Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones
ISSN: 1409-2433
mta.cimpa@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

Domínguez Domínguez, Jorge
Optimización de costos en la experimentación industrial
Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, vol. 14, núm. 2, julio-diciembre, 2007, pp. 193-201
Universidad de Costa Rica
San José, Costa Rica

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2007 **14**(1) : 193–201
cimpa – ucr issn: 1409-2433

OPTIMIZACIÓN DE COSTOS EN LA EXPERIMENTACIÓN INDUSTRIAL

Jorge Domínguez Domínguez*

Recibido/Received: 22 Feb 2006; Aceptado/Accepted: 22 Jan 2007

Resumen

Se plantean diferentes casos para estudiar los costos en procesos industriales. La función de pérdida considera los costos de no calidad, se presenta el modelo que describe los costos asociados a los niveles (valores) de los factores (variables) que se relacionan a las características del proceso. Además, se muestra los costos debidos a no cumplir con especificaciones y los referentes a tolerancias de las componentes de un producto. En cada una de estas situaciones se formulan los procedimientos para optimizar costos sin repercutir en las propiedades de calidad en la producción. Tanto la función objetivo como las restricciones son modelos de regresión que se obtienen mediante métodos estadísticos de diseño de experimentos.

Palabras clave: Función de pérdida, tolerancia, diseño de experimentos, modelos de regresión, optimización.

Abstract

We outline different cases to study the costs in industrial processes. Loss function considers the costs of no quality, we present the model that describes the costs associated to the levels (value) of the factors (variables) that are related to the characteristics of the process. Also, we show the due costs to not fulfilling with specifications and regarding to tolerances of the components of a product. In each one of these situations, we formulate the procedures to optimize costs without rebounding in the properties of quality in the production. As much the function objective as the restrictions are regression model that are obtained through statistical methods of experimental design.

Keywords: Loss function, tolerance, experimental design, regression models, optimization.

Mathematics Subject Classification: 62K20, 62G15.

*Centro de Investigación en Matemáticas. Ap 402 Guanajuato, Guanajuato, México. E-Mail: `jorge@cimat.mx`.

1 Introducción

La elaboración de productos de buena calidad y a bajos costos es una finalidad importante en los procesos industriales. Ambos aspectos caen en el marco de lo que se denomina calidad fuera de líneas desarrolla por [9], en el contexto del diseño de ingeniería alcanzar estas metas caen en el tema de diseño robusto. Éste consiste en tres fases principales de diseño: diseño del sistema, diseño de parámetro y diseño de tolerancia las cuales se realizan de manera secuencial. El diseño del sistema se refiere a toda las estructura del sistema de producción. El diseño del parámetro utiliza los métodos de diseño de experimentos para determinar el óptimo en los factores de control del proceso, tal que la característica de calidad sea poco sensible a la variación en los factores de ruido. Finalmente, el diseño de tolerancias busca reducir la variabilidad de la operación del producto disminuyendo los límites de tolerancia en el diseño del parámetro. El supuesto básico que hay detrás del principio del diseño de tolerancias es que desde del diseño de parámetro se controla la variabilidad.

En el diseño de ingeniería se especifica un valor nominal para una característica de calidad, alcanzar éste con la menor variación será la función del diseño de parámetro. La distancia entre las tolerancias se puede imponer desde el diseño de parámetro, sin embargo lo compacto de las tolerancias pueden afectar los óptimos del diseño del parámetro, por lo que el diseño de parámetro y de tolerancias no puede ir de manera separada, sino que necesitan efectuarse de manera iterativa. El hecho de que la delgadez de la tolerancia influye en un alto costo de manufactura, la pérdida de calidad debe ser considerada en el impacto económico al costo de la manufactura asociada con la tolerancia propuesta. Por lo tanto en el planteamiento del modelo de optimización se deben considerar de manera conjunta el diseño de parámetro y tolerancia.

En este trabajo se utilizaran las técnicas estadísticas de diseño de experimentos, modelación y de optimización para obtener los óptimos en el diseño de parámetro y minimizar los costos de manufactura. Dado que una variedad importante de problemas reales tienen más de una respuesta, el análisis de costos se puede extender a el caso de multirrespuesta.

