de elección (interno) si

$$\models \exists_{f \in X} \mathcal{P}^+(X) \forall_{X' \in \mathcal{P}^+(X)} f(X') \in X'$$

lo que es equivalente a afirmar que $C(X) \rightarrow 1$ es un epimorfismo, donde

$$C(X) = \left\{ f \in X^{\mathcal{P}^+(X)} / f \text{ es una función de elección} \right\}$$

Nota. Si $pr_1 : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{P}^+(X)$ es tal que $pr_1(X', x) = X'$, entonces X es un objeto de elección (interno) si y solo si $\pi(pr_1) \rightarrow 1$ es un epimorfismo.

Definición 2.2. Sea $j : A' \rightarrow A$ un monomorfismo en un topos \mathbf{E} si

$A \xrightarrow{i_1} A + A \xleftarrow{i_2} A$ es un diagrama coproducto. Sean

$$R^* = \cap \{R \subseteq (A + A) \times (A + A) / R \text{ es una relación de equivalencia} \wedge$$

$$\{(i_1(j(a)), i_2(j(a))) / a \in A'\} \subseteq R\}$$

$$B = (A + A) / R^*, \quad r : A + A \rightarrow B \text{ el morfismo cociente, } j_1 = r \circ i_1, j_2 = r \circ i_2$$

Observación. R^* es una relación de equivalencia en $A + A$ y r es un epimorfismo.

Lema 2.1. Sea $j : A' \rightarrow A$ un monomorfismo en un topos \mathbf{E} , con las notaciones de la definición 2.2, se tiene que

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{j} & A \\ j \downarrow & & \downarrow j_2 \\ A & \xrightarrow{j_1} & B \end{array} \quad (1)$$

es un coproducto fibrado.

PRUEBA. Como $r \circ i_1 \circ j = r \circ i_2 \circ j$ entonces $j_1 \circ j = j_2 \circ j$ y así el diagrama (1) conmuta. Suponga se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{j} & A \\ j \downarrow & & \downarrow g_1 \\ A & \xrightarrow{g_2} & C \end{array} \quad (2)$$

Sea $g : A + A \rightarrow C$ tal que $g \circ i_1 = g_1$, $g \circ i_2 = g_2$ y R_g la relación definida en $A + A$ por:

$$\models (c, c') \in R_g \iff g(c) = g(c').$$

Como $g_1 \circ j = g_2 \circ j$ se tiene $g \circ i_1 \circ j = g \circ i_2 \circ j$ y entonces

$$\begin{aligned} \models a \in A' &\Rightarrow g(i_1(j(a))) = g(i_2(j(a))) \\ &\Rightarrow (i_1(j(a)), i_2(j(a))) \in R_g \end{aligned}$$

Entonces $\models \{(i_1(j(a)), i_2(j(a))) / a \in A'\} \subseteq R_g$, por lo tanto $R^* \subseteq R_g$.

Sea $k : B \rightarrow C$ tal que $\models k([s]) = g(s)$ donde $[s]$ es la clase de equivalencia de s respecto a R^* , $s \in A + A$.

Debemos probar que k está bien definida:

$$\begin{aligned} \models [s] = [s'] &\Rightarrow (s, s') \in R^* \\ &\Rightarrow (s, s') \in R_g \\ &\Rightarrow g(s) = g(s') \end{aligned}$$

Probemos ahora que k es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{j} & A & & \\ j \downarrow & & \downarrow j_2 & \searrow g_2 & \\ A & \xrightarrow{j_1} & B & \xrightarrow{k} & C \\ & \searrow g_1 & \dots & \nearrow k & \\ & & & & \end{array}$$

Por definición de k tenemos que $k \circ r = g$ y entonces

$$k \circ j_1 = k \circ r \circ i_1 = g \circ i_1 = g_1, \text{ luego } k \circ j_1 = g_1 \text{ y}$$

$$k \circ j_2 = k \circ r \circ i_2 = g \circ i_2 = g_2, \text{ así se tiene que } k \circ j_2 = g_2$$

