



Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones  
ISSN: 1409-2433  
mta.cimpa@ucr.ac.cr  
Universidad de Costa Rica  
Costa Rica

ACUÑA ORTEGA, OSVALDO

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE UN TEOREMA DE BENABOU DE BOOLEANIDAD DE UN  
TOPOS ELEMENTAL

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, vol. 15, núm. 2, julio-diciembre, 2008, pp. 101-107  
Universidad de Costa Rica  
San José, Costa Rica

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=45326936001>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en [redalyc.org](http://redalyc.org)

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE UN TEOREMA DE BENABOU DE BOOLEANIDAD DE UN TOPOS ELEMENTAL

OSVALDO ACUÑA ORTEGA\*

*Recibido/Received: 16 May 2008 — Aceptado/Accepted: 11 Jul 2008*

---

### Resumen

En este trabajo probamos que en un topos elemental, todo objeto  $A$  tal que  $A + A$  tiene una función de elección interna, entonces todo subobjeto de  $A$  tiene complemento. También consideramos un concepto débil de función de elección y probamos que cualquier objeto  $K$ –finito decidable posee una función de elección de este tipo internamente.

**Palabras clave:** Teoría de topos, finitud, axioma de elección.

### Abstract

We prove that any elementary topos any objet  $A$  such that  $A + A$  has an internal choice map, then every subobject of  $A$  has complement. We also consider a weaker concept of choice map and we prove that any  $K$ –finite decidable objet has this kind of choice map (internally).

**Keywords:** Topoi, finiteness, choice.

**Mathematics Subject Classification:** 18B25.

## 1 Introducción

Jean Benabou probó en [2] que en un topos elemental es booleano si y solo si el objeto  $1 + 1$  tiene una función de elección (interna). En esta nota probaremos que si  $A$  es un objeto de un topos elemental (o simplemente un topos) entonces todo subobjeto de  $A$  tiene complemento si  $A + A$  tiene una función de elección interna. También introduciremos una versión más débil del concepto de función de elección y probaremos que todo objeto  $K$ –finito decidable tiene una función de elección (interna) de este tipo, en particular  $1 + 1$  tiene una función de elección de esta clase internamente.

---

\*CIMPA, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

## 2 Desarrollo

**Definición 2.1. (a)** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en un topos  $\mathbf{E}$ , denotamos por  $\pi(f)$  al objeto de  $\mathbf{E}$  definido por

$$\pi(f) = \{g \in X^Y / f \circ g = id_Y\} \subseteq X^Y$$

**(b)** Si  $X$  es un objeto de  $\mathbf{E}$ , sean

$$\mathcal{E}_X = \{(X', x) / X' \subseteq X \wedge x \in X'\},$$

$pr_1 : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  y  $pr_2 : \mathcal{E}_X \rightarrow P(X)$  son las dos proyecciones y  $\mathcal{P}(X) = \Omega^X$  es el “conjunto de partes de  $X$ ”. La imagen de  $pr_1$  es el objeto

$$\mathcal{P}^+(X) = \{X' \subseteq X / \exists_{x \in X} x \in X'\}$$

**(c)** Una función de elección para  $X$  es un morfismo  $f : \mathcal{P}^+(X) \rightarrow X$  tal que

$$\models \forall_{X' \in \mathcal{P}^+(X)} f(X') \in X'.$$

**(d)** Sea  $X$  un objeto de  $\mathbf{E}$ , decimos que  $X$  es un objeto de elección (interno) si

$$\models \exists_{f \in X} \mathcal{P}^+(X) \forall_{X' \in \mathcal{P}^+(X)} f(X') \in X'$$

lo que es equivalente a afirmar que  $C(X) \rightarrow 1$  es un epimorfismo, donde

$$C(X) = \{f \in X^{\mathcal{P}^+(X)} / f \text{ es una función de elección}\}$$

**Nota.** Si  $pr_1 : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{P}^+(X)$  es tal que  $pr_1(X', x) = X'$ , entonces  $X$  es un objeto de elección (interno) si y solo si  $\pi(pr_1) \rightarrow 1$  es un epimorfismo.