Varios métodos se han propuesto para optimizar la media y la varianza, no obstante, los costos y la razón de no conformidades asociados con los niveles óptimos de los factores no han sido suficientemente explorados desde un punto de vista riguroso ni explícito. Se plantean diferentes estrategias de optimización, tal que, permitan explorar soluciones alternativas para determinar los niveles de los factores que minimicen costos de producción sin afectar las características de calidad. Dentro de este concepto cabe lo que se conoce como diseño de tolerancias.

2 Costo en los procesos industriales

Considere que la variable Y representa una característica de calidad de un producto y que esta se ve afectada por una serie de factores $x^t = (x_1, \ldots, x_k)$ que intervienen en el proceso. $Y(x)$ es el modelo de regresión en función de los factores x es decir:

$$Y(x) = \beta_0 + x^t\beta + x^tWx + \varepsilon, \tag{1}$$

con β_0 constante, $\beta^t = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ un vector de parámetros, $W = [w_{ij}]$ matriz $k \times k$ de parámetros de segundo orden, ($w_{ij} = \beta_{ii}$ si $i = j$, $w_{ij} = 0.5\beta_{ij}$ si $i \neq j$) y $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$. Al llevar a cabo una estrategia experimental para el desarrollo de un producto en un proceso industrial, $Y = \{y_{ij},\ i = 1, \ldots, n \text{ y } j = 1, \ldots, m\}$ representa la respuesta para la i-ésima combinación (tratamiento) de los valores de los factores x, y la j-ésima combinación de factores de ruido inherentes al proceso, así $\overline{y}_i$ y S_i representan la media y la desviación estándar (de) o la varianza para cada tratamiento respectivamente. Ambas respuestas se pueden ajustar aplicando (1), así los modelos estimados son $\widehat{Y}_1(x)$ (media) y $\widehat{Y}_2(x)$ (de).

2.1 Costos de no calidad

Por lo general se desea que la variable de respuesta Y del producto tenga un valor objetivo de calidad, el que se denota por M, este valor de M puede ser un mínimo, máximo o un valor puntual, al procedimiento estadístico que permite determinar este valor se le conoce como diseño de parámetro.

El primer planteamiento de la relación de costo en una estrategia experimental se da mediante el uso de la conocida función de pérdida, propuesta inicialmente en el esquema del diseño de parámetro se expresa por:

$$P(Y(x)) = k(Y(x) - M)^2, \tag{2}$$

donde k es el costo de calidad asociado a una unidad producida [5]. La esperanza de la expresión (2) permite que el promedio de la pérdida de calidad se descomponga en dos términos, es decir:

$$E(P(Y(x)) = k(\sigma^2(x) + (\mu(x) - M)^2). \tag{3}$$

Se observa de la expresión anterior que se puede realizar un trabajo experimental tal que $\mu(x)$ coincida con el valor objetivo y además minimice la varianza, entonces el promedio de la pérdida disminuye. En ese sentido los datos que se obtienen del experimento permitirán optimizar el modelo de regresión entorno al valor objetivo M. Así la pérdida esperada estimada es:

$$\widehat{P}(\widehat{Y}(x)) = k(\widehat{Y}_2^2(x) + (\widehat{Y}_1(x) - M)^2). \tag{4}$$

Varios autores han trabajado sobre este esquema por ejemplo [3]. La descripción gráfica de este planteamiento se muestra en la Figura 1.

El procedimiento para reducir la varianza desempeña un papel importante en la práctica, sin embargo lograr esta meta usualmente causa un incremento en el costo de manufactura porque requiere: procedimientos operacionalmente más precisos, mejores medios de operación y técnicos mejor entrenados. En ese sentido disminuir la varianza de un proceso implica tolerancias más estrechas.