Suponga que existe otro morfismo $k' : B \rightarrow C$ tal que $k' \circ j_1 = g_1$ y $k' \circ j_2 = g_2$, entonces $k' \circ r \circ i_1 = g_1$ y $k' \circ r \circ i_2 = g_2$. Pero sabemos que $g : A + A \rightarrow C$ es único tal que $g \circ i_1 = g_1$, $g \circ i_2 = g_2$, por lo tanto $g = k' \circ r$; también tenemos que $g = k \circ r$ y entonces $k' \circ r = k \circ r$ y como r es un epimorfismo, se debe tener que $k' = k$. ■

El siguiente lema es un resultado de Jean Benabou [2]:

Lema 2.2. Si

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{j} & A \\ j \downarrow & & \downarrow j_2 \\ A & \xrightarrow{j_1} & B \end{array} \quad (3)$$

es un coproducto fibrado en un topos \mathbf{E} , $A' \xrightarrow{j} A$ es un monomorfismo y $r : A + A \rightarrow B$ es tal que $r \circ i_1 = j_1$, $r \circ i_2 = j_2$ donde $A \xrightarrow{i_1} A + A \xleftarrow{i_2} A$ es un coproducto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) A' es complementado en A .
- (ii) existe $r' : B \rightarrow A + A$ tal que $r \circ r' = id_B$.
- (iii) existe un morfismo $1 \rightarrow \pi(r)$.
- (iv) $\pi(r) \rightarrow 1$ es un epimorfismo.

Teorema 2.1. Sea A un objeto de un topos \mathbf{E} . Si $A + A$ es un objeto de elección interno, entonces todo $A' \rightarrowtail A$ subobjeto de A tiene complemento.

PRUEBA. Sea $r : A + A \rightarrow B$ como arriba, para probar que A' tiene complemento es suficiente observar que la siguiente fórmula

$$\exists_{h \in B^{A+A}} r \circ h = id_B$$

es válida en \mathbf{E} , ya que esto es equivalente a decir que $\pi(r) \rightarrow 1$ es un epimorfismo y por el lema 2.2 tendríamos que A' sería complementado en A .

Como $A + A$ es un objeto de elección interno entonces existe un morfismo de elección interno $g : \mathcal{P}^+(A + A) \rightarrow A + A$. Como $B \subseteq \mathcal{P}^+(A + A)$, por el lema 2.1, sea $h = g|_B : B \rightarrow A + A$. Entonces se tiene que $p \circ h = id_B$ internamente, es decir, la fórmula

$$\exists_{h \in B^{A+A}} r \circ h = id_B$$

es válida en \mathbf{E} . Entonces A' es complementado en A . ■

Definición 2.3. Un topos \mathbf{E} es booleano si todo $A' \rightarrowtail A$ subobjeto de cualquier objeto A de \mathbf{E} tiene complemento.

Corolario 2.1. Si todo objeto de un topos \mathbf{E} tiene una función de elección interna, entonces el topos \mathbf{E} es booleano.

Corolario 2.2. Sea \mathbf{E} un topos tal que para todo epimorfismo $f : X \rightarrow Y$, existe un morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = id_Y$. Entonces todo objeto de \mathbf{E} tiene una función de elección, en particular \mathbf{E} es booleano.

PRUEBA. Sea X objeto de \mathbf{E} , $pr_1 : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{P}^+(X)$ es un epimorfismo, luego existe $h : \mathcal{P}^+(X) \rightarrow \mathcal{E}_X$ tal que $pr_1 \circ h = id_{\mathcal{P}^+(X)}$, entonces $g = pr_2 \circ h : \mathcal{P}^+(X) \rightarrow X$ es un morfismo de elección:

$$\begin{aligned} \models X' \in \mathcal{P}^+(X) &\Rightarrow h(X') \in \mathcal{E}_X \\ &\Rightarrow (X', g(X')) \in \mathcal{E}_X \quad (pr_1 \circ h = id_{\mathcal{P}^+(X)} \wedge pr_2 \circ h = g) \\ &\Rightarrow g(X') \in X' \end{aligned}$$

entonces

$$\models \forall_{X' \in \mathcal{P}^+(X)} g(X') \in X'. \blacksquare$$

Las hipótesis del corolario 2.2 junto con la consecuencia de que \mathbf{E} es booleano, es un resultado de R. Diaconescu [3].

