REVISTA DE MATEMÁTICA: TEORÍA Y APLICACIONES 2017 **24**(1) : 9–28
CIMPA – UCR ISSN: 1409-2433 (PRINT), 2215-3373 (ONLINE)

LÍMITES DIRECTOS DE PROLONGACIONES DE ALGEBROIDES DE LIE

DIRECT LIMITS OF LIE ALGEBROIDS PROLONGATIONS

PATRICK CABAU*

23/Jun/2015; Revised: 18/Aug/2016;
Accepted: 7/Oct/2016

---

*Lycée Pierre de Fermat, Parvis des Jacobins, 31000 Toulouse, France. E-Mail: Patrick.Cabau@ac-toulouse.fr

Resumen

Probamos que se puede definir estructuras de espacios convenientes sobre límites directos de algebroides de Lie y sus prolongaciones.

Palabras clave: límite directo; algebroide de Lie; prolongación de algebroide de Lie; cálculo diferencial conveniente.

Abstract

We prove that direct limits of Lie algebroids and their prolongations can be endowed with structures of convenient spaces.

Keywords: direct limit; Lie algebroid; prolongation of Lie algebroid; convenient calculus.

Mathematics Subject Classification: 46A13, 46T05, 58A32

1 Introduction

Los algebroides de Lie definidos por J. Pradines en [17] constituyen una generalización natural de las álgebras de Lie y de los fibrados tangentes a una variedad.

En los últimos años, esta noción se ha revelado fecunda en Mecánica, Geometría simpléctica y teoría del Control óptimo. En [19], Weinstein plantea el problema de un posible desarrollo de un formalismo geométrico sobre algebroides de Lie similar al formalismo de Klein en Mecánica Lagrangiana. En [15], Martínez da una respuesta positiva a este problema usando la noción de prolongación de un algebroide de Lie introducida por Higgins y Mackenzie en [10].

En este artículo nos interesamos a los límites directos de tales estructuras y obtenemos los resultados dados en los teoremas 21 y 22 de la última sección: se puede definir sobre estos límites una estructura conveniente.

En la sección 2 recordamos el formalismo conveniente desarrollado en [12]. Desarrollamos la noción de límite directo de diferentes estructuras (espacios vectoriales topologicos, variedades, fibrados vectoriales) en las secciones 3 y 4. Entonces, obtenemos estructuras convenientes sobre estos límites (Proposición 6 y Proposición 11). En la sección 5 recordamos las nociones de algebroides de Lie y sus prolongaciones. En la última sección probamos que se puede definir sobre límites directos de tales objetos estructuras convenientes y damos el ejemplo del oscilador armónico conveniente.

2 Cálculo diferencial conveniente

Con el fin de equipar un espacio vectorial topológico de Haussdorf localmente convexo (e.v.t.l.c.) E con una estructura diferencial, como introducida por Frölicher, Kriegl y Michor, se utiliza la noción de curva diferenciable $c : \mathbb{R} \to E$ de clase C^∞ que no plantea ningún problema.

La propiedad clave es la de c^∞-completitud.

Definición 1 *Se dice que un e.v.t.l.c. E es c^∞-completo o conveniente si se cumple la propiedad siguiente: Dado $B \subset E$ un conjunto cerrado, acotado y absolutamente convexo, el espacio lineal E_B generado por B es un espacio de Banach.*

Un e.v.t.l.c. conveniente es Mackey completo (cf. [12] Teorema 2.14).

La c^∞-topología de un e.v.t.l.c. es la topología final inducida por la familia de las curvas C^∞ $\mathbb{R} \to E$; se denotará por $c^\infty E$. A sus conjuntos abiertos los llamaremos c^∞-abiertos.

Nótese que la c^∞-topología es en general más fina que la topología original. En los espacios de Fréchet, esta topología coincide con la topología del e.v.t.l.c.

En general, $c^\infty E$ no es un espacio vectorial localmente convexo.

Sean E y F dos espacios convenientes y sea $U \subset E$ un c^∞-abierto. Se dice que una aplicación $f : E \supset U \to F$ es c^∞ si $f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, F)$ para cada $c \in C^\infty(\mathbb{R}, U)$.

Además, se puede definir una estructura de espacio vectorial c^∞-completo sobre el espacio $C^\infty(U, F)$ (cf. [12], 2.3 (5)).

Proposición 2 *Los límites, las sumas directas y los límites directos estrictos de espacios convenientes son espacios convenientes.*

Las nociones de variedad conveniente (véase [12], 27.) y de fibrado vectorial conveniente (véase [12], 29.) se definen de manera natural.

3 Límites directos de espacios vectoriales topológicos

En esta sección vamos a referirnos a [1], [6] y [7].

Sea $(I, \leq)$ un conjunto direccionado. Un *sistema directo* en una categoría $\mathbb{A}$ es un par $\mathcal{S} = \left(X_i, \varepsilon_i^j\right)_{i\in I,\, j\in I,\, i\leq j}$ donde X_i es un objeto de la categoría y los $\varepsilon_i^j : X_i \longrightarrow X_j$ son homomorfismos (*bonding maps*) que cumplen las propiedades siguientes:

1. $\forall i \in I, \varepsilon_i^i = \mathrm{Id}_{X_i}$.
2. $\forall (i,j,k) \in I^3, i \leq j \leq k,\ \varepsilon_j^k \circ \varepsilon_i^j = \varepsilon_i^k$.

Un *cono* sobre $\mathcal{S}$ es un par $(X, \varepsilon_i)_{i\in I}$ donde $X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{A}$, $\varepsilon_i : X_i \longrightarrow X$ y los homomorfismos $\varepsilon_i^j : X_i \longrightarrow X_j$ verifican las relaciones $\varepsilon_j \circ \varepsilon_i^j = \varepsilon_i$ para $i \leq j$.

Un cono $(X, \varepsilon_i)_{i\in I}$ es un límite directo de $\mathcal{S}$ si para cualquier cono $(Y, \theta_i)_{i\in I}$ sobre $\mathcal{S}$ existe un único homomorfismo $\psi : X \longrightarrow Y$ tal que $\psi \circ \varepsilon_i = \theta_i$. En tal caso, escribiremos $X = \varinjlim \mathcal{S}$ o $X = \varinjlim X_i$.

Cuando $I = \mathbb{N}$ dotado de la relación de orden en los números naturales, los sistemas directos numerables se llaman *sucesiones directas*.

3.1 Límites directos de conjuntos

Sea $\mathcal{S} = \left(X_i, \varepsilon_i^j\right)_{i\in I,\ j\in I,\ i\leq j}$ un sistema directo de conjuntos ($\mathbb{A} = \mathbb{SET}$).

