Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones
ISSN: 1409-2433
mta.cimpa@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

ACUÑA–ORTEGA, OSVALDO
SEMIRETÍCULOS Y OBJETOS K-FINITOS
Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, vol. 24, núm. 1, enero, 2017, pp. 1-7
Universidad de Costa Rica
San José, Costa Rica

REVISTA DE MATEMÁTICA: TEORÍA Y APLICACIONES 2017 **24**(1) : 1–7
CIMPA – UCR ISSN: 1409-2433 (PRINT), 2215-3373 (ONLINE)

SEMIRETÍCULOS Y OBJETOS K-FINITOS

SEMILATTICES AND K-FINITE OBJECTS

OSVALDO ACUÑA–ORTEGA*

Received: 10/Sep/2015; Revised: 9/Aug/2016;
Accepted: 7/Oct/2016

*CIMPA, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. E-Mail: maritzaavendanorivera@hotmail.es

Resumen

Se prueba que si X es un objeto de un topos elemental entonces las propiedades siguientes son equivalentes: (a) X es $K-$finito, (b) para todo semiretículo con uniones binarias B, la diagonal $B \to B^X$ tiene un adjunto izquierdo.

Palabras clave: topos; objetos k-finitos; semiretículos; decidibilidad.

Abstract

We prove that for $X \in |E|$, E elementary topos, the following properties are equivalent: (a) X is $K-$finite, (b) for every upper semilattice B, the diagonal $B \to B^X$ has a left adjoint.

Keywords: topoi; k-finite objects; semilattice; decidability.

Mathematics Subject Classification: 03G30, 18B25.

1 Introducción

Sea E un topos elemental arbitrario. Sea $(B, \leq)$ un objeto parcialmente ordenado, B es completo si $\downarrow \mathrm{seg}_B : B \to \Omega^B$ tal que $\models \downarrow \mathrm{seg}_B(b) = \{x/x \leq b\}$ tiene un adjunto izquierdo $\sup_B : \Omega^B \to B$. Si $(B, \leq)$ es un objeto parcialmente ordenado, $F : X \to \Omega^B$ se dice ser dirigido si:

(a) Existe $\beta : Y \to X$ sobreyectiva y $b : Y \to B$ tal que $b \in \beta \circ F$.

(b) Para toda $\alpha : Z \to X$ y todo par $b_1, b_2 : Z \to B$ tal que $b_1 \in \alpha \circ F$ y $b_2 \in \alpha \circ F$ existe $\beta_1 : Z_1 \to Z$ sobreyectiva y $b_3 : Z_1 \to B$ tal que $b_3 \in \beta_1 \circ \alpha \circ F$ y $\beta_1 \circ b_i \leq b_3$, para $i = 1, 2$.

Si B es completo, defina $\mathrm{S}(B)$ como el objeto de los elementos finitos de B tal que

$$\{b \in B/\ \forall F \in \Omega^B (F \text{ es dirigido} \wedge b \leq \sup_B(F) \Rightarrow \exists x \in B(x \in F \wedge b \leq x))\}$$

Denote por S_B la inclusión de $\mathrm{S}(B)$ en Ω^B. Decimos que $b : X \to B$ es finito si b se factoriza a través de S_B. Para todo $X \in |E|$, Ω^X es un objeto completo, ordenado, con $U_x : \Omega^{\Omega^X} \to X$ el adjunto izquierdo de $\downarrow \mathrm{seg}_{\Omega^X}$, donde U_X es definido por:

$$\models U_X(F) = \{x \in X/\ \exists u \in \Omega^X (u \in F \wedge x \in u)\}.$$

Definición 1 *Un semiretículo con uniones binarias, en un topos elemental E es un objeto $B \in |E|$ parcialmente ordenado con un orden parcial $\leq \subseteq B \times B$ tal que B posee dos operaciones $0 : 1 \to B$ y $v : B \times B \to B$, con $\omega_B : B \to 1$, el único morfismo de $B \to 1$ siendo adjunto derecho de $0 : 1 \to B$ y $\triangle_B : B \to B \times B$ la diagonal de B tal que es adjunto derecho de $v : B \times B \to B$.*

Nota. Si B es un semiretículo completo, entonces $\mathrm{S}(B)$ es un semiretículo con uniones binarias de B.