Definición 2.4. Sea \mathbf{E} un topos y X un objeto de \mathbf{E} . Denote por $K(X)$ el subobjeto más pequeño de Ω^X , que es cerrado bajo uniones binarias y que contiene $\lceil \phi \rceil : 1 \rightarrow \Omega^X$, $\{\cdot\}_X : X \rightarrow \Omega^X$. $K(X)$ es llamado el objeto de los subobjetos K -finitos de X . Decimos que X es K -finito si $\lceil X \rceil : 1 \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de $K(X) \rightarrow \Omega^X$. $K^+(X)$ es el subconjunto más pequeño de Ω^X cerrado bajo las uniones binarias y que contiene a $\{\cdot\}_X : X \rightarrow \Omega^X$.

Nota: $K^+(X) \subseteq K(X) \xleftarrow{\phi} 1$ es un diagrama coproducto ([1], p.206. Lema 1.5).

Definición 2.5. (a) Sea X un objeto en un topos \mathbf{E} , $f : K^+(X) \rightarrow X$ es una función de elección finita si

$$\models \forall_{X' \in K^+(X)} f(X') \in X'$$

(b) decimos que X es decidible si la diagonal $\Delta : X \rightarrow X \times X$ tiene complemento en $X \times X$.

Proposición 2.1. Sea X un objeto decidible de un topos \mathbf{E} . Si $X', X'' \subseteq X$ y $f : K^+(X') \rightarrow X'$, $g : K^+(X'') \rightarrow X''$ son funciones de elección finitas y $C(f, g) : K^+(X' \cup X'') \rightarrow X' \cup X''$ es tal que

$$C(f, g)(Z) = \begin{cases} g(Z \cap X''), & \text{si } Z \cap X' = \lceil \phi \rceil; \\ f(Z \cap X'), & \text{si } Z \cap X' \in K^+(X'). \end{cases}$$

Entonces $C(f, g)$ es una función de elección finita.

PRUEBA. Probemos primero que $C(f, g)$ es una función. Como X es decidible tenemos que $K(X) \subseteq 2^X$ y $K(X)$ es un ideal del álgebra booleana 2^X . (Lema 6.1 de [1]); por lo tanto $X' \cap Z \in K(X')$ y $X'' \cap Z \in K(X'')$. Por otro lado sabemos que

$$\models \forall_{O \in K(X)} (O \in K^+(X) \vee O = \lceil \phi \rceil)$$

Entonces $K^+(X' \cup X'')$ es la unión disjunta de

$$\begin{aligned} A &= \{Z \in K^+(X' \cup X'') / Z \cap X' = \lceil \phi \rceil\} \text{ y} \\ B &= \{Z \in K^+(X' \cup X'') / Z \cap X' \in K^+(X')\}, \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \models Z \in A &\Rightarrow Z \cap X' = \ulcorner \phi \urcorner \\ &\Rightarrow Z \cap X'' \neq \ulcorner \phi \urcorner \\ &\Rightarrow Z \cap X'' \in K^+(X'') \end{aligned}$$

Por lo tanto $C(f, g)$ es una función ya que

$$C(f, g)|_A(Z) = g(Z \cap X'') \text{ y}$$

$$C(f, g)|_B(Z) = f(Z \cap X')$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} \models Z \in K^+(X' \cup X'') &\Rightarrow Z \cap X'' \in K^+(X'') \vee Z \cap X' \in K^+(X') \\ &\Rightarrow C(f, g)(Z) = g(Z \cap X'') \vee C(f, g)(Z) = f(Z \cap X') \\ &\Rightarrow C(f, g)(Z) \in Z \cap X'' \vee C(f, g)(Z) \in Z \cap X' \\ &\Rightarrow C(f, g)(Z) \in Z. \end{aligned}$$