Sea $\mathcal{U} = \coprod\limits_{i\in I} X_i = \{(x,i) : x \in X_i\}$ la unión disjunta de los conjuntos X_i con la inclusión canónica $\begin{array}{rccc} \iota_i : & X_i & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ & x & \mapsto & (x,i)\,. \end{array}$ Se define una relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathcal{U}$ de la manera siguiente: $\iota_i(x) \sim \iota_j(y)$ si existe $k \in I$: $i \leq k$ y $j \leq k$ tales que $\varepsilon_i^k(x) = \varepsilon_j^k(y)$. Tenemos el conjunto cociente $X = \mathcal{U}/\sim$ y la aplicación $\varepsilon_i : \pi \circ \iota_i$ donde $\pi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}/\sim$ es la aplicación canónica suprayectiva.

Entonces, (X, ε_i) es el límite directo $\mathcal{S}$ en la categoría $\mathbb{SET}$.

Si cada ε_i^j es inyectiva entonces ε_i es inyectiva. Por supuesto S es equivalente al sistema directo de los subconjuntos $\varepsilon_i(X_i) \subset X$, con las inclusiones canónicas.

3.2 Límites directos de espacios topólogicos

Si $\mathcal{S} = \left(X_i, \varepsilon_i^j\right)_{i\in I,\ j\in I,\ i\leq j}$ es un sistema directo de espacios topológicos X_i donde ε_i^j son aplicaciones continuas, entonces el límite directo $(X, \varepsilon_i)_{i\in I}$ en la categoría de conjuntos coincide con el límite directo en la categoría $\mathbb{TOP}$ de los espacios topológicos si X tiene la *DL-topología*, i.e. la topología más fina para la cual todas las aplicaciones ε_i son continuas. Entonces $O \subset X$ es abierto si y sólo si $\varepsilon_i^{-1}(O)$ es abierto en X_i para cada $i \in I$.

$\mathcal{S}$ es *estricto* si cada ε_i^j es un encaje. En esta situación, cada ε_i es un encaje.

Demos ahora algunas propiedades de sucesiones crecientes de espacios topológicos ([7], Lema 1.7):

Proposición 3 *Sea $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ una sucesión creciente de espacios topológicos tales que las inclusiones son continuas. Ponemos en $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n$ la topología final correspondiente a la familia de las inclusiones $\varepsilon_n : X_n \hookrightarrow X$ (i.e. la DL-topología). Entonces, tenemos las propiedades siguientes:*

1. *Si cada X_n es T_1, entonces X es T_1.*
2. *Si $O_n \subset X_n$ es abierto y $O_1 \subset O_2 \subset \cdots$, entonces $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$ es un abierto de X y la DL-topología sobre $O = \varinjlim O_n$ coincide con la topología inducida por X.*
3. *Si cada X_n es localmente compacto, entonces X es Haussdorf.*
4. *Si cada X_n es T_1 y $K \subset X$ es compacto, entonces $K \subset X_n$ para cierto n.*

3.3 Límites directos de espacios vectoriales topológicos de dimension finita

Sea E un espacio vectorial real de dimensión numerable.

Sea $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ una sucesión creciente de subespacios vectoriales de E de dimensión finita tal que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$. Se obtiene una sucesión directa estricta de subespacios vectoriales dotada de la topología final por las inclusiones $E_n \hookrightarrow E$.
Entonces $O \subset X$ es abierto si y sólo si $\varepsilon_n^{-1}(O)$ es un abierto de X_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Puesto que los espacios son de dimensiones finitas esta topología coincide con la más fina topología de espacio vectorial localmente convexo ([6], Ejemplo 3.5); el conjunto de todos los subconjuntos equilibrados, absorbentes y convexos es una base para esta topología.
Además E es un espacio vectorial conveniente ([6], Lema 6.1).

Tenemos la relación que sigue entre la diferenciabilidad C^∞ y la c^∞ ([7], Lema 1.9)

Lema 4 *Para una aplicación $f : O \longrightarrow F$ donde $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$ es una sucesión creciente de conjuntos abiertos ($O_n \subset E_n$) y F un e.v.t.l.c. real y Mackey completo tenemos la equivalencia siguiente: f es C^∞ si y sólo si f es c^∞.*

Ejemplo 5 *El espacio vectorial $\mathbb{R}^\infty$, también denotado por $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, de todas las sucesiones finitas es el límite directo estricto de $\left(\mathbb{R}^i, \varepsilon_i^j\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\, i \leq j}$ donde*

$\varepsilon_i^j : (x_1, \ldots, x_i) \mapsto (x_1, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$.
Es un espacio vectorial numerable y conveniente ([12], 47.1). Una base de $\mathbb{R}^\infty$ *es* $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ *donde* $e_i = \left(0, \ldots, 0, \underset{i^{th} \text{ term}}{1}, 0, \ldots\right) \in \varepsilon_i\left(\mathbb{R}^i\right)$.

4 Límites directos de variedades

4.1 Límites directos de sucesiones crecientes de variedades de dimensión finita

Combinando los resultados obtenidos por Glöckner ([7], Teorema 1 y Proposición 3.6), obtenemos:

Teorema 6 *Sea* $\mathcal{M} = \left(M_i, \varepsilon_i^j\right)_{i \in \mathbb{N}^*,\, j \in \mathbb{N}^*,\, i \leq j}$ *una sucesión directa de variedades de clase* C^∞ *paracompactas de dimensión finita donde* $\varepsilon_i^j : M_i \longrightarrow M_j$ *son inmersiones inyectivas de clase* C^∞. *Sea* $s = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} (\dim M_i) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. *Hay una única estructura de variedad* c^∞ *modelada sobre* $\mathbb{R}^\infty$ *por la cual* $\varepsilon_n : M_n \longrightarrow M = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} M_i$ *es una aplicación de clase* c^∞ *para cada* $n \in \mathbb{N}^*$ *y tal que* $(M, \varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \varinjlim \mathcal{S}$ *en la categoría de las variedades convenientes.*

Ejemplo 7 *La esfera* $\mathbb{S}^\infty$ *([12], 47.2).– El espacio conveniente* $\mathbb{R}^\infty$ *es equipado con el producto escalar débil dado por la suma finita* $\langle x, y \rangle = \sum\limits_i x_i y_i$ *bilineal y acotada. El límite inductivo de* $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2 \subset \cdots$ *es el subconjunto cerrado* $\mathbb{S}^\infty = \{x \in \mathbb{R}^\infty : \langle x, x \rangle = 1\}$ *de* $\mathbb{R}^\infty$. *Es una variedad conveniente modelada sobre* $\mathbb{R}^\infty$.