**Definición 2.2.** Sea  $j : A' \rightarrow A$  un monomorfismo en un topos  $\mathbf{E}$  si  $A \xrightarrow{i_1} A + A \xleftarrow{i_2} A$  es un diagrama coproducto. Sean

$$R^* = \cap \{R \subseteq (A + A) \times (A + A) / R \text{ es una relación de equivalencia} \wedge$$

$$\{(i_1(j(a)), i_2(j(a)))/a \in A'\} \subseteq R\}$$

$$B = (A + A)/R^*, r : A + A \rightarrow B \text{ el morfismo cociente}, j_1 = r \circ i_1, j_2 = r \circ i_2$$

**Observación.**  $R^*$  es una relación de equivalencia en  $A + A$  y  $r$  es un epimorfismo.

**Lema 2.1.** Sea  $j : A' \rightarrow A$  un monomorfismo en un topos  $\mathbf{E}$ , con las notaciones de la definición 2.2, se tiene que

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{j} & A \\ j \downarrow & & \downarrow j_2 \\ A & \xrightarrow{j_1} & B \end{array} \tag{1}$$

es un coproducto fibrado.

PRUEBA. Como  $r \circ i_1 \circ j = r \circ i_2 \circ j$  entonces  $j_1 \circ j = j_2 \circ j$  y así el diagrama (1) conmuta. Supongamos se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \xrightarrow{j} & A \\
 j \downarrow & & \downarrow g_1 \\
 A & \xrightarrow{g_2} & C
 \end{array} \tag{2}$$

Sea  $g : A + A \rightarrow C$  tal que  $g \circ i_1 = g_1$ ,  $g \circ i_2 = g_2$  y  $R_g$  la relación definida en  $A + A$  por:

$$\models (c, c') \in R_g \iff g(c) = g(c').$$

Como  $g_1 \circ j = g_2 \circ j$  se tiene  $g \circ i_1 \circ j = g \circ i_2 \circ j$  y entonces

$$\begin{aligned}
 \models a \in A' \Rightarrow g(i_1(j(a))) &= g(i_2(j(a))) \\
 \Rightarrow (i_1(j(a)), i_2(j(a))) &\in R_g
 \end{aligned}$$

Entonces  $\models \{(i_1(j(a)), i_2(j(a)))/a \in A'\} \subseteq R_g$ , por lo tanto  $R^* \subseteq R_g$ .

Sea  $k : B \rightarrow C$  tal que  $\models k([s]) = g(s)$  donde  $[s]$  es la clase de equivalencia de  $s$  respecto a  $R^*$ ,  $s \in A + A$ .

Debemos probar que  $k$  está bien definida:

$$\begin{aligned}
 \models [s] = [s'] \Rightarrow (s, s') \in R^* \\
 \Rightarrow (s, s') \in R_g \\
 \Rightarrow g(s) = g(s')
 \end{aligned}$$

Probemos ahora que  $k$  es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A' & \xrightarrow{j} & A \\
 & & j \downarrow & & \downarrow g_1 \\
 & & A & \xrightarrow{j_1} & B \\
 & & & \searrow g_1 & \downarrow k \\
 & & & & C
 \end{array}$$

Por definición de  $k$  tenemos que  $k \circ r = g$  y entonces

$$k \circ j_1 = k \circ r \circ i_1 = g \circ i_1 = g_1, \text{ luego } k \circ j_1 = g_1 \text{ y}$$

$$k \circ j_2 = k \circ r \circ i_2 = g \circ i_2 = g_2, \text{ así se tiene que } k \circ j_2 = g_2$$

Supongamos que existe otro morfismo  $k' : B \rightarrow C$  tal que  $k' \circ j_1 = g_1$  y  $k' \circ j_2 = g_2$ , entonces  $k' \circ r \circ i_1 = g_1$  y  $k' \circ r \circ i_2 = g_2$ . Pero sabemos que  $g : A + A \rightarrow C$  es único tal que  $g \circ i_1 = g_1$ ,  $g \circ i_2 = g_2$ , por lo tanto  $g = k' \circ r$ ; también tenemos que  $g = k \circ r$  y entonces  $k' \circ r = k \circ r$  y como  $r$  es un epimorfismo, se debe tener que  $k' = k$ . ■

El siguiente lema es un resultado de Jean Benabou [2]:

**Lema 2.2.** Si

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \xrightarrow{j} & A \\
 j \downarrow & & \downarrow j_2 \\
 A & \xrightarrow{j_1} & B
 \end{array} \tag{3}$$

es un coproducto fibrado en un topos  $\mathbf{E}$ ,  $A' \xrightarrow{j} A$  es un monomorfismo y  $r : A + A \rightarrow B$  es tal que  $r \circ i_1 = j_1$ ,  $r \circ i_2 = j_2$  donde  $A \xrightarrow{i_1} A + A \xleftarrow{i_2} A$  es un coproducto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i)  $A'$  es complementado en  $A$ .
- (ii) existe  $r' : B \rightarrow A + A$  tal que  $r \circ r' = id_B$ .
- (iii) existe un morfismo  $1 \rightarrow \pi(r)$ .
- (iv)  $\pi(r) \rightarrow 1$  es un epimorfismo.

**Teorema 2.1.** Sea  $A$  un objeto de un topos  $\mathbf{E}$ . Si  $A + A$  es un objeto de elección interno, entonces todo  $A' \rightarrow A$  subobjeto de  $A$  tiene complemento.

**PRUEBA.** Sea  $r : A + A \rightarrow B$  como arriba, para probar que  $A'$  tiene complemento es suficiente observar que la siguiente fórmula

$$\exists_{h \in B^{A+A}} r \circ h = id_B$$

es válida en  $\mathbf{E}$ , ya que esto es equivalente a decir que  $\pi(r) \rightarrow 1$  es un epimorfismo y por el lema 2.2 tendríamos que  $A'$  sería complementado en  $A$ .

Como  $A + A$  es un objeto de elección interno entonces existe un morfismo de elección interno  $g : \mathcal{P}^+(A + A) \rightarrow A + A$ . Como  $B \subseteq \mathcal{P}^+(A + A)$ , por el lema 2.1, sea  $h = g|_B : B \rightarrow A + A$ . Entonces se tiene que  $p \circ h = id_B$  internamente, es decir, la fórmula

$$\exists_{h \in B^{A+A}} r \circ h = id_B$$

es válida en  $\mathbf{E}$ . Entonces  $A'$  es complementado en  $A$ . ■

**Definición 2.3.** Un topos  $\mathbf{E}$  es booleano si todo  $A' \rightarrow A$  subobjeto de cualquier objeto  $A$  de  $\mathbf{E}$  tiene complemento.

**Corolario 2.1.** Si todo objeto de un topos  $\mathbf{E}$  tiene una función de elección interna, entonces el topos  $\mathbf{E}$  es booleano.

**Corolario 2.2.** Sea  $\mathbf{E}$  un topos tal que para todo epimorfismo  $f : X \rightarrow Y$ , existe un morfismo  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g = id_Y$ . Entonces todo objeto de  $\mathbf{E}$  tiene una función de elección, en particular  $\mathbf{E}$  es booleano.

PRUEBA. Sea  $X$  objeto de  $\mathbf{E}$ ,  $pr_1 : \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{P}^+(X)$  es un epimorfismo, luego existe  $h : \mathcal{P}^+(X) \rightarrow \mathcal{E}_X$  tal que  $pr_1 \circ h = id_{\mathcal{P}^+(X)}$ , entonces  $g = pr_2 \circ h : \mathcal{P}^+(X) \rightarrow X$  es un morfismo de elección:

$$\begin{aligned} \models X' \in \mathcal{P}^+(X) &\Rightarrow h(X') \in \mathcal{E}_X \\ &\Rightarrow (X', g(X')) \in \mathcal{E}_X \quad (pr_1 \circ h = id_{\mathcal{P}^+(X)} \wedge pr_2 \circ h = g) \\ &\Rightarrow g(X') \in X' \end{aligned}$$

entonces

$$\models \forall_{X' \in \mathcal{P}^+(X)} g(X') \in X'. \blacksquare$$

Las hipótesis del corolario 2.2 junto con la consecuencia de que  $\mathbf{E}$  es booleano, es un resultado de R. Diaconescu [3].