Sea A un objeto de E, denote por $\mathrm{K}(A)$ el más pequeño subobjeto de Ω^A que contiene a $\{\}_A : A \to \Omega^A$ y a $\ulcorner \phi_A \urcorner : 1 \to \Omega^A$ y es cerrado bajo uniones binarias. A es $K-$finito si $\mathrm{true}_A : 1 \to \Omega^A$ se factoriza a través de $\mathrm{K}(A)$.

Nota. Si A es un objeto de E entonces $\mathrm{S}(\Omega^A) = \mathrm{K}(A)$.

Definición 2 *Un objeto B de un topos elemental y $\leq \subseteq B \times B$ tal que $(B, \leq)$ es un objeto ordenado. Decimos que $(B, \leq)$ es retículo algebraico si $(B, \leq)$ es un orden completo tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \Omega^B \arrow[r, "\Omega^{\mathrm{S}_B}"] & \Omega^{\mathrm{S}(B)} \arrow[r, "\exists\, \mathrm{S}_B"] & \Omega^B \\ B \arrow[u, "\downarrow \mathrm{seg}_B"] \arrow[rr, "id_B"'] & & B \arrow[u, "\downarrow \mathrm{seg}_B"'] \end{tikzcd}$$

Internamente esto se expresa como

$$\models \forall b \in B, b = \sup_B \{a/a \in \mathrm{S}(B) \wedge a \leq b\}.$$

Para todo $X \in |E|$, Ω^X es un retículo algebraico ya que $\{\}_X : X \to \Omega^X$ está contenido en $\mathrm{S}(\Omega^X) = \mathrm{K}(X)$, y $\models Z \in \Omega^X, Z = U_X\{\{x\}/x \in Z\}$.

Si V es cualquier semiretículo con uniones binarias en un topos elemental E, denote por $\mathrm{P}(V)$ al subobjeto de

$$\{V' \in \Omega^V / V' \text{ es un ideal de } V\} \to \Omega^V.$$

La fórmula "V' es un ideal de V" resulta ser:

$$\forall v' \in V, \forall v \in V ((v' \in V' \wedge v \leq v' \Rightarrow v \in V') \wedge (v \in V' \wedge v' \in V' \Rightarrow v \vee v' \in V')).$$

El siguiente Teorema es un resultado de la teoría de retículos probado por Birkhoff [3] y Nachbin [4] y elevado a la teoría de topos.

Teorema 1 *(i) Si V es un semiretículo con uniones binarias en un topos elemental E, $\mathrm{P}(V)$ es un retículo algebraico y $\mathrm{S}(\mathrm{P}(V)) = V$.*

(ii) Cualquier retículo algebraico a en E es isomorfo a $\mathrm{P}(V)$ con V un semiretículo con uniones en E.

Proposición 2 *Sea B un objeto completo, ordenado, en un topos E, entonces existe un único morfismo $\mu_{\mathrm{S}(B)} : \mathrm{K}(\mathrm{S}(B)) \to \mathrm{S}(B)$, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{\mathrm{S}(B)} \arrow[r, "\exists\,\mathrm{S}(B)"] & \Omega^B \arrow[r, "\sup_B"] & B \\
\mathrm{K}(\mathrm{S}(B)) \arrow[u, "\mathrm{K}_{\mathrm{S}(B)}"] \arrow[rr, "\mu_{\mathrm{S}(B)}"'] & & \mathrm{S}(B) \arrow[u, "\mathrm{S}_B"']
\end{tikzcd}$$

La prueba de esta proposición aparece en [1] (Corolario 1.8).

