



Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones
ISSN: 1409-2433
mta.cimpa@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

Acuña Ortega, Osvaldo

Sobre una construcción de un monoide libre con identidad sobre un topos E con el objeto de los
números naturales

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, vol. 20, núm. 1, 2013, pp. 79-94
Universidad de Costa Rica
San José, Costa Rica

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=45328566006>

- ▶ Cómo citar el artículo
- ▶ Número completo
- ▶ Más información del artículo
- ▶ Página de la revista en redalyc.org

SOBRE UNA CONSTRUCCIÓN DE UN MONOIDE
LIBRE CON IDENTIDAD SOBRE UN TOPOS *E*
CON EL OBJETO DE LOS NÚMEROS
NATURALES

ABOUT THE CONSTRUCTION OF A FREE
MONOID WITH IDENTITY ON A TOPOS *E* WITH
THE OBJECT OF NATURAL NUMBERS

OSVALDO ACUÑA ORTEGA*

Received: 17/May/2012; Revised: 4/Dec/2012;
Accepted: 5/Dec/2012

*CIMPA & Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

Resumen

Damos una construcción del monoide libre con identidad sobre un objeto X , $M(X)$. Donde

$$M(X) = \{R \in \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} / R \text{ es funcional y } \exists_{n \in \mathbb{N}} \text{ dom } R = [n]\} \xrightarrow{i_X} \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X}.$$

Palabras clave: Teoría de topos, objetos K-finitos, números naturales.

Abstract

We proved that the free monoid with identify in X is

$$M(X) = \{R \in \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} / R \text{ es funcional y } \exists_{n \in \mathbb{N}} \text{ dom } R = [n]\} \xrightarrow{i_X} \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X}.$$

Keywords: Topoi, K-finite objects, natural numbers.

Mathematics Subject Classification: 03G30, 18B25.

1 Introducción

En [2] probamos que $M(X)$ es un monoide con identidad y que $\models R \in M(X) \Rightarrow \text{dom } R = [L(R)]$, donde $L : M(X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +)$ es un homomorfismo de monoides con identidad.

2 Resultados previos

Para cada $X \in |E|$, E es un topos con el objeto de los números naturales, defina $j_X : X \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X}$ tal que $\models j_X(a) = \{(0, 0, a)\}$.

Lema 1 j_X se factoriza a través de $M(X)$.

DEMOSTRACIÓN. $\models (n, m, b) \in j_X(b) \wedge (n, m, \bar{b}) \in j_X(\bar{b}) \Rightarrow (n, m, b) = (n, m, \bar{b}) \Rightarrow b = \bar{b}$ por lo tanto j_X es funcional y

$$\models \text{dom } j_X(a) = \exists_{pr_{12}}(\{(0, 0, a)\}) = \{pr_{12}(0, 0, a)\} = \{(0, 0)\} = [1]$$

entonces $\models \text{dom } j_X(a) = [1]$ y $\models j_X(a) \in M(X)$. ■

Define $\eta_X : X \longrightarrow M(X)$ el único morfismo tal que $\eta_X \circ i_X = j_X$.

Proposición 2 $M(-)$ se puede extender a un functor de manera única tal que $M(-)$ se transforma en un subfunctor de $\Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times -}$; tiene al functor identidad de E como un subfunctor, via η . Más aún $M(-)$ se factoriza a través de la categoría de los monoídes con identidad de E .

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que para cualquier flecha $g : X \rightarrow Y$ de E , existe una única flecha $M(g) : M(X) \rightarrow M(Y)$ tal que en el siguiente diagrama ambos cuadrados comutan:

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} & \xrightarrow{\quad} & \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times Y} \\
 \uparrow i_X & \nearrow \exists_{id_{Xg}} & \uparrow i_Y \\
 M(X) & \xrightarrow{\quad} & M(Y) \\
 \uparrow \eta_X & \nearrow M(g) & \uparrow \eta_Y \\
 X & \xrightarrow{\quad g \quad} & Y
 \end{array}$$

Para probar la existencia de $M(g)$ y la comutatividad del cuadrado superior es suficiente probar internamente que $\exists_{id_{Xg}}$ manda elementos de $M(X)$ en elementos de $M(Y)$.