Entonces $C(f, g)$ es una función de elección finita. ■

Definición 2.6. Sea X un objeto de un topos \mathbf{E} . Denote por $S(X)$ el subobjeto de Ω^X dado por

$$\left\{ X' \in \Omega^X / \exists_{f \in \Omega^{\Omega^X \times X}} (f : K^+(X') \rightarrow X' \text{ es una función de elección finita}) \right\}$$

Teorema 2.2. Sea \mathbf{E} un topos, X objeto de \mathbf{E} . Si X es decidable entonces $K(X) \subseteq S(X)$.

PRUEBA. Es suficiente demostrar que $\{\cdot\}_X : X \rightarrow \Omega^X$, $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^X$ se factorizan a través de $K(X)$ y que $S(X)$ es cerrado bajo uniones binarias.

(i) $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de $S(X)$ ya que $K^+(\phi) = \phi$ y

$$[|X' \subseteq \phi \wedge X' \in K^+(\phi)|] = \phi.$$

Por lo tanto la fórmula $X' \subseteq \phi \wedge X' \in K^+(\phi) \Rightarrow id_\phi(X') \in X'$ es válida y entonces $id_\phi : \phi = K^+(\phi) \rightarrow \phi$ es una función de elección finita y entonces $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de $S(X)$.

(ii) $\{\cdot\}_X : X \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de $S(X)$ ya que si $h : K^+(\{x\}) \rightarrow \{x\}$ está dado por $h(y) = x, \forall y \in K^+(\{x\})$, entonces h es una función de elección finita ya que:

$$\begin{aligned} \models y \in K^+(\{x\}) &\Rightarrow \exists_{z \in X} z \in y \wedge y \subseteq \{x\} \\ &\Rightarrow \exists_{z \in X} z \in y \wedge z = x \\ &\Rightarrow x \in y \\ &\Rightarrow h(y) \in y \end{aligned}$$

(iii) $S(X)$ es cerrado bajo uniones binarias.

$$\begin{aligned} \models X', X'' \in S(X) &\Rightarrow \exists_{f, g \in \Omega^{X \times X}} (f : K^+(X') \rightarrow X' \wedge g : K^+(X'') \rightarrow X'') \\ &\text{son funciones de elección finitas} \\ &\Rightarrow C(f, g) : K^+(X' \cup X'') \rightarrow X' \cup X'' \\ &\text{es una función de elección finita} \\ &\Rightarrow X' \cup X'' \in S(X) \end{aligned}$$

Entonces por (i), (ii), (iii) se tiene que $K(X) \subseteq S(X)$. ■

Si X es un objeto de \mathbf{E} , sea $C_f(X)$ el subobjeto de $X^{K^+(X)}$ dado por

$$\left\{ h \in X^{K^+(X)} / h \text{ es una función de elección finita} \right\}$$

Corolario 2.3. *Sea X un objeto K -finito decidible en un topos \mathbf{E} . Entonces $C_f(X) \rightarrow 1$ es un epimorfismo; es decir, todo objeto K -finito decidible tiene una función de elección finita internamente.*

Corolario 2.4. (Benabou). *Todo objeto K -finito en un topos booleano es un objeto de elección interno.*

PRUEBA. Sea X , K -finito en un topos booleano \mathbf{E} . Por el Lema 1.4 de [1] se tiene $K(X) = 2^X$ y entonces $K^+(X) = (2^X)^+$, probando esto inmediatamente el corolario 2.4.

Referencias

- [1] Acuña-Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) “Finiteness and decidability I”, *Proc L.M.S. Dunham Symposium on Applications of Sheaf Theory*. Lectures Notes in Mathematics 753, Springer, Berlin: 80–100.
- [2] Benabou, J. (1995) “Definability, finiteness, projectivity and choice”, (versión preliminar). Comunicación privada.
- [3] Diaconescu, R. (1975) “Axiom of choice and complementation”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **51**(1): 176–178.