2.2 Costos por no cumplir con especificaciones

Una segunda exposición en relación al costo esta en función de la tolerancia. La tolerancia se define mediante los límites de especificación, esto es $Tolerancia = LSE - LIE$, Figura

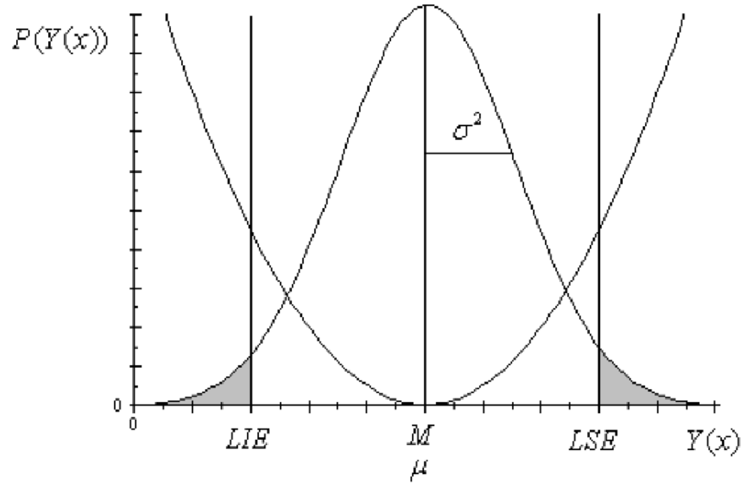

Figura 1: M es el valor objetivo, la región sombreada denota los no conformes.

1. De tal manera los productos que caigan fuera de estos límites dan lugar a **costos** por unidades no conformes. La razón de no conformes estimada para la respuesta Y es:

$$\widehat{Y}_3(x) = P\left(Z < \frac{LIE - \widehat{Y}_1(x)}{\widehat{Y}_2(x)}\right) + P\left(Z > \frac{LSE - \widehat{Y}_1(x)}{\widehat{Y}_2(x)}\right), \tag{5}$$

número de no conformes por millón, donde $\widehat{Y}_1(x) = \widehat{\mu}(x)$ y $\widehat{Y}_2(x) = \widehat{\sigma}(x)$.

Por otro lado, la función de costo asociado a los niveles (valores) de los factores se puede plantear como:

$$\widehat{Y}_4(x) = 0.5\left\{\sum_i^m C_i^+ + \sum_i^m C_i^- + \sum_i^m (C_i^+ - C_i^-)x_i\right\}, \tag{6}$$

donde C_i^+ y C_i^- son los costos asignados a los niveles 1 y 2 para cada uno de los k factores en un diseño factorial 2^{k-r} y $m = 2^{(k-r)-1}$ $(r = 0, \ldots, p)$ $p < k$, [4].

2.3 Costos de tolerancia

Existen dos conjuntos de características que requieren especificaciones para determinar la calidad de un producto. Estas características son las que se refieren a las partes de componentes y se denominan de bajo nivel y las características del producto llamadas de alto nivel. Las características de bajo nivel afectan a las de nivel alto, por lo que el diseño de parámetro y diseño de tolerancia son incluidos en las especificaciones de bajo nivel. Se pueden modelar las tolerancias para reducir costos, considerando este planteamiento se da una solución conjunta al diseño de parárametro y diseño de tolerancias. En esa dirección es suficiente con extender la expresión (4) tal que tome en cuenta el marco de la tolerancia.

$$\widehat{P}(\widehat{Y}(x)) = k(\widehat{Y}_2(x) + (\widehat{Y}_1(x) - M)^2) + \sum_i^n f(t_i), \tag{7}$$

donde $t_i = 3\sigma$, y $f(t)$ conocida como función de transferencia denominadas modelos de costos. Algunas formas matemáticas de estos modelos son: $f(t) = c_0 + c_1 t^r$, $r = 1, 2$ ó $f(t) = c_0 + c_1 e^{c_2 t}$. En ese sentido, estos modelos sugieren que los costos de manufactura están en función de la varianza del proceso. Es frecuente que en los procesos de producción exista más de una variable de respuesta por lo tanto la expresión anterior se extiende de manera natural al caso multivariado, [7] y [8].