(i) $\exists_{id_{Xg}}(R)$ un funcional si R es funcional:

$$\begin{aligned}
 &\models (n, m, b) \in \exists_{id_{Xg}}(R) \vee (n, m, \bar{b}) \in \exists_{id_{Xg}}(R) \\
 &\Rightarrow \exists_{k_1}(n, m, x_1) \in R \wedge g(x_1) = b \wedge \exists_{x_2}(n, m, x_2) \in R \wedge g(x_2) = \bar{b} \\
 &\Rightarrow \exists_{x_1} \exists_{x_2}(n, m, x_1) \in R \wedge (n, m, x_2) \in R \wedge g(x_1) = b \wedge g(x_2) = \bar{b} \\
 &\Rightarrow \exists_{x_1} \exists_{x_2} x_1 = x_2 \wedge g(x_1) = b \wedge g(x_2) = \bar{b} \\
 &\Rightarrow b = \bar{b}.
 \end{aligned}$$

(ii) $\models \text{dom } \exists_{id_{Xg}}(R) = \text{dom } (R)$:

$$\begin{aligned}
 \models (n, m) \in \text{dom } \exists_{id_{Xg}}(R) &\Leftrightarrow \exists_{b \in Y}(n, m, b) \in \exists_{id_{Xg}}(R) \\
 &\Leftrightarrow \exists_b \exists_{xg}(x) = b \wedge (n, m, x) \in R \\
 &\Leftrightarrow \exists_x \exists_b g(x) = b \wedge (n, m, x) \in R \\
 &\Leftrightarrow \exists_x (n, m, x) \in R \\
 &\Leftrightarrow (n, m) \in \text{dom } R.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\models \text{dom } \exists_{id \times g}(R) = \text{dom } R$$

y luego

$$\models \ell(\exists_{id \times g}(R)) = \ell(R).$$

(i) y (ii) dicen que

$$\exists_{id \times g} \circ i_X$$

se factoriza a travez de $M(X)$, por lo tanto existe una flecha única $M(g)$ tal que

$$\exists_{id \times g} \circ i_X = i_Y \circ M(g).$$

Probaremos ahora que el siguiente diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X} & \xrightarrow{\quad} & \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times Y} \\
\downarrow j_X & \nearrow \exists_{id \times g} & \uparrow j_Y \\
X & \xrightarrow{\quad g \quad} & Y
\end{array}$$

$$\models \exists_{id \times g}(j_X(a)) = \exists_{id \times g}\{(0, 0, a)\} = \{id_{\times g}(0, 0, a)\} = \{(0, 0, g(a))\}$$

entonces como

$$\models j_Y(g(a)) = \{(0, 0, g(a))\}$$

se tiene que

$$\models \exists_{id \times g}(j_X(a)) = j_Y(g(a))$$

y entonces

$$\models \exists_{id \times g} \circ j_X = j_Y \circ g.$$

Por definición de η_X tenemos que

$$\exists_{id \times g} \circ i_X \circ \eta_X = i_Y \circ \eta_Y \circ g,$$

pero

$$\exists_{id \times g} \circ i_X = i_Y \circ M(g)$$

y entonces

$$i_Y \circ M(g) \circ \eta_X = i_Y \circ \eta_Y \circ g$$

lo que implica que

$$M(g) \circ \eta_X = \eta_Y \circ g$$

dado que i_Y es mónica y así se tiene que comuta:

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{\quad M(g) \quad} & M(Y) \\ \downarrow \eta_X & & \uparrow \eta_Y \\ X & \xrightarrow{\quad g \quad} & Y \end{array}$$