4.2 Funciones sobre límites directos de variedades

Sea $\mathcal{M} = \left(M_i, \varepsilon_i^j\right)_{i \in \mathbb{N}^*,\, j \in \mathbb{N}^*,\, i \leq j}$ una sucesión directa de variedades de clase C^∞ donde $\varepsilon_i^j : M_i \longrightarrow M_j$ son inmersiones inyectivas C^∞. Podemos identificar M_i con el subconjunto $\varepsilon_i^j(M_i)$ de M_j. El álgebra de las funciones reales definidas sobre M_i se denotará por $\mathcal{F}(M_i)$. Entonces, podemos definir la sucesión $\mathcal{F} = \left(\mathcal{F}(M_i), \delta_i^j\right)_{i \in \mathbb{N}^*,\, j \in \mathbb{N}^*,\, i \leq j}$ con las aplicaciones

$$\begin{array}{rccc} \delta_i^j : & \mathcal{F}(M_j) & \longrightarrow & \mathcal{F}(M_i) \\ & f_j & \longmapsto & f_i \end{array}$$

donde $\delta_i^j = \left(\varepsilon_i^j\right)^*$, i.e. $\delta_i^j(f_j) = f_j \circ \varepsilon_i^j$. Estas aplicaciones satisfacen las condiciones $\delta_i^j \circ \delta_j^k = \delta_i^k$ para cada $i \leq j \leq k$. Entonces $\mathcal{F}$ es una *sucesión proyectiva* y se puede identificar el límite proyectivo $\varprojlim \mathcal{F}(M_i)$ con $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \mathcal{F}(M_i)$.

Sea $f = \varprojlim f_i$ el límite proyectivo de funciones $f_i : M_i \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞. f es c^∞ (cf. [7]).
Para cada $x \in M$ se define la diferencial $df_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente: si $x \in M_k$, entonces $df(x) = df_k(x_k)$:$T_{x_k}M_k \longrightarrow \mathbb{R}$.

4.3 Límites directos de campos de vectores

Sea $\mathcal{M} = \left(M_i, \varepsilon_i^j\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\, j\in\mathbb{N}^*,\, i\leq j}$ una sucesión directa de variedades paracompactas de clase C^∞ donde $\varepsilon_i^j : M_i \longrightarrow M_j$ son inmersiones inyectivas C^∞. Entonces podemos equipar $\mathcal{T} = \left(TM_i, T\varepsilon_i^j\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\, j\in\mathbb{N}^*,\, i\leq j}$ con una estructura de fibrado vectorial conveniente (cf. [18]).

Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión de campos de vectores $X_i \in \mathfrak{X}(M_i)$ tal que:

$$T\varepsilon_i^j \circ X_i = X_j \circ \varepsilon_i^j.$$

Podemos definir una sección c^∞ de $\varinjlim TM_i$ como $\varinjlim X_i$.

Ejemplo 8 $X = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ *es un campo de vectores de* $\mathbb{R}^\infty$*definido de la manera siguiente: sea* $x \in \mathbb{R}^\infty$*; existe* $n = n(x) \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $x = \iota_n(x_1, \ldots, x_n)$ *donde* $\iota_n : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ *es la inyección canónica. Tenemos así* $X_x = \sum\limits_{i=1}^{n(x)} x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

4.4 Límites directos de grupos de Lie

Podemos encontrar en [7], Teorema 4.3 (d), el resultado siguiente a propósito del límite directo de una sucesión de groupos de Lie de dimension finita.

Proposición 9 *Sea una sucesión de grupos de Lie reales de dimension finita y de clase* C^∞ $\mathcal{G} = \left(G_i, \varepsilon_i^j\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\, j\in\mathbb{N}^*,\, i\leq j}$ *donde* $\varepsilon_i^j : G_i \longrightarrow G_j$ *son* C^∞*-homomorfismos. Entonces* $G = \varinjlim G_i$ *es un grupo de Lie* c^∞*-regular.*

Ejemplo 10 $GL(\infty, \mathbb{R}) = \varinjlim GL(\mathbb{R}^n)$ *es un grupo de Lie conveniente.*

4.5 Límites directos de fibrados vectoriales

Denotamos la inyección canónica $\mathbb{R}^i \hookrightarrow \mathbb{R}^j$ por ι_i^j.

Sea $\mathcal{M} = \left(M_i, \varepsilon_i^j\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\ j\in\mathbb{N}^*,\ i\leq j}$ una sucesión directa de variedades paracompactas de clase C^∞ y de dimension finita ($\dim M_i = d_i$) donde $\varepsilon_i^j : M_i \longrightarrow M_j$ son inmersiones inyectivas de clase C^∞. Podemos suponer que $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$. Aquí consideramos la situación donde $\sup d_i = +\infty$.

Par cada número natural i, sea (E_i, π_i, M_i) un fibrado vectorial cuya fibra es isomorfa al espacio vectorial $\mathbb{E}_i$ de dimensión r_i (que se puede identificar a $\mathbb{R}^{r_i}$) donde $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} r_i = +\infty$. Supongamos que $\mathcal{E} = \left(E_i, \lambda_i^j\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\ j\in\mathbb{N}^*,\ i\leq j}$ es una sucesión directa de variedades donde $\lambda_i^j : E_i \longrightarrow E_j$ son inmersiones inyectivas de clase C^∞ y morfismos de fibrados vectoriales. Supongamos también que $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$.

A la sucesión $\mathcal{E} = \left((E_i, \pi_i, M_i)_i, \lambda_i^j\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\ j\in\mathbb{N}^*,\ i\leq j}$ la llamaremos *límite directo de fibrados vectoriales* si, para cada $x_i \in M_i$, existe un sistema directo de trivializaciones (U_i, Ψ_i) (con $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ y U_i abierto de M_i) de (E_i, π_i, M_i) donde $\Psi_i : \pi_i^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{r_i}$ son difeomorfismos locales tales que $x_i \in U_i$ y para cada par $(i,j) \in \mathbb{N}^2, i \leq j$, tenemos las condiciones de compatibilidad:

$$\left(\varepsilon_i^j \times \iota_{r_i}^{r_j}\right) \circ \Psi_i = \Psi_j \circ \lambda_i^j.$$

La proposición siguiente generaliza el resultado de [18] a propósito de límite directo de fibrados tangentes.

Proposición 11 *Sea* $\mathcal{E} = \left((E_i, \pi_i, M_i)_i, \lambda_i^j\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\ j\in\mathbb{N}^*,\ i\leq j}$ *una sucesión directa de fibrados vectoriales. Entonces* $\left(\varinjlim E_i, \varinjlim \pi_i, \varinjlim M_i\right)$ *puede ser equipado con una estructura de fibrado vectorial conveniente cuya base es modelada sobre* $\mathbb{R}^\infty$ *y cuyo grupo estructural es el grupo de Lie conveniente* $GL(\infty, \mathbb{R}) = \varinjlim GL(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Definamos en primer lugar una estructura de variedad sobre $E = \varinjlim E_i$.