3 Procedimientos para optimizar de costos

Los planteamientos sobre los casos de costos realizados en el apartado anterior se formalizarán en esta sección dentro del contexto de la la metodología de superficie de respuesta, [6]. En resumen se puede decir que existen cinco etapas en los estudios de optimización experimental de costos: 1. Identificar el problema, 2. Planear y efectuar el experimento, 3. Modelar la media, la varianza y/o alguna función relacionada con costos, 4. Seleccionar la función de utilidad y el criterio de optimización, y 5. Aplicar el procedimiento de optimización.

3.1 Diseño de parámetro minimizando la función de pérdida

Se puede emplear la expresión (4) para estudiar los costos de no calidad en cualquier proceso industrial y optimizar la función de pérdida. El procedimiento en forma de algoritmo es como sigue:

1. Determinar el valor de k, si la característica de calidad Y difiere del valor nominal M. Para ello se establece la pérdida pesos (unidad monetaria correspondiente), se despeja k de la expresión (2), denomine ese valor k_o.

2. Realizar el experimento siguiendo un diseño apropiado, por ejemplo un diseño factorial fraccionado 2^{k-r}, $r = 1, \ldots, p$ $(p < k)$, un diseño central compuesto o un diseño factorial incompleto o completo con factores en tres niveles entre otros.

3. Modelar los resultados experimentales. En ese sentido obtener los modelos de regresión para la media $\widehat{Y}_1(x)$, y para la desviación estándar $\widehat{Y}_2(x)$ evaluar cada modelo estadísticamente, es decir analizar la significancia, estudiar la falta de ajuste y estimar el coeficiente de determinación.

4. Optimizar la función de pérdida para minimizar costos, $k_o(\widehat{Y}_2^2(x) + (\widehat{Y}_1(x) - M_c)^2)$. El planteamiento de optimización es:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \widehat{Y}_2(x) \\ &\text{Sujeto a } \widehat{Y}_1(x) = M_c, x \in R(x), \end{aligned}$$

   donde M_c es mínimo, máximo o valor objetivo, [2].

Estrategias experimentales Para modelar $\widehat{Y}_2(x)$ se presentan varios escenarios, el caso directo es cuando en el experimento que se lleva a cabo existen réplicas. Si en el trabajo experimental no existen réplicas una alternativa para modelar $\widehat{Y}_2(x)$ es mediante la siguiente expresión: $\log|(Y_1(x) - \widehat{Y}_1(x)|$. Otra situación que se presenta en los estudios experimentales es cuando la variable de respuesta esta en función de los factores de ruido $z^t = (z_1, \dots, z_q)$ en esa situación el modelo de $\widehat{Y}_2(x|z)$ se obtiene mediante: $\widehat{\text{var}}(\widehat{Y}_1(x|z)) = (\widehat{\gamma} + \widehat{D}x)(\widehat{\gamma} + \widehat{D}x)^t + \widehat{\sigma}^2_\epsilon$, donde $\widehat{\gamma}$ es el estimador de los parámetros del factor de ruido z, bajo el supuesto de que $z \sim N(0,1)$, $\widehat{D}$ es la matriz cuyos elementos son los estimadores de los efectos de interación entre los factores x y z, [8].

3.2 Optimización de costos en el caso de no conformes

Al planear y efectuar el experimento para el análisis de costos en cada tratamiento también se contemplan las unidades experimentales que son no conformes. En ese sentido ahora se tendrán cuatro respuestas a saber: 1. La media $Y_1(x)$, 2. La desviación estándar $Y_2(x)$, 3. El costo $Y_3(x)$ expresión (5) y no conformes $Y_4(x)$ función (6). El modelo de optimización para estas condiciones se puede dar en varios escenarios, se plantearan 2 posibles.

1. Optimizar el costo:

Minimizar $\widehat{Y}_3(x)$
Sujeto a $\widehat{Y}_1(x) = M_c$
$\widehat{Y}_2(x) = S_0$
$\widehat{Y}_4(x) < 0.001$
$x \in R(x)$.

2. Optimizar no conformes:

Minimizar $\widehat{Y}_4(x)$
Sujeto a $\widehat{Y}_1(x) = M_c$
$\widehat{Y}_2(x) = S_0$
$\widehat{Y}_3(x) = C_0$
$LIE = t_o$ y $LSE = t_1$, $x \in R(x)$.

donde M_c, C_0, S_0, t_o y t_1 son valores de referencia.