La unicidad de $M(g)$ es consecuencia de su definición y del hecho de que i_Y es mónico, esto prueba que

$$M(id_X) = id_{M(X)} \text{ y } M(f \circ g) = M(f) \circ M(g).$$

Hemos visto que para todo $X \in |E|$, $M(X)$ es un monoide con identidad. La única cosa que falta por probar es la comutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \text{(i)} & & \text{(ii)} \\ M(X) \times M(X) & \xrightarrow{\quad * \quad} & M(X) \\ \downarrow M(g) \times M(g) & & \downarrow M(g) \\ M(Y) * M(Y) & \xrightarrow{\quad * \quad} & M(Y) \\ & & \uparrow \phi^X \\ & & 1 \\ & & \nearrow M(g) \\ & & M(Y) \\ & & \uparrow \phi^Y \end{array}$$

(i) Es suficiente probar que

$$\exists_{id_{Xg}}(R_1 * R_2) = \exists_{id_X}(R_1) * \exists_{id_{Xg}}(R_2)$$

donde R_1 y R_2 son variables de tipo $M(X)$:

$$\begin{aligned}
 & \models (n, m, b) \in \exists_{id_{Xg}}(R_1 * R_2) \\
 & \Leftrightarrow \exists_x g(x) = b \wedge (n, m, x) \in R_1 * R_2 \\
 & \Leftrightarrow \exists_x g(x) = b \wedge \exists_{k_1}((n, k_1, x) \in R_1 \vee (k_1, m, x) \in R_2) \\
 & \quad \wedge n + m + 1 = \ell(R_1) + \ell(R_2) \\
 & \Leftrightarrow \exists_{k_1}(\exists_x g(x) = b \wedge (n, k_1, x) \in R_1 \vee \exists_x g(x) = b \wedge (k_1, m, x) \in R_2) \\
 & \quad \wedge n + m + 1 = \ell(R_1) + \ell(R_2) \\
 & \Leftrightarrow \exists_{k_1}((n, k_1, b) \in R_1 \vee (k_1, m, x) \in R_2) \wedge n + m + 1 = \\
 & \quad \ell(R_1) + \ell(R_2) \\
 & \Leftrightarrow (n, m, b) \in \exists_{id_{Xg}}(R_1) * \exists_{id_{Xg}}(R_2).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\models \exists_{id_{Xg}}(R_1 * R_2) = \exists_{id_{Xg}}(R_1) * \exists_{id_{Xg}}(R_2)$.

- (ii) Es suficiente probar que $\models \exists_{id_{Xg}}(\phi_X) = \phi_Y$; esto es claro ya que $\exists_{id_{Xg}}$ tiene un adjunto derecho $\Omega^{id_{Xg}}$ entonces preserva coproductos. Recuerde que $\phi_X : 1 \longrightarrow \Omega^X$ es el objeto inicial de la categoría interna Ω^X .

Denotemos la categoría de monoides con identidad de E por monoide (E) . Hemos visto que $M(-)$ es un functor de E a monoide (E) . Debemos probar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Monoide}(E) & \xrightarrow{i} & E \\
 & \xleftarrow{M} &
 \end{array}$$

es tal que $M(-)$ es un adjunto izquierdo del functor i (inclusión).

Sea $\tilde{r} : M(X) \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X}$ definido por

$$\models \tilde{r}(R) = \{(n, m, x) / (n, s(m), x) \in R\}$$

donde $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es el morfismo sucesor.

Lema 3 \tilde{r} se factoriza por $M(X)$ y $\models \ell(\tilde{r}(R)) = p(\ell(R))$, donde $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es la función predecessor.

DEMOSTRACIÓN.

- (i) $\tilde{r}(R)$ es funcional:

$$\begin{aligned}
 & \models (n, m, x) \in \tilde{r}(R) \wedge (n, m, \bar{x}) \in \tilde{r}(R) \Rightarrow (n, s(m), x) \in R \wedge (n, s(m), \bar{x}) \in R \Rightarrow x = \bar{x}.
 \end{aligned}$$

(ii) $\models \text{dom } (\tilde{r}(R)) = [p \circ \ell(R)]$:

$$\begin{aligned}
\models (n, m) \in \text{dom } (\tilde{r}(R)) &\Leftrightarrow n + s(m) + 1 = \ell(R) \\
&\Leftrightarrow p(n + s(m) + 1) = p(\ell(R)) \\
&\Leftrightarrow n + p(s(m)) + 1 = p(\ell(R)) \\
&\Leftrightarrow n + m + 1 = p(\ell(R)) \\
&\Leftrightarrow (n, m) \in [p(\ell(R))]. \blacksquare
\end{aligned}$$