Para cada $i \in \mathbb{N}^*$, E_i es un espacio topológico localmente compacto; entonces, $\varinjlim E_i$ es Hausdorff (cf. [9]).

Sea $v \in E$; definamos une carta en v como sigue. Puesto que v pertenece a $\varinjlim E_i$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $v = \lambda_n(v_n)$ con $v_n \in E_n$ y $\pi_n(v_n) = x \in M_n$. Para $i \geq n$, la trivialización local $\Psi_i : \pi_i^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^{r_i}$ da origen, via

una carta $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{d_i}$, a una carta $\psi_i : \pi_i^{-1}(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_i} \times \mathbb{R}^{r_i}$. Puesto que λ_i^j es un morfismo sobre ε_i^j, tenemos $\pi_j \circ \lambda_i^j = \varepsilon_i^j \circ \pi_i$ y podemos definir $\pi = \varinjlim \pi_i : \varinjlim E_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ por $\pi(v) = \pi_n(v_n) = x \in M_n \subset \varinjlim M_i$. Tenemos entonces $\varinjlim (\pi_i)^{-1}(U_i) = \pi^{-1}\left(\varinjlim U_i\right)$.
Puesto que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\pi_i)^{-1}(U_i) & \overset{\lambda_i^j}{\longrightarrow} & (\pi_j)^{-1}(U_j) \\ \Psi_i \downarrow & & \downarrow \Psi_j \\ U_i \times \mathbb{R}^{r_i} & \xrightarrow{\left(\varepsilon_i^j \times \iota_{r_i}^{r_j}\right)} & U_j \times \mathbb{R}^{r_j} \end{array}$$

podemos definir una trivialización local del fibrado $\left(\varinjlim E_i, \varinjlim \pi_i, \varinjlim M_i\right)$

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \pi^{-1}\left(\varinjlim U_i\right) & \longrightarrow & \varinjlim U_i \times \mathbb{R}^\infty \\ & v = \varinjlim v_i & \mapsto & \left(x = \varinjlim x_i, \widehat{v} = \varinjlim \widehat{v_i}\right) \end{array}$$

donde $\widehat{v_i} = \theta_\iota(v_i)$ con $\theta_\iota = \mathrm{pr}_2 \circ \Psi_i$.
Ψ es un homeomorfismo como límite directo de homeomorfismos.
Utilizando las cartas $(U_i, \varphi_i)_{i \geq n}$ se puede definir una carta de E en v:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \pi^{-1}\left(\varinjlim U_i\right) & \longrightarrow & \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \\ & v = \varinjlim v_i & \mapsto & \left(\overline{x} = \varinjlim \overline{x_i}, \widehat{v} = \varinjlim \widehat{v_i}\right) \end{array}$$

donde $\overline{x_i} = \varphi_i(x_i)$.
Además $\theta_{x|\pi^{-1}(y)} = \varinjlim (\theta_i)_{x_i|\pi_i^{-1}(y_i)} : \pi^{-1}(y) \longrightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^\infty$ es lineal.
Probemos ahora que los cambios de cartas son c^∞-difeomorfismos.
Consideramos dos cartas $\left(\pi^{-1}(U^\alpha), \psi^\alpha\right)$ y $\left(\pi^{-1}\left(U^\beta\right), \psi^\beta\right)$ en $v \in E$. Tenemos entonces:

$$\tau^{\beta\alpha} = \psi^\beta \circ (\psi^\alpha)^{-1} : \psi^\alpha\left(\pi^{-1}\left(U^\alpha \cap U^\beta\right)\right) \longrightarrow \psi^\beta\left(\pi^{-1}\left(U^\alpha \cap U^\beta\right)\right)$$

donde $\tau^{\alpha\beta} \circ (\iota_{d_i}, \iota_{r_i}) = (\iota_{d_i}, \iota_{r_i}) \circ \tau_i^{\alpha\beta}$ ($\iota_k : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ es la inyección canónica).
Se sigue que $\tau^{\beta\alpha} = \left(\varphi^\beta \circ (\varphi^\alpha)^{-1}, \theta^\beta \circ (\theta^\alpha)^{-1}\right) \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}^\infty) \times GL(\mathbb{R}, \infty)$ donde $Gl(\mathbb{R}, \infty)$ es un grupo de Lie conveniente ([12], 47.7).
Probemos ahora la c^∞-diferenciabilidad de la proyección $\pi : E \longrightarrow M$. Sea $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \pi^{-1}(U) \in E$ una curva tale que $c(0) = v$ donde $\pi(v) = x \in U \subset M$. Puesto que $c(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ es relativamente compacto, tenemos $c(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset (\pi_n)^{-1}(U_n)$ (3, 4.). Entonces $\pi \circ c = \pi_n \circ c_n \in C^\infty\left(]-\varepsilon, \varepsilon[, \mathbb{R}^{d_n}\right)$. Deducimos de esto que π es c^∞. ■

5 Algebroides de Lie

Recordamos definiciones y propiedades utilizadas en [3] (ver también [11] y [16]).

5.1 Definiciones. Expresión local. Ejemplos

Sea $\tau : E \to M$ un fibrado vectorial sobre une variedad de dimensión finita cuya fibra es un espacio vectorial $\mathbb{E}$ de dimensión finita.

Un morfismo de fibrados vectoriales $\rho : E \to TM$ se llama un *ancla*. Este morfismo da origen a un $\mathcal{F}-$modulo $\underline{\rho}$: $\Gamma(E) \to \Gamma(TM)$=$\mathfrak{X}(M)$ definido para cada $x \in M$ y cada sección s de E por: $\left(\underline{\rho}(s)\right)(x) = \rho(s(x))$ y denotado también por ρ.

Llamaremos a (E, τ, M, ρ) un *fibrado anclado*.

Definición 12 *Un casi-corchete sobre un fibrado anclado (E, τ, M, ρ) es un corchete $[.,.]_\rho$ que satisface una regla de Leibniz:*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall s_1, s_2 \in \Gamma(E), \quad [s_1, fs_2]_\rho = f[s_1, s_2]_\rho + (\rho(s_1))(f)\ s_2.$$

Un fibrado anclado (E, τ, M, ρ) equipado con un casi-corchete es llamado casi-algebroide de Lie.