Proposición 3 *Si X es $K-$finito, entonces la fila imagen $Im : B^X \to \Omega^B$ se factoriza a través de $\mathrm{K}(B)$.*

Prueba. Sea
$L_X = \{b \in \Omega^X / \forall R \in \Omega^{X\times B}(R \text{ es funcional} \wedge \mathrm{dom}(R) = b \Rightarrow \mathrm{codom}(R) \in \mathrm{K}(B))\}$

(i) $\{\}_X : X \to \Omega^X$ se factoriza a través de L_X.
$\models a \in X \wedge R$ es un funcional $\wedge\, \mathrm{dom}(R) = \{a\}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \exists! b \in B, (a,b) \in R \\
&\Rightarrow \quad \exists b \in B, \{(a,b)\} = R \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{codom}(R) = \{b\} \wedge \mathrm{dom}(R) = \{a\} \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{codom}(R) \in \mathrm{K}(B).
\end{aligned}$$

Así tenemos que,

$\models a \in X \Rightarrow \forall R(R \text{ funcional} \wedge \mathrm{dom}(R) = \{a\} \Rightarrow \mathrm{codom}(R) \in \mathrm{K}(B))$

entonces $\models a \in X \Rightarrow \{a\}_X \in L_X$ y así $\{\}_X$ se factoriza a través de L_X.

(ii) $\ulcorner \phi_X \urcorner$ se factoriza a través de L_X.
Probemos que $\models R \in \Omega^{X\times B}(\mathrm{dom}(R) = \phi \Rightarrow R = \phi)$:

$$\begin{array}{rcl} \models \mathrm{dom}(R) = \phi & \Leftrightarrow & \exists PR_1(R) = \phi \\ & \Rightarrow & \Omega^{PR_1}(\exists PR_1(R)) = \Omega^{PR_1}(\phi) = \phi. \\ (\exists PR_1 \vdash \Omega^{PR_1}) & \Rightarrow & R \leq \Omega^{PR_1}(\exists PR_1(R)) = \phi \\ & \Rightarrow & R = \phi. \end{array}$$

Así

$$\begin{array}{rcl} \models R \text{ funcional} \wedge \mathrm{dom}(R) = \phi & \Rightarrow & R = \phi \\ & \Rightarrow & \mathrm{codom}(R) = \phi \\ & \Rightarrow & \mathrm{codom}(R) \in \mathrm{K}(B) \end{array}$$

entonces

$$\forall R(R\text{funcional}\wedge\mathrm{dom}(R)=\phi\Rightarrow\mathrm{codom}(R)\in\mathrm{K}(B)\text{ siysolosi } \models\ulcorner \phi_X \urcorner\in L_X).$$

(iii) L_X es cerrado bajo uniones binarias.
Defina $R|_{(-)}$ como sigue: $\models R|_a = \{(\overline{a}, b)/\ \overline{a} \in a \wedge (\overline{a}, b) \in R\}$. Se tiene que:

$\models a, b \in L_X \wedge R$ es funcional $\wedge\, \mathrm{dom}(R) = a \cup b$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow & a, b \in L_X \wedge R|_a \cup R|_b = R \wedge R|_a \text{ es funcional}\wedge \\ & R|_b\text{es funcional} \wedge \mathrm{dom}(R|_a) = a \wedge \mathrm{dom}(R|_b) = b \\ \Rightarrow & \mathrm{codom}(R|_a) \in \mathrm{K}(B) \wedge \mathrm{codom}(R|_b) \in \mathrm{K}(B) \wedge \\ & \mathrm{codom}(R|_a \cup R|_b) = \mathrm{codom}(R|_a \cup \mathrm{codom}(R|_b)) \\ \Rightarrow & \mathrm{codom}(R|_a \cup R|_b) \in \mathrm{K}(B) \\ \Rightarrow & \mathrm{codom}(R) \in \mathrm{K}(B). \end{array}$$

Entonces $\models a, b \in L_X \Rightarrow V_R(R \text{ funcional} \wedge \mathrm{dom}(R) = a \cup b \Rightarrow \mathrm{codom}(R) \in \mathrm{K}(B))$ y así $\models a, b \in L_X \Rightarrow a \cup b \in L_X$, y luego por $(i), (ii), (iii)$ se tiene que $\mathrm{K}(X) \subseteq L_X$. Como X es $K-$finito se tiene que $\ulcorner X \urcorner \in L_X$, pero $\ulcorner X \urcorner \in L_X$ si y solo si Im se factoriza a través de $\mathrm{K}(B)$.

2 Resultado principal

Teorema 4 *Para $X \in |E|$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X es $K-$finito.

(ii) Para todo semiretículo con uniones binarias B, la diagonal $\triangle_B^X : B \to B^X$ tiene un adjunto izquierdo.