**Definición 2.4.** Sea  $\mathbf{E}$  un topos y  $X$  un objeto de  $\mathbf{E}$ . Denote por  $K(X)$  el subobjeto más pequeño de  $\Omega^X$ , que es cerrado bajo uniones binarias y que contiene  $\lceil \phi \rceil : 1 \rightarrow \Omega^X$ ,  $\{\cdot\}_X : X \rightarrow \Omega^X$ .  $K(X)$  es llamado el objeto de los subobjetos  $K$ -finitos de  $X$ . Decimos que  $X$  es  $K$ -finito si  $\lceil X \rceil : 1 \rightarrow \Omega^X$  se factoriza a través de  $K(X) \rightarrow \Omega^X$ .  $K^+(X)$  es el subconjunto más pequeño de  $\Omega^X$  cerrado bajo las uniones binarias y que contiene a  $\{\cdot\}_X : X \rightarrow \Omega^X$ .

**Nota:**  $K^+(X) \subseteq K(X) \xleftarrow{\phi} 1$  es un diagrama coproducto ([1], p.206. Lema 1.5).

**Definición 2.5. (a)** Sea  $X$  un objeto en un topos  $\mathbf{E}$ ,  $f : K^+(X) \rightarrow X$  es una función de elección finita si

$$\models \forall_{X' \in K^+(X)} f(X') \in X'$$

**(b)** decimos que  $X$  es decidible si la diagonal  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  tiene complemento en  $X \times X$ .

**Proposición 2.1.** Sea  $X$  un objeto decidible de un topos  $\mathbf{E}$ . Si  $X', X'' \subseteq X$  y  $f : K^+(X') \rightarrow X'$ ,  $g : K^+(X'') \rightarrow X''$  son funciones de elección finitas y  $C(f, g) : K^+(X' \cup X'') \rightarrow X' \cup X''$  es tal que

$$C(f, g)(Z) = \begin{cases} g(Z \cap X''), & \text{si } Z \cap X' = \lceil \phi \rceil; \\ f(Z \cap X'), & \text{si } Z \cap X' \in K^+(X'). \end{cases}$$

Entonces  $C(f, g)$  es una función de elección finita.

PRUEBA. Probemos primero que  $C(f, g)$  es una función. Como  $X$  es decidible tenemos que  $K(X) \subseteq 2^X$  y  $K(X)$  es un ideal del álgebra booleana  $2^X$ . (Lema 6.1 de [1]); por lo tanto  $X' \cap Z \in K(X')$  y  $X'' \cap Z \in K(X'')$ . Por otro lado sabemos que

$$\models \forall_{O \in K(X)} (O \in K^+(X) \vee O = \lceil \phi \rceil)$$

Entonces  $K^+(X' \cup X'')$  es la unión disjunta de

$$\begin{aligned} A &= \{Z \in K^+(X' \cup X'') / Z \cap X' = \lceil \phi \rceil\} \text{ y} \\ B &= \{Z \in K^+(X' \cup X'') / Z \cap X' \in K^+(X')\}, \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \models Z \in A &\Rightarrow Z \cap X' = \lceil \phi \rceil \\ &\Rightarrow Z \cap X'' \neq \lceil \phi \rceil \\ &\Rightarrow Z \cap X'' \in K^+(X'') \end{aligned}$$

Por lo tanto  $C(f, g)$  es una función ya que

$$C(f, g)|_A(Z) = g(Z \cap X'') \text{ y}$$

$$C(f, g)|_B(Z) = f(Z \cap X')$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} \models Z \in K^+(X' \cup X'') &\Rightarrow Z \cap X'' \in K^+(X'') \vee Z \cap X' \in K^+(X') \\ &\Rightarrow C(f, g)(Z) = g(Z \cap X'') \vee C(f, g)(Z) = f(Z \cap X') \\ &\Rightarrow C(f, g)(Z) \in Z \cap X'' \vee C(f, g)(Z) \in Z \cap X' \\ &\Rightarrow C(f, g)(Z) \in Z. \end{aligned}$$

Entonces  $C(f, g)$  es una función de elección finita. ■

**Definición 2.6.** *Sea  $X$  un objeto de un topos  $\mathbf{E}$ . Denote por  $S(X)$  el subobjeto de  $\Omega^X$  dado por*

$$\left\{ X' \in \Omega^X / \exists_{f \in \Omega^{\Omega^X \times X}} (f : K^+(X') \rightarrow X' \text{ es una función de elección finita}) \right\}$$

**Teorema 2.2.** *Sea  $\mathbf{E}$  un topos,  $X$  objeto de  $\mathbf{E}$ . Si  $X$  es decidable entonces  $K(X) \subseteq S(X)$ .*

**PRUEBA.** Es suficiente demostrar que  $\{\cdot\}_X : X \rightarrow \Omega^X$ ,  $\lceil \phi \rceil : 1 \rightarrow \Omega^X$  se factorizan a través de  $K(X)$  y que  $S(X)$  es cerrado bajo uniones binarias.