Definición 13 *Un corchete de Lie sobre un fibrado anclado (E, τ, M, ρ) es un casi-corchete que verifica la identidad de Jacobi:*

$$\forall s_1, s_{2,} s_3 \in \Gamma(E), \ \left[s_1, [s_2, s_3]_\rho\right]_\rho + \left[s_2, [s_3, s_1]_\rho\right]_\rho + \left[s_3, [s_1, s_2]_\rho\right]_\rho = 0.$$

Un fibrado anclado (E, π, M, ρ) equipado con un corchete de Lie se llama algebroide de Lie.

Cuando (E, τ, M, ρ) es un algebroide de Lie el corchete $[.,.]_\rho$ es un morfismo de álgebras de Lie.

Ejemplo 14 *Cualquier álgebra de Lie de dimensión finita es un algebroide de Lie sobre un punto.*

Ejemplo 15 *El fibrado tangente $\pi_M : TM \longrightarrow M$ a una variedad diferencial es un algebroide de Lie donde el ancla es Id_{TM} y el corchete de secciones es el corchete de Lie de los campos de vectores.*

Ejemplo 16 *$E = TM$ y $\rho = N$ es un tensor de Nijenhuis, i.e. un tensor que verifica la condición*

$$[NX, NY] = N\left([NX, Y] + [X, NY] - N\left([X, Y]\right)\right).$$

(TM, π, M, N) es un algebroide de Lie (cf. [2]) donde el ancla es N y el corchete de secciones es el corchete $[.,.]_N$ definido por:

$$[X, Y]_N = [NX, Y] + [X, NY] - N\left([X, Y]\right).$$

Ejemplo 17 *Sea (M, Λ) una variedad de Poisson. El fibrado cotangente T^*M a una variedad diferencial está dotado de una estructura de algebroide de Lie donde el ancla es el morfismo $\Lambda^\sharp$ y el corchete en las 1-formas (cf. [14]) viene dado por:*

$$[\alpha, \beta]_\Lambda = L_{\Lambda^\sharp \beta}(\alpha) - L_{\Lambda^\sharp \alpha}(\beta) + d\left\langle \beta, \Lambda^\sharp \alpha \right\rangle$$

para $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

Si fijamos un sistema de coordenadas locales $\left(x^i\right)_{1 \leq i \leq n}$ en la base M y una base local $(e_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq m}$ de secciones de τ, obtenemos un sistema de coordenadas locales $\left(x^i, y^\alpha\right)$ de E.

Tenemos una expresión local del ancla y del corchete:

$$\rho(e_\alpha) = \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ y } [e_\alpha, e_\beta]_\rho = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$$

donde las funciones ρ_α^i y $C_{\alpha\beta}^\gamma$ verifican relaciones debidas a la condición de compatibilidad y a la identidad de Jacobi.

5.2 Cálculo en algebroides de Lie

Dado un algebroide de Lie (E, τ, M, ρ) se definen la derivada de Lie y la diferencial exterior.

Derivada de Lie. Sea s una sección de E. Se define la *derivada de Lie* L_s^ρ
– de una función $f \in \Omega^0(M, E) = \mathcal{F}$ de clase C^∞ por:

$$L_s^\rho(f) = L_{\rho \circ s}(f) = i_{\rho \circ s}(df).$$

– de una q–forma $\omega \in \Omega^q(M, E)$ (donde $q > 0$) por

$$\begin{aligned}(L_s^\rho \omega)(s_1, \ldots, s_q) &= L_s^\rho(\omega(s_1, \ldots, s_q)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^q \omega\left(s_1, \ldots, s_{i-1}, [s, s_i]_\rho, s_{i+1}, \ldots, s_q\right).\end{aligned}$$

Diferencial exterior. Se define la *diferencial exterior* d_ρ
– de una función $f \in \mathcal{F}$ por

$$d_\rho f = t_\rho \circ df.$$

– de una q–forma $\omega \in \Omega^q(M, E)$ (donde $q > 0$) por

$$\begin{aligned}(d_\rho \omega)(s_0, \ldots, s_q) = &\sum_{i=0}^{q} (-1)^i L^\rho_{s_i}\left(\omega\left(s_0, \ldots, \widehat{s_i}, \ldots, s_q\right)\right) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \left(\omega\left(\left[s_i, s_j\right]_\rho, s_0, \ldots, \widehat{s_i}, ..., \widehat{s_j}, ..., s_q\right)\right).\end{aligned}$$

Si $\left(x^i\right)_{1 \leq i \leq n}$ son coordenadas locales sobre M y si $\{e_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq m}$ es una base local de secciones de τ tenemos las expresiones locales siguientes:

$$dx^i = \rho^i_\alpha e^\alpha \text{ y } de^\gamma = -\frac{1}{2} C^\gamma_{\alpha\beta} e^\alpha \wedge e^\beta$$

donde (e^α) es la base dual de (e_α).

Tenemos

$$d_\rho \circ d_\rho = 0.$$

La cohomología asociada con d_ρ se denomina la cohomología del algebroide de Lie (E, τ, M, ρ).

5.3 Morfismo de algebroides de Lie

Definición 18 *Un morfismo de fibrados vectoriales $\psi : E \to E'$ sobre $f : M \to M'$ es un morfismo de algebroides de Lie (E, τ, M, ρ) y (E', τ', M', ρ') si $\psi^* : \Omega^q(M, E') \to \Omega^q(M, E)$ definida por:*

$$\left(\psi^* \alpha'\right)_x (s_1, \ldots, s_q) = \alpha'_{f(x)} (\psi \circ s_1, \ldots, \psi \circ s_q)$$

verifica la relación:

$$d_\rho \circ \psi^* = \psi^* \circ d_{\rho'}$$

5.4 Prolongaciones de algebroides de Lie

Vamos a recordar la definición de la estructura de algebroide de Lie sobre la prolongación de un algebroide de Lie mediante una fibración (véase [5], [16] y [4]).

Sea (E, τ, M, ρ) un algebroide de Lie de rango m sobre una variedad M de dimensión n y sea $\nu : P \longrightarrow M$ una fibración de rango q, esto es, una submersión sobreyectiva.

Para cada punto $p \in P$, consideramos el conjunto

$$\mathcal{T}_p^E P = \{(b, v) \in E_x \times T_p P : \rho(b) = T_p \nu(v)\}$$

donde $T\nu : TP \longrightarrow TM$ es la applicación tangente a ν y $\nu(p) = x \in M$.

El conjunto $\mathcal{T}^E P = \bigcup_{p \in P} \mathcal{T}_p^E P$ tiene una estructura natural de fibrado vectorial cuya proyección es $\tau_P^E : (b, v) \mapsto \nu(v)$.

Denotaremos de manera redundante (b, v) por (p, b, v).

El fibrado vectorial $\tau_P^E : \mathcal{T}^E P \to P$ admite una estructura de algebroide de Lie denominada *prolongación del algebroide de Lie E mediante la fibración ν* o *fibrado E-tangente a P*.