Prueba. $(ii) \Rightarrow (i)$ $\mathrm{K}(X)$ es un semiretículo con uniones binarias entonces $\triangle_{\mathrm{K}(X)}^X : \mathrm{K}(X) \to \mathrm{K}(X)^X$ tiene un adjunto izquierdo V_X, entonces

$$\begin{aligned} \models f \in \mathrm{K}(X)^X \quad &\Rightarrow \quad f \leq \triangle_{\mathrm{K}(X)}^X \circ V_X(f) \\ &\Rightarrow \quad \forall a(f(a) \leq \triangle_{\mathrm{K}(X)}^X(V_X(f)(a))) \\ &\Rightarrow \quad \forall a(f(a) \leq V_X(f)) \end{aligned}$$

entonces

$$\models f \in \mathrm{K}(X)^X \Rightarrow \{a \in X / \exists \in X, a \in f(x)\} \subseteq V_X(f).$$

En particular $\models \{a \in X/ \ \exists x \in X, a \in \{x\}\} \subseteq V_X(\{\}_X)$, pero $\{a \in X/ \ \exists x \in X, a = x\} = X$, entonces $\models \ulcorner X \urcorner \subseteq V_X(\{\}_X)$ y así tenemos que $\models \ulcorner X \urcorner = V_X(\{\}_X)$, por lo que $\ulcorner X \urcorner$ se factoriza a través de $\mathrm{K}(X)$ y entonces X es $K-$finito.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Sea B un semiretículo con uniones binarias. Defina V_B^X la composición $Im \circ \mu_B : B^X \to \mathrm{K}(B) \to B$. Probaremos que V_B^Xes un adjunto izquierdo a la función diagonal $\triangle_B^X$. Sabemos que el siguiente diagrama conmuta, por el Teorema 1 y la Proposición 2:

$$\begin{tikzcd} \Omega^B \arrow[r, "\exists \mathrm{S}_{\mathrm{P}(R)}"] & \Omega^{\mathrm{P}(B)} \arrow[r, "\sup_{\mathrm{P}(B)}"] & \mathrm{P}(B) \\ \mathrm{K}(B) \arrow[u, "\mathrm{K}_B"] \arrow[rr, "\mu_B"'] & & B \arrow[u, "\mathrm{S}_{\mathrm{P}(B)}"'] \end{tikzcd}$$

Por tanto, $\models F \in \Omega^B, F \in \mathrm{K}(B) \Rightarrow \mu_B(F) = \sup_{\mathrm{P}(B)}(F)$. Por otro lado, como $\sup_{\mathrm{P}(B)}$ es el sup para $\mathrm{P}(B)$, tenemos que

$$\models F \in \Omega^B, F \in \mathrm{K}(B) \Rightarrow (\sup_{\mathrm{P}(B)}(F) \leq a \Leftrightarrow \forall b(b \in F \Rightarrow b \leq a))$$

y así

$$\models F \in \Omega^B, F \in \mathrm{K}(B) \Rightarrow (\mu_B(F) \leq a \Leftrightarrow \forall b(b \in F \Rightarrow b \leq a)).$$

Como Im se factoriza a través de $\mathrm{K}(B)$, tenemos que $\models f \in B^X \Rightarrow Im(f) \in \mathrm{K}(B)$ por lo que

$$\models f \in B^X (u_B(Im(f)) \leq a \Leftrightarrow \forall b(b \in Im(f) \Rightarrow b \leq a))$$

y entonces $\models f \in B^X (u_B(Im(f)) \leq a \Leftrightarrow \triangle_B^X(a))$. Por tanto $Im \circ u_B \vdash \triangle_B^X$.

De esta forma se obtiene el resultado anunciado. ■

Referencias

[1] Acuña–Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*. Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, CT.

[2] Acuña–Ortega, O. (2011) "Una nota sobre objetos k-finitos en un topos Booleano con el objeto de los números naturales", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **19**(2): 239–245.

[3] Birkhoff, G. (1973) *Lattice Theory*, 3rd Ed. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXV, Providence RI.

[4] Nachbin, L. (1949) "On a characterization of the lattice of all ideals of a Boolean ring", *Fundamenta Mathematicae*, **36**(1): 137–142.