3.3 Diseño compuesto del diseño de parámetro y tolerancia

Durante la etapa experimental los valores de los factores se establecen fijos (sin error). Sin embargo, en el proceso de producción a granel ellos tiene una tolerancia e_{io}, así que su valor actual es $x_i + e_{io}$ en vez de x_i $i = 1, \dots, k$. Se supone que los e_i son variables aleatorias que cumplen con: $E(e_i) = 0$, $\text{var}(e_i) = \sigma_i^2$ y $\text{cov}(e_i, e_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ en muchas situaciones prácticas las tolerancias estan no correlacionadas. En ese sentido el modelo (1) estimado se puede escribir como:

$$\widehat{Y}(x|e) = b_0 + (x+e)^t b + (x+e)^t \widehat{W}(x+e), \tag{8}$$

con b_0 constante, $b^t = (b_1, \dots, b_k)$ un vector $\widehat{W} = [\widehat{w}_{ij}]$ matriz $k \times k$ con términos de segundo orden, ($\widehat{w}_{ij} = b_{ii}$ si $i = j$, $\widehat{w}_{ij} = 0.5\ b_{ij}$ si $i \neq j$).

Como se ha indicado el diseño de tolerancia trae consigo costos de calidad asociados, esto da lugar a plantear una nueva función objetivo que considere el costo total, esta se expresa por:

$$H(x_0, t) = C(x_0, t) + C(t) = k(\widehat{Y}_2(x,t) + (\widehat{Y}_1(x,t) - M)^2) + \sum_i^n C(t_i). \tag{9}$$

En la expresión (9) $\widehat{Y}_1(x,t)$ es la esperanza de $\widehat{Y}(x|e)$ esto es:

$$\widehat{Y}_1(x,t) = E(\widehat{Y}(x|e)) = b_0 + x^t b + x^t \widehat{W} x + tr\widehat{W}\Sigma,$$

donde $\Sigma = [\sigma_i^2]$ matriz diagonal, así $trZ\Sigma = \frac{1}{2}\sum_i^n b_{ii}\sigma_i^2$. Es común definir la tolerancia t_i de x_i como: $t_i = 3\sigma_i$, esto es:

$$\widehat{Y}_1(x,u) = \widehat{Y}(x) + \frac{1}{2}\sum_i^n \frac{1}{9} b_{ii} t_i^2. \tag{10}$$

La varianza de la expresión es:

$$\widehat{Y}_2(x,t) = \mathrm{var}(\widehat{Y}(x|e)) = (b + 2\widehat{W}x)^t \Sigma (b + 2\widehat{W}x) + \widehat{\sigma}_\varepsilon^2,$$

en términos de la tolerancia la expresión anterior es:

$$\widehat{Y}_2(x,t) = \frac{1}{9}(b + 2\widehat{W}x)^t T (b + 2\widehat{W}x) + \widehat{\sigma}_\varepsilon^2, \tag{11}$$

donde $T = [t_i]$ es la matriz diagonal de tolerancias.

3.3.1 Optimización en la tolerancia relacionada a costos

Nuevamente se retoma la estrategia de los cinco pasos citados, aunque en este procedimiento es más general porque integra el diseño de parámetro y el de tolerancias. Además incorpora los costos, entonces la estructura de optimización queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } \widehat{P} = k(\widehat{Y}_2^2(x,u) + (\widehat{Y}_1(x,u) - M)^2) + \sum_i^n C_i(t_i) \\ \text{Sujeto a } \widehat{Y}(x,t) \le T_{\max} \\ \qquad\quad t_i^I \le t_i \le t_i^S \\ \qquad\quad x \in R(x), \text{ Región experimental.} \end{array} \tag{12}$$

donde $\mathbf{t} = \mathbf{3}\sigma$, t_i^I y t_i^S son los límites inferior y superior para u_i y T_{max} representa el máximo permisible para la tolerancia.