El ancla $\rho_P : \mathcal{T}^E P \to TP$ es la proyección sobre el tercer factor, i.e. $\rho_P(p, b, v) = v$.

Con el fin de definir un corchete de secciones de τ_P^E vamos a considerar secciones particulares.

Una sección $Z \in \Gamma(\tau_P^E)$ se dice que es *proyectable* si existe una sección σ de $\tau : E \longrightarrow M$ y un campo de vectores U sobre P proyectable mediante al campo de vectores $\rho(\sigma)$ y tales que $Z(p) = (p, \sigma(\nu(p)), U(p))$ para todo $p \in P$.

El corchete de dos secciones Z_1 y Z_2 dadas por $Z_i(p) = (p, \sigma_i(\nu(p)), U_i(p))$, $i = 1, 2$, es:

$$[Z_1, Z_2]_{\rho_P}(p) = \Big(p, [\sigma_1, \sigma_2]_\rho(\nu(p)), [U_1, U_2](p)\Big)$$

para cada $p \in P$.

Es fácil probar que se puede elegir una base local de secciones proyectables del espacio $\Gamma(\tau_P^E)$.

Si $(x^i, u^A)_{1 \le i \le n, 1 \le A \le q}$ son coordenadas locales sobre P y si $\{e_\alpha\}_{1 \le \alpha \le m}$ es una base local de secciones de $\tau : E \longrightarrow M$ podemos definir una base local $\{\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_A\}_{1 \le \alpha \le m, 1 \le A \le q}$ de secciones de τ_P^E dadas por:

$$\mathcal{X}_\alpha(p) = \left(p, e_\alpha(\nu(p)), \rho_\alpha^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_A(p) = \left(p, 0, \left(\frac{\partial}{\partial u^A}\right)_p\right).$$

Si $z = (p, b, v)$ partenece a $\mathcal{T}^E P$ donde $b = z^\alpha e_\alpha$, entonces v es de la forma

$$v = \rho_\alpha^i z^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + v^A \frac{\partial}{\partial u^A}$$

y podemos escribir:

$$z = z^a \mathcal{X}_\alpha (p) + v^A \mathcal{V}_A (p) .$$

Para $Z \in \Gamma\left(\tau_P^E\right)$ dada localmente por $Z = Z^\alpha \mathcal{X}_\alpha + V^A \mathcal{V}_A$ se tiene que

$$\rho_P (Z) = \rho_\alpha^i Z^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + V^A \frac{\partial}{\partial u^A}.$$

5.5 Prolongación de morfismos de algebroides de Lie

Sean $\nu : P \longrightarrow M$ y $\nu' : P' \longrightarrow M'$ dos fibraciones. Sea $\Psi : P \longrightarrow P'$ una aplicación fibrada sobre $\varphi : M \longrightarrow M'$. Consideramos dos algebroides de Lie $\tau : E \longrightarrow M$ y $\tau' : E' \longrightarrow M'$ y una aplicación $\Phi : E \longrightarrow E'$ fibrada sobre φ. Si Φ es admisible podemos definir una aplicación admisible $T^\Phi \Psi : \mathcal{T}^E P \longrightarrow \mathcal{T}^{E'} P'$ por

$$T^\Phi \Psi (p, b, v) = (\Psi (p) , \Phi (b) , T\Psi (v)) .$$

Recordamos el resultado siguiente (véase [15]):

Proposición 19 *$T^\Phi \Psi$ es un morfismo de algebroides de Lie si y sólo si Φ es un morfismo de algebroides de Lie .*

6 Límites directos de prolongaciones de algebroides de Lie

Definición 20 *Se llama a $(E_i, \tau_i, M_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sucesión directa de algebroides de Lie si*
1. $\left(\left(E_i, \lambda_i^j\right)\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\, j\in\mathbb{N}^*,\, i\leq j}$ es una sucesión directa de fibrados vectoriales de dimensiones finitas ($\tau_i : E_i \to M_i$) sobre la sucesión directa de variedades de dimensiones finitas $\left(\left(M_i, \varepsilon_i^j\right)\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\, j\in\mathbb{N}^*,\, i\leq j}$.
2. Para cada $i, j \in \mathbb{N}^*$ tales que $i \leq j$, tenemos

$$\rho_j \circ \lambda_i^j = T\varepsilon_i^j \circ \rho_i.$$

3. $\lambda_i^j : E_i \to E_j$ es un morfismo de los algebroides de Lie $(E_i, \tau_i, M_i, \rho_i)$ y $(E_j, \tau_j, M_j, \rho_j)$.

Tenemos el resultado siguiente:

Teorema 21 *Sea* $(E_i, \tau_i, M_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *una sucesión directa de algebroides de Lie. Entonces* $(\varinjlim E_i, \varinjlim \tau_i, \varinjlim M_i, \varinjlim \rho_i)$ *es un algebroide de Lie conveniente.*

Demostración.
1. $\left(\varinjlim E_i, \varinjlim \tau_i, \varinjlim M_i\right)$ es un fibrado vectorial conveniente sobre la variedad conveniente $\varinjlim M_i$ modelada sobre $\mathbb{R}^\infty$ (cf. Proposición 11).
2. Sean $\left(s_i^1\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ y $\left(s_i^2\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ directas sucesiones de secciones de fibrados vectoriales $\pi_i : E_i \to M_i$. Entonces se cumplen las condiciones

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_i^j \circ s_i^1 = s_j^1 \circ \varepsilon_i^j \\ \lambda_i^j \circ s_i^2 = s_j^2 \circ \varepsilon_i^j \end{array}\right. \tag{1}$$

Tenemos que probar la compatibilidad de los corchetes:

$$\lambda_i^j \circ \left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} = \left[s_j^1, s_j^2\right]_{E_j} \circ \varepsilon_i^j \tag{2}$$

y de las propiedades de Leibniz:

$$\lambda_i^j \circ \left[s_i^1, g_i \times s_i^2\right]_{E_i} = \left[s_j^1, g_j \times s_j^2\right]_{E_j} \circ \varepsilon_i^j. \tag{3}$$

a) Con el fin de probar la compatibilidad de los corchetes utilizamos los morfismos $\lambda_i^j : E_i \longrightarrow E_j$ de algebroides de Lie sobre $\varepsilon_i^j : M_i \longrightarrow M_j$ que satisfacen:

$$d_{\rho_i} \circ \left(\lambda_i^j\right)^* = \left(\lambda_i^j\right)^* \circ d_{\rho_j} \tag{4}$$

y por tanto, aplicados a $\alpha_j \in \Omega^1\left(M_j, E_j\right)$:

$$\left(d_{\rho_i} \circ \left(\lambda_i^j\right)^* (\alpha_j)\right)\left(s_i^1, s_i^2\right) = \left(\left(\lambda_i^j\right)^* \circ d_{\rho_j}(\alpha_j)\right)\left(s_i^1, s_i^2\right).$$