Defina $r : M(X) \longrightarrow M(X)$ la única flecha tal que $i_X \circ r = \tilde{r}$. Sea ϑ el subobjeto de $M(X) \times X$ dado por

$$\{(R, x)/(p(\ell(R)), 0, x) \in R\} \xrightarrow{\text{incl}} M(X) \times X$$

donde incl es la inclusión.

Lema 4 (i) ϑ es funcional.

(ii) $\text{dom } \vartheta = \{R \in M(X)/\ell(R) > 0\}$.

(iii) $\begin{pmatrix} \text{incl} \\ \phi^X \end{pmatrix} : \text{dom } \vartheta + 1 \longrightarrow M(X)$ es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Evidente, en particular existe un morfismo único $\theta : \text{dom } \vartheta \longrightarrow X$ tal que $\models (p(\ell(R)), 0, \theta(R)) \in R$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\models R \in \text{dom } \vartheta &\Leftrightarrow \exists_x (R, x) \in \vartheta \\
&\Leftrightarrow \exists_x (p(\ell(R)), 0, x) \in R \\
&\Leftrightarrow (p(\ell(R)), 0) \in \text{dom } R \\
&\Leftrightarrow p(\ell(R)) + 0 + 1 = \ell(R) \\
&\Rightarrow p(\ell(R)) + 1 = \ell(R) \\
&\Rightarrow \ell(R) > 0.
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{dom } \vartheta \subseteq \{R/\ell(R) > 0\}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\models \ell(R) > 0 &\Rightarrow s(p(\ell(R))) = \ell(R) \\
&\Leftrightarrow p(\ell(R)) + 1 = \ell(R) \\
&\Leftrightarrow R \in \text{dom } \vartheta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{dom } \theta \supseteq \{R/\ell(R) > 0\}$ y entonces $\text{dom } \vartheta = \{R/\ell(R) > 0\}$.

(iii) Los cuadrados de los siguientes diagramas son productos fibrados:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow \phi^X & \quad * \quad & \downarrow 0 \\
 M(X) & \xrightarrow{\ell} & \mathbb{N}
 \end{array} & \quad &
 \begin{array}{ccc}
 \text{dom } \theta & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{N} \\
 \downarrow \text{inc}\ell & \quad * \quad & \downarrow s \\
 M(X) & \xrightarrow{\ell} & \mathbb{N}
 \end{array}
 \end{array}$$

El diagrama de la derecha es un producto fibrado por (ii). El diagrama de la izquierda claramente comuta, queremos demostrar que es un producto fibrado:

$$\begin{aligned}
 \models R \in \ell^{-1}(0) &\Rightarrow \ell(R) = 0 && (\text{ya que } \ell(R) = \text{dom } R) \\
 &\Rightarrow \text{dom } R = \phi \\
 &\Rightarrow \Omega^{pr_{12}}(\text{dom } R) = \Omega^{pr_{12}}(\phi) = \phi \\
 (\exists_{pr_{12}} \vdash \Omega^{pr_{12}}) &\Rightarrow R \leq \Omega^{pr_{12}}(\text{dom } R) = \phi \\
 &\Rightarrow R = \phi
 \end{aligned}$$

(donde pr_{12} es la proyección $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Esto prueba que el cuadrado izquierdo es un producto fibrado. Por universalidad del producto fibrado a lo largo de ℓ y como $\mathbb{N} = 1 + s(\mathbb{N})$, se tiene que $\begin{pmatrix} \text{inc}\ell \\ \phi^X \end{pmatrix}$ es un isomorfismo. ■

Lema 5 $\models r(R) * i_X(\theta(R)) = R$.

DEMOSTRACIÓN.