**(i)**  $\lceil \phi \rceil : 1 \rightarrow \Omega^X$  se factoriza a través de  $S(X)$  ya que  $K^+(\phi) = \phi$  y

$$[|X' \subseteq \phi \wedge X' \in K^+(\phi)|] = \phi.$$

Por lo tanto la fórmula  $X' \subseteq \phi \wedge X' \in K^+(\phi) \Rightarrow id_\phi(X') \in X'$  es válida y entonces  $id_\phi : \phi = k^+(\phi) \rightarrow \phi$  es una función de elección finita y entonces  $\lceil \phi \rceil : 1 \rightarrow \Omega^X$  se factoriza a través de  $S(X)$ .

**(ii)**  $\{\cdot\}_X : X \rightarrow \Omega^X$  se factoriza a través de  $S(X)$  ya que si  $h : K^+(\{x\}) \rightarrow \{x\}$  está dado por  $h(y) = x$ ,  $\forall y \in K^+(\{x\})$ , entonces  $h$  es una función de elección finita ya que:

$$\begin{aligned} \models y \in K^+(\{x\}) &\Rightarrow \exists_{z \in X} z \in y \wedge y \subseteq \{x\} \\ &\Rightarrow \exists_{z \in X} z \in y \wedge z = x \\ &\Rightarrow x \in y \\ &\Rightarrow h(y) \in y \end{aligned}$$

(iii)  $S(X)$  es cerrado bajo uniones binarias.

$$\begin{aligned}
 \models X', X'' \in S(X) &\Rightarrow \exists_{f,g \in \Omega^{\Omega^X \times X}} (f : K^+(X') \rightarrow X' \wedge g : K^+(X'') \rightarrow X'') \\
 &\quad \text{son funciones de elección finitas} \\
 &\Rightarrow C(f,g) : K^+(X' \cup X'') \rightarrow X' \cup X'' \\
 &\quad \text{es una función de elección finita} \\
 &\Rightarrow X' \cup X'' \in S(X)
 \end{aligned}$$

Entonces por (i), (ii), (iii) se tiene que  $K(X) \subseteq S(X)$ . ■

Si  $X$  es un objeto de  $\mathbf{E}$ , sea  $C_f(X)$  el subobjeto de  $X^{K^+(X)}$  dado por

$$\left\{ h \in X^{K^+(X)} / h \text{ es una función de elección finita} \right\}$$

**Corolario 2.3.** *Sea  $X$  un objeto  $K$ -finito decidable en un topos  $\mathbf{E}$ . Entonces  $C_f(X) \rightarrow 1$  es un epimorfismo; es decir, todo objeto  $K$ -finito decidable tiene una función de elección finita internamente.*

**Corolario 2.4.** *(Benabou). Todo objeto  $K$ -finito en un topos booleano es un objeto de elección interno.*

PRUEBA. Sea  $X$ ,  $K$ -finito en un topos booleano  $\mathbf{E}$ . Por el Lema 1.4 de [1] se tiene  $K(X) = 2^X$  y entonces  $K^+(X) = (2^X)^+$ , probando esto inmediatamente el corolario 2.4.

## Referencias

- [1] Acuña-Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) “Finiteness and decidability I”, *Proc L.M.S. Dunham Symposium on Applications of Sheaf Theory*. Lectures Notes in Mathematics 753, Springer, Berlin: 80–100.
- [2] Benabou, J. (1995) “Definability, finiteness, projectivity and choice”, (versión preliminar). Comunicación privada.
- [3] Diaconescu, R. (1975) “Axiom of choice and complementation”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **51**(1): 176–178.