El primer miembro es igual a

$$\begin{aligned} &\left(d_{\rho_i} \circ \left(\lambda_i^j\right)^* (\alpha_j)\right)\left(s_i^1, s_i^2\right) \\ &\quad= L_{\rho_i \circ s_i^1}\left(\left(\left(\lambda_i^j\right)^* (\alpha_j)\right)\left(s_i^2\right)\right) - L_{\rho_i \circ s_i^2}\left(\left(\left(\lambda_i^j\right)^* (\alpha_j)\right)\left(s_i^1\right)\right) \\ &\quad\quad - \left(\left(\lambda_i^j\right)^* (\alpha_j)\right)\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} \\ &\quad= X_j^1\left(\alpha_j\left(\lambda_i^j \circ s_i^2\right)\right) - X_j^2\left(\alpha_j\left(\lambda_i^j \circ s_j^1\right)\right) - \alpha_j\left(\lambda_i^j \circ \left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i}\right). \end{aligned}$$

donde $X_j^a = \rho_j \circ s_j^a$ con $a = 1, 2$ cumplen la relación: $X_j^a(f_j) = X_i^a(f_i)$ donde $f_j = \alpha_j \circ s_j$.

El segundo miembro es igual a

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\lambda_i^j\right)^* \left(d_{\rho_j}\left(\alpha_j\right)\right)\right)\left(s_i^1, s_i^2\right)\\
&= d_{\rho_j}\left(\alpha_j\right)\left(\lambda_i^j \circ s_i^1, \lambda_i^j \circ s_i^2\right)\\
&= L_{\rho_j\circ\lambda_i^j\circ s_i^1}\left(\alpha_j\left(\lambda_i^j\circ s_i^2\right)\right) - L_{\rho_j\circ\lambda_i^j\circ s_i^2}\left(\alpha_j\left(\lambda_i^j\circ s_i^1\right)\right) - \alpha_j\left[\lambda_i^j\circ s_i^1, \lambda_i^j\circ s_i^2\right]_{E_j}\\
&= L_{\rho_j\circ s_j^1}\left(\alpha_j\left(\lambda_i^j\circ s_i^2\right)\right) - L_{\rho_j\circ s_j^2}\left(\alpha_j\left(\lambda_i^j\circ s_i^1\right)\right) - \alpha_j\left[\lambda_i^j\circ s_i^1, \lambda_i^j\circ s_i^2\right]_{E_j}\\
&= X_j^1\left(\alpha_j\left(\lambda_i^j\circ s_i^2\right)\right) - X_j^2\left(\alpha_j\left(\lambda_i^j\circ s_j^1\right)\right) - \alpha_j\left[\lambda_i^j\circ s_i^1, \lambda_i^j\circ s_i^2\right]_{E_j}.
\end{aligned}$$

En particular, para cada $\alpha_j \in \Omega^1\left(M_j, E_j\right)$,
$\alpha_j\left(\lambda_i^j\left(\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i}\right)\right) = \alpha_j\left[\lambda_i^j\circ s_i^1, \lambda_i^j\circ s_i^2\right]_{E_j}$ y por lo tanto:
$\lambda_i^j\circ\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} = \left[\lambda_i^j\circ s_i^1, \lambda_i^j\circ s_i^2\right]_{E_j}$.
Utilizando $\lambda_i^j\circ s_i^a = s_j^a\circ\varepsilon_i^j$, tenemos: $\lambda_i^j\circ\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} = \left[s_j^1, s_j^2\right]_{E_j}\circ\varepsilon_i^j$.
b) Con el fin de probar (3) vamos a establecer

$$\begin{aligned}
&\lambda_i^j\circ\left(g_i\times\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} + \left(\rho_i\left(s_i^1\right)\right)\left(g_i\right)\times s_i^2\right)\\
&= \left(g_j\times\left[s_j^1, s_j^2\right]_{E_j} + \left(\rho_j\left(s_j^1\right)\right)\left(g_j\right)\times s_j^2\right)\circ\varepsilon_i^j
\end{aligned}$$

porque, para $k\in\{i,j\}$, tenemos:

$$\left[s_k^1, g_k\times s_k^2\right]_{E_k} = g_k\times\left[s_k^1, s_k^2\right]_{E_k} + \left(\rho_k\left(s_k^1\right)\right)\left(g_k\right)\times s_k^2.$$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i^j\circ\left(g_i\times\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} + \left(\rho_i\left(s_i^1\right)\right)\left(g_i\right)\times s_i^2\right)\\
&= \lambda_i^j\circ\left(g_i\times\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i}\right) + \lambda_i^j\circ\left(\left(\rho_i\left(s_i^1\right)\right)\left(g_i\right)\times s_i^2\right)\\
&= g_i\times\left(\lambda_i^j\circ\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i}\right) + \lambda_i^j\left(X_i^1\left(g_i\right)\right)\times\lambda_i^j\circ s_i^2 \quad \left(\lambda_i^j \text{ es un morfismo}\right)\\
&= g_i\times\left(\left[s_j^1, s_j^2\right]_{E_j}\circ\varepsilon_i^j\right) + X_j^1\left(g_j\right)\circ\varepsilon_i^j\times s_j^2\circ\varepsilon_i^j \quad \text{cf. (2)}\\
&= \left(g_j\circ\varepsilon_i^j\right)\times\left(\left[s_j^1, s_j^2\right]_{E_j}\circ\varepsilon_i^j\right) + \left(X_j^1\left(g_j\right)\times s_j^2\right)\circ\varepsilon_i^j\\
&= \left(g_j\times\left[s_j^1, s_j^2\right]_{E_j}\right)\circ\varepsilon_i^j + \left(\rho_j\left(s_j^1\right)\left(g_j\right)\times s_j^2\right)\circ\varepsilon_i^j\\
&= \left(g_j\times\left[s_j^1, s_j^2\right]_{E_j} + \left(\rho_j\left(s_j^1\right)\right)\left(g_j\right)\times s_j^2\right)\circ\varepsilon_i^j.
\end{aligned}$$

3. Con la construcción de $\varinjlim[\ ,\ ]_i$, si ρ_i es un morfismo de algebroides $(E_i, \pi_i, M_i, \rho_i, [\ ,\ ]_i) \to (TM_i, M_i, [\ ,\ ])$, entonces tenemos

$$\varinjlim \rho_i(\varinjlim[\ ,\ ]_i) = [\varinjlim \rho_i(.), \varinjlim \rho_i(.)].$$