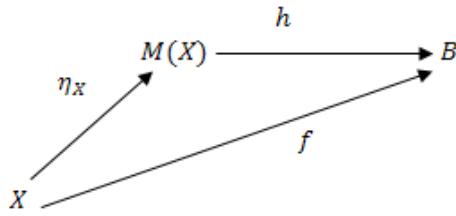
$$\begin{aligned}
 &\models (n, m, x) \in r(R) * i_X(\theta(R)) \\
 &\Leftrightarrow \exists_{k_1} ((n, k_1, x) \in r(R) \vee (k_1, m, x) \in i_X(\theta(R))) \wedge n + m + 1 = \ell(R) \\
 &\Leftrightarrow \exists_{k_1} ((n, s(k_1), x) \in R \wedge s(k_1) = m) \\
 &\quad \vee \exists_{k_1} (k_1 = 0 \wedge m = 0 \wedge x = \theta(R)) \wedge n + m + 1 = \ell(R) \\
 &\Rightarrow (n, m, x) \in R \vee (m = 0 \wedge (p(\ell(R)), 0, x) \in R) \wedge n + m + 1 = \ell(R) \\
 &\Rightarrow (n, m, x) \in R \vee (m = 0 \wedge n + 1 = \ell(R) \wedge (p(\ell(R)), 0, x) \in R) \\
 &(\text{como } \models n + 1 = \ell(R) \Leftrightarrow n = p(\ell(R))) \\
 &\Rightarrow (n, m, x) \in R \vee (n, m, x) \in R \\
 &\Rightarrow (n, m, x) \in R.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $r(R) * i_X(\theta(R)) \subseteq R$. Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned}
 &\models (n, m, x) \in R \\
 &\Rightarrow ((n, m, x) \in R \wedge m > 0) \vee ((n, 0, x) \in R \wedge m = 0) \\
 &\Rightarrow \exists_{k_1} ((n, m, x) \in R \wedge m = s(k_1)) \vee ((n, 0, x) \in R \wedge m = 0) \\
 &\Rightarrow \exists_{k_1} ((n, s(k_1), x) \in R \wedge s(k_1) = m) \\
 &\quad \vee ((p(\ell(R)), 0, x) \in R \wedge m = 0 \wedge n = p(\ell(R))) \\
 &\Rightarrow \exists_{k_1} ((n, s(k_1), x) \in R \wedge s(k_1) = m) \\
 &\quad \vee \exists_{k_1} (k_1 = 0 \wedge m = 0 \wedge x = \theta(R) \wedge n + m + 1 = \ell(R)) \\
 &\Leftrightarrow (n, m, x) \in r(R) * i_X(\theta(R)).
 \end{aligned}$$

Luego $\models R \subseteq r(R) * i_X(\theta(R))$ y así $\models R = r(R) * i_X(\theta(R))$. ■

Proposición 6 Si (B, \cdot, e) es un objeto monoide con identidad en un topos E y $f : X \rightarrow B$ cualquier flecha en E , entonces existe a lo sumo una flecha h que preserva productos e identidad tal que el siguiente diagrama comuta:



DEMOSTRACIÓN. Suponga que existen flechas $h_1, h_2 : M(X) \rightarrow B$ que preservan la estructura de monoide con identidad de $M(X)$ y

$$h_1 \circ \eta_X = h_2 \circ \eta_X.$$

Considere

$$\{n / \forall_{R \in M(X)} (\ell(R) = n \Rightarrow h_1(R) = h_2(R))\} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Denote este subobjeto de \mathbb{N} por S . Queremos probar que $S = \mathbb{N}$. Sabemos que $\models \ell(R) = 0 \Rightarrow R = \phi$; por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \models \ell(R) = 0 &\Rightarrow R = \phi \\ &\Rightarrow h_1(R) = h_2(R) = e \\ \text{y así } \models \ell(R) = 0 &\Rightarrow h_1(R) = h_2(R) \text{ y así } \models 0 \in S. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos (por lemas 3 y 5)