Estrategia para integrar los costos Considere que se ha realizado un experimento y el procedimiento para llegar al proceso de optimización es como sigue: 1. Se ajusta el modelo (1) con las variables codificadas x ($x_i = (X_i - \overline{X})/0.5(X_{\max} - X_{\min})$, $i = 1, \ldots, k$)). 2. Se re-escribe el modelo en términos de las variables originales X. 3. Se obtienen los modelos (10) y (11). 4. Se estima la función de costos $C_i(t_i)$. A cada uno de los factores se les asigna su tolerencia como se muestra en la Tabla 1, se proponen diferentes tolerancias t_{ij} para cada factor ($i = 1, \ldots, k$ y $j = 1, \ldots, q$ niveles de tolerancia) por consiguiente en cada tratamiento se genera un costo. Luego en el proceso de optimización se propone una t_{ij}^* y se sustituye en el modelo (12), se establece la función costo - tolerancia $C_i(t_i)$ para cada factor; ésta se obtiene ajustando los valores resultantes de costo, por ejemplo un modelo para ajustar una de estas funciones puede ser el recíproco, esto es: $C_i(t_i) = c_0 + c_1 t_i^{-1}$. Finalmente se optimiza el modelo (12).

Factor X_1		Factor X_2		$\cdots$	Factor X_k	
Tolerancia	Costo	Tolerancia	Costo		Tolerancia	Costo
t_{11}	C_{11}	t_{21}	C_{21}	$\cdots$	t_{k1}	C_{k1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
t_{1q}	C_{1q}	t_{2q}	C_{2q}	$\cdots$	t_{kq}	C_{kq}

Tabla 1: Relación tolerancia costo para cada factor.

4 Discusión

Sin duda estos procedimientos de optimización resultan de mucha utilidad en la práctica porque permite sustanciales ahorros a los procesos industriales, sin sacrificar las otras variables de calidad del producto. Falta ejemplificar o ilustrar con una aplicación estos planteamientos de optimización a casos reales, por cuestiones de espacio en este trabajo no es posible. Sin embargo al lector interesado puede solicitar referencias a casos prácticos al correo electrónico mencionado. Una vez realizada esta presentación se indican posibles extenciones y líneas de estudio al esquema de optimización que aquí se han trabajado. Por lo general en estos casos se establece una negociación entre la calidad de un producto y los costos de manufactura; una metodología que se puede aplicar a esta situación es la optimización multi-objetivo, esta constituye otra línea de trabajo. Una extensión es considerar restricciones de aleatorización en el planteamiento experimental. Una línea de investigación es tomar en cuenta el caso multivariado desde un enfoque de la metodología de superficie de respuesta, [1].

Referencias

[1] Allen, T.; Yu, L. (2002) "Low-cost response surface method from simulation optimization", *Qual. Reliab. Engng. Int.* **18**: 5–17.

[2] Domínguez, D.J. (2004) "Estrategia experimental una opción para la mejora continua de procesos industriales", *Gaceta del Concyteg.*

[3] Kim, Y.J.; Cho, B.R. (2000) "Economic considerations on parameter design", *Qual. Reliab. Engng. Int.* **16**: 501–514.

[4] Kraus, P.D.; Benneyan, J.C.; Mackertich, N.A. (2000) "Use of mathematical programming in the analysis of constrained and unconstrained industrial experimental", *Quality Engineering* **12**(3): 395–406.

[5] Li, W.; Wu C.F.J. (1999) "An integrated method of parameter design and tolerance design", *Quality Engineering* **11**(3): 417–425.

[6] Myers, R.H. (1999) "Response surface methodology-current status and future directions", *Journal of Quality Technology* **31**: 30–44.

[7] Ribeiro, J.L.; Fogliatto, F.S.; Caten, C.S. (2001) "Minimizing manufacturing and quality costs in multiresponse optimization", *Quality Engineering* **13**(4): 559–569.

[8] Romano, D.; Varetto, M.; Vicario, G. (2004) "Multiresponse robust design: a general framework based on combined array", *Journal of Quality Technology* **36**(1): 27–37.

[9] Taguchi, G. (1986) *Introduction to Quality Engineering*. Asian Productivity Organization, Tokyo.