Es fácil probar que si cada corchete $[\ ,\ ]_i$ satisface la identidad de Jacobi, el límite $\varinjlim[\ ,\ ]_i$ satisface también la identidad de Jacobi. ■

Sea $(E_i, \tau_i, M_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión directa de algebroides de Lie donde $\left(\left(E_i, \lambda_i^j\right)\right)_{i\in\mathbb{N}^*,\, j\in\mathbb{N}^*,\, i\leq j}$ es la sucesión directa de fibrados asociada. Sea $(P_i, \nu_i, M_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión directa de fibrados vectoriales y $\theta_i^j : P_i \longrightarrow P_j$ una aplicación fibrada sobre $\varepsilon_i^j : M_i \longrightarrow M_j$. Puesto que λ_i^j es un morfismo entre los algebroides de Lie $(E_i, \tau_i, M_i, \rho_i)$ y $(E_j, \tau_j, M_j, \rho_j)$, entonces $T^{\lambda_i^j}\theta_i^j : \mathcal{T}^{E_i}P_i \longrightarrow \mathcal{T}^{E_j}P_j$ es un morfismo de prolongaciones de algebroides de Lie (cf. Proposición 19). Con la condición de compatibilidad

$$\rho_{P_j} \circ T^{\lambda_i^j}\theta_i^j = T\theta_\imath^j \circ \rho_{P_i}$$

$\left(T^{E_i}P_i, \tau_{P_i}^{E_i}, P_i, \rho_{P_i}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión directa de algebroides de Lie.

Utilizando el Teorema 21 obtenemos el resultado siguiente.

Teorema 22 $\left(\varinjlim T^{E_i}P_i, \varinjlim \tau_{P_i}^{E_i}, \varinjlim P_i, \varinjlim \rho_{P_i}\right)$ *es un algebroide de Lie conveniente.*

Ejemplo 23 *El oscilador armónico conveniente.– Consideramos el caso del oscilador armónico que es un sistema bihamiltoniano. Consideramos aquí el límite directo de prolongaciones de algebroides de Lie $T^{E_n}E_n^*$ donde $E_n = T\mathbb{R}^n$ y el ancla es el tensor de Nijenhuis*

$$N_n = \begin{pmatrix} \frac{(x^1)^2+(y^1)^2}{2} & 0 & & & \\ 0 & \frac{(x^1)^2+(y^1)^2}{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{(x^n)^2+(y^n)^2}{2} & 0 \\ & & & 0 & \frac{(x^n)^2+(y^n)^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Tenemos los corchetes siguientes: $\left[\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^k}\right]_{N_n} = -y^k \frac{\partial}{\partial x^k} + x^k \frac{\partial}{\partial y^k}$.
Si $\left(x^i, \mu_\alpha\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq \alpha\leq n}$ *son coordenadas sobre* $T^*\mathbb{R}^n$ *consideramos el hamiltoniano, definido para* $\left(x^i, \mu_\alpha\right) \neq (0,0)$, *por*

$$H_n : \left(x^i, \mu_\alpha\right) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \ln\left(\left(x^i\right)^2 + \left(\mu_\alpha\right)^2\right).$$

Tenemos una sucesión proyectiva de funciones.
Obtenemos las ecuaciones de Hamilton sobre cada $T^*\mathbb{R}^n$ *(cf. [16]):*

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx^i}{dt} & = \rho^i_\alpha \dfrac{\partial H_n}{\partial \mu_\alpha} \\ \dfrac{d\mu_\alpha}{dt} & = -\rho^i_\alpha \dfrac{\partial H_n}{\partial x^i} - \mu_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} \dfrac{\partial H_n}{\partial \mu_\beta}. \end{array}\right.$$

Estas ecuaciones se pueden simplificar de forma que:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx^i}{dt} & = \mu^i \\ \dfrac{d\mu^\alpha}{dt} & = -x^\alpha. \end{array}\right.$$

Referencias

[1] Bourbaki, N. (2006) *Eléments de Mathématiques*, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 2ème édition. Springer, Berlin.

[2] Cabau, P. (2012) "Strong projective limit of Banach Lie algebroids", *Portugal. Math. (N.S.)* **69**(1): 1–21.

[3] Cabau, P.; Pelletier, F. (2012) "Almost Lie structures on an anchored Banach bundle", *Journal of Geometry and Physics* **62**(11): 2147–2169.

[4] De las Nieves Sosa Martín, D. (2008) *Algebroides de Lie y Mecánica Geométrica*. Tesis, Universidad de La Laguna.

[5] De León, M.; Marrero, J.C.; Martínez, E. (2005) "Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie algebroids", *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (24): R241–R308.

[6] Glöckner, H. (2003) “Direct limit of Lie groups and manifolds”, *J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)* **43**(1): 1–26.

[7] Glöckner, H. (2005) “Fundamentals of direct limit Lie theory", *Compositio Math.* **141**(6): 1551–1577

[8] Glöckner, H. (2007) “Direct limits of infinite-dimensional Lie groups compared to direct limits in related categories”, *Journal of Functional Analysis* **245**(1): 19–61.

[9] Hansen, V.L. (1971) “Some theorems on direct limit of expanding sequences of manifolds”, *Math. Scand.* **29**(1): 5–36.

[10] Higgins, P.J.; Mackenzie, K.C.H. (1990) “Algebraic constructions in the category of Lie algebroids”, *J. Algebra* **129**(1): 194–230.

[11] Iglesias Ponte, D. (2011) “Variedades de Poisson, grupoides y algebroides de Lie”, *Actas del XI Congreso Dr. Antonio A.R. Monteiro*: 35–59.

[12] Kriegel, A.; Michor, P.W. (1997) *The convenient Setting of Global Analysis*. AMS Mathematical Surveys and Monographs **53**, Providence RI.

[13] Lang, S. (1995) *Differential and Riemannian Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 160. Springer, New York.

[14] Magri, F.; Morosi, C. (2008) “A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds”, *Quaderno S* **19**, Università degli Studi di Milano.

[15] Martínez, E. (2005) “Classical field theory on Lie algebroids: multisymplectic formalism”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**: 7145–7160.

[16] Martínez, E. (2007) “Lie algebroids in classical mechanics and optimal control”, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications SIGMA* **3**, 050: 1–17.

[17] Pradines, J. (1966) “Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales”, *C.R. Acad. Sci. Paris* **263**(25): 907–910.

[18] Suri, A.; Cabau, P. (2014) “Geometric structure for the tangent bundle of direct limit manifolds”, *Differential Geometry - Dynamical Systems* **16**: 239–247.

[19] Weinstein, A. (1996) “Lagrangian mechanics and groupoids”, *Fields Inst. Comm.* **7**: 207–231.