$$\begin{aligned} \models n \in S \wedge \ell(R) = s(n) &\Rightarrow R = r(R) * i_X(\theta(R)) \wedge \ell(r(R)) = n \wedge n \in S \\ &\Rightarrow h_1(i_X(\theta(R))) = h_2(i_X(\theta(R))) \wedge R = r(R) * i_X(\theta(R)) \wedge h_1(r(R)) \\ &= h_2(r(R)) \\ &\Rightarrow h_1(R) = h_2(R). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \models n \in S \wedge \ell(R) = s(n) &\Rightarrow h_1(R) = h_2(R) \\ &\text{si y solo si} \\ \models n \in S &\Rightarrow (\ell(R) = s(n) \Rightarrow h_1(R) = h_2(R)), \end{aligned}$$

y entonces $\models n \in S \Rightarrow s(n) \in S$. Por el principio de inducción $S = \mathbb{N}$ y $h_1 = h_2$. ■

Lema 7 Si $B \in |E|$, tiene una sección global $\nu : 1 \longrightarrow B$, entonces existe un morfismo natural $J_\nu : M(B) \longrightarrow B^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ con respecto B .

DEMOSTRACIÓN. Si R es una variable del tipo $M(B)$, J_ν está definida internamente por:

$$\models J_\nu(R) = \{(n, m, b) / (n, m, b) \in R \vee^\neg (n + m + 1 = \ell(R)) \wedge b = \nu\}.$$

(i) $j_\nu(R)$ es funcional:

$$\begin{aligned} &(\text{como } [|^\neg(n + m + 1 = \ell(R)) \wedge (n + m + 1 = \ell(R))|] = \phi) \\ &\models (n, m, b) \in J_\nu \wedge (m, n, b') \in J_\nu(R) \Rightarrow ((n, m, b) \in R \wedge (n, m, b') \in R) \vee (b = \nu \wedge b' = \nu \wedge^\neg((n + m + 1) = \ell(R)) \vee (b' = \nu \wedge^\neg(n + m + 1 = \ell(R)) \wedge (n, m, b) \in R) \vee (b = \nu \wedge^\neg(n + m + 1 = \ell(R)) \wedge (n, m, b') \in R)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow b = b' \vee b = b' \\ &\Rightarrow b = b'. \end{aligned}$$

(ii) $\text{dom } J_\nu(R) =^\neg \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\neg$:
es claro que

$$\models n + m + 1 = \ell(R) \Leftrightarrow (n, m) \in \text{dom } R \Leftrightarrow \exists_{b \in B}(n, m, b) \in R,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} &\models n + m + 1 = \ell(R) \vee^\neg(n + m + 1 = \ell(R)) \\ &\Rightarrow \exists_{b \in B}(n, m, b) \in R \vee^\neg(n + m + 1 = \ell(R)) \\ &(\text{como } \models \exists_{b \in B} b = \nu) \\ &\Rightarrow \exists_{b \in B}(n, m, b) \in R \vee^\neg(n + m + 1 = \ell(R)) \wedge \exists_b(b = \nu) \\ &\Rightarrow \exists_{b \in B}((n, m, b) \in R \vee^\neg(n + m + 1 = \ell(R)) \wedge b = \nu) \\ &\Leftrightarrow \exists_{b \in B}(n, m, b) \in J_\nu(R). \end{aligned}$$

Luego

$$\models n + m + 1 = \ell(R) \vee^\neg(n + m + 1 = \ell(R)) \Rightarrow \exists_{b \in B}(n, m, b) \in J_\nu(R),$$

lo que es equivalente a

$$[|n + m + 1 = \ell(R) \vee^\neg(n + m + 1 = \ell(R))|] \subseteq [|\exists_{b \in B}(n, m, b) \in J_\nu(R)|];$$

pero

$$[|n + m + 1 = \ell(R) \vee^\neg(n + m + 1 = \ell(R))|] = \text{verdad},$$

y entonces

$$[\exists_{b \in B}(n, m, b) \in J_\nu(R)] = \text{verdad.}$$

Así debemos tener que

$$\models \exists_{b \in B}(n, m, b) \in J_\nu(R),$$

por lo tanto

$$\models \forall_{(n, m)} \exists_{b \in B}(n, m, b) \in J_\nu(R),$$

es decir

$$\models \text{dom } J_\nu(R) = \lceil \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rceil$$

y (i), (ii) nos dicen que J_ν se factoriza por

$$B^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}.$$

Probemos que J_ν es natural, esto es si $f : B \rightarrow B'$ es cualquier flecha entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 M(B) & \xrightarrow{J_\nu} & B^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \\
 M(f) \downarrow & & \downarrow f^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \\
 M(B') & \xrightarrow{J_{f \circ \nu}} & B'^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &\models f^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(J_\nu(R)) \\
 &= f^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(\{(n, m, b) / (n, m, b) \in R \vee (n + m + 1 = \ell(R)) \wedge b = \nu\}) \\
 &= (\{(n, m, f(b)) / (n, m, b) \in R \vee (n + m + 1 = \ell(R)) \wedge b = \nu\}) \\
 &= \{(n, m, b') / \exists_b ((b' = f(b)) \wedge (n, m, b) \in R) \\
 &\quad \vee (n + m + 1 = \ell(R)) \wedge b = \nu \wedge b' = f(b)\} \\
 &= \{(n, m, b') / (n, m, b') \in M(f)(R) \vee (n + m + 1 = \ell(R)) \wedge b' = f(\nu)\} \\
 &= J_{f \circ \nu}(M(f)(R)),
 \end{aligned}$$

pero esto es

$$\models f^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}(J_\nu(R)) = J_{f \circ \nu}(M(f)(R)),$$

lo que prueba la naturalidad de J_ν . ■

3 Construcción del monoide

Sea (B, \cdot, e) un monoide con identidad. Nosotros aplicaremos el último lema a la identidad $e : 1 \rightarrow B$ y entonces podemos definir la siguiente flecha:

$$\mu_B : M(B) \xrightarrow{(J_e, \ell)} B^{\mathbb{N} \times \mathbb{N} * \mathbb{N}} \xrightarrow{(B^k \times \Sigma_0^{(-)}, i)} B^{\mathbb{N} * \mathbb{N}} \xrightarrow{\odot} B$$

donde $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es el isomorfismo de Cantor y \odot es la flecha iteración-finita definida en (1).

Proposición 8 *Sea (B, \cdot, e) un monoide con identidad $e : 1 \rightarrow B$, entonces:*

(i) *El siguiente diagrama commuta*

$$\begin{array}{ccc} & & \mu_B \\ & \nearrow \eta_B & \searrow id_B \\ M(B) & \longrightarrow & B \\ B & & \end{array}$$

(ii) $\mu_B : M(B) \rightarrow B$ preserva productos.

DEMOSTRACIÓN. Claramente tenemos que

(i) $\models J_e(\{(0, 0, b)\}) = \{(n, m, x)/(0, 0, b) = (n, m, x) \vee x = e \wedge (n \in s(\mathbb{N}) \vee m \in s(\mathbb{N}))\}$ entonces

$$\models B^K(J_e(i_B(b))) = \{(n, k)/(n, k) = (0, b) \vee x = e \wedge n \in s(\mathbb{N})\},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} & \models (B^K(J_e(i_B(b))), \ell(i_B(b))) \\ & = (\{(n, x) / (n, x) = (0, b) \vee x = e \wedge n \in s(\mathbb{N})\}, 1). \end{aligned}$$

Como $\models \sum 1 = 1$ y $\models \ell(i_B(b)) = 1$, tenemos que

$$\models \odot(B^K(J_e(i_B(b))), 1) = e \circ b = b$$

por propiedades de \odot y entonces $\models \mu_B(i_B(b)) = b$.

(ii) Por inducción tenemos: sea

$$S = \{n / \forall_{R_1}, \forall_{R_2} (\ell(R_1) = n \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(R_2))\}.$$

(α) Hemos visto que

$$\models \ell(R_2) = 0 \Rightarrow R_2 = \phi,$$

entonces

$$\models \mu_B(\phi) = \odot(B^K \times \sum((J_e, \ell)(\phi))) = \odot((\{(n, x) / x = e\}, 0)) = e,$$

por lo tanto

$$\models \ell(R_2) = 0 \Rightarrow \mu_B(R_1 * \phi) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(\phi) = \mu_B(R_1)$$

y así

$$\models \ell(R_2) = 0 \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(R_2),$$

entonces $\models 0 \in S$.

(β) Para cualquier variable R de tipo $M(B)$ como $\ell(R) > 0$ tenemos por las propiedades básicas de \odot que:

$$\begin{aligned} & \models \odot(B^K(J_e(R * i_B(b))), \sum_0^{\ell(R)} i + \ell(R) + 1) \\ & = \odot(B^K \circ J_e(R * i_B(b)), \sum_0^{\ell(R)} i + \ell(R)) \cdot b \end{aligned}$$

de la construcción de J_e tenemos:

$$\models B^K(J_e(R * i_B(b)))i = B^K \circ J_e(R)(i - \ell(R)).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 & \odot(B^K(J_e(R * i_B(b)))j, \sum_0^{\ell(R)} i + \ell(R) + 1) \\
 = & \odot(B^K(J_e(R)(j - \ell(R))), \sum_0^{\ell(R)} i + \ell(R)) \cdot b \\
 = & \odot(B^K(J_e(R))j, \sum_0^{\ell(R)} i) \cdot b,
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\models \odot(B^K \circ J_e(R * i_B(b)), \sum_0^{\ell(R)+1} i) = \odot(B^K \circ J_e(R), \sum_0^{\ell(R)} i) \cdot b$$

y entonces

$$\models \mu_B(R * i_B(b)) = \mu_B(R) \cdot b.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 \models n \in S \wedge \ell(R_2) = s(n) & \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) \\
 = & \mu_B(R_1 * (r(R_2) * i_B(\theta(R_2)))) \\
 = & \mu_B((R_1 * r(R_2)) * i_B(\theta(R_2))) \\
 = & \mu_B(R_1 * r(R_2)) \cdot \theta(R_2) \\
 = & (\mu_B(R_1) \cdot \mu_B(r(R_2))) \cdot \theta(R_2) \\
 = & \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(r(R_2) * i_B(\theta(R_2))) \\
 = & \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(R_2),
 \end{aligned}$$

entonces

$$\models n \in S \wedge \ell(R_2) = s(n) \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(R_2),$$

o equivalentemente

$$\models n \in S \Rightarrow (\ell(R_2) = s_n \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(R_2));$$

y entonces

$$\models n \in S \Rightarrow s(n) \in S.$$

Por inducción tenemos que $\mathbb{N} = S$ y la prueba queda lista. ■

Teorema 9 $(M(X), \eta_X)$ es el monoide libre generado por X .

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : X \longrightarrow B$ cualquier flecha y (B, \cdot, e) es un monoide con identidad $e : 1 \longrightarrow B$. La proposición 8 nos dice que existe $\mu_B : M(B) \longrightarrow B$ tal que preserva productos y $\mu_B \circ \phi^B = e$, por lo tanto tenemos que el siguiente diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & M(g) & & \mu_B & \\
 M(X) \xrightarrow{\quad} & M(B) \xrightarrow{\quad} & B & & \\
 \eta_X \uparrow & \eta_B \uparrow & id_B \nearrow & & \\
 X \xrightarrow{g} & B & & &
 \end{array}$$

$M(g)$ preserva productos e identidades y entonces $\mu_B \circ M(g)$ hace lo mismo por la proposición 6, $\mu_B \circ M(g)$ es único tal que conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mu_B \circ M(g) & \\
 M(X) \xrightarrow{\quad} & B & \\
 \eta_X \uparrow & g \nearrow & \\
 X & &
 \end{array}$$

por lo tanto η_X es una flecha universal y la prueba queda completa. ■

Referencias

- [1] Acuña–Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*, Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, CT.
- [2] Acuña–Ortega, O. (2011) “Una nota sobre objetos $k-finitos$ en un topos Booleano con el objeto de los números naturales”, *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* 19(2): 239–245.
- [3] Acuña–Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) “Finiteness and decidability I”, in: *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics 753, Springer–Verlag, New York: 80–100.