Ciência e Natura
ISSN: 0100-8307
cienciaenaturarevista@gmail.com
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

Bisognin, Vanilde; Buriol, Celene; Violante Ferreira, Marcio
Estabilidade da solução da Equação Dissipativa de Benjamin-Bona-Mahony em Domínio com Fronteira Móvel
Ciência e Natura, vol. 36, 2014, pp. 73-81
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil

Ciência e Natura, Santa Maria, v. 36 Ed. Especial, 2014, p. 73 – 81
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

Estabilidade da solução da Equação Dissipativa de Benjamin-Bona-Mahony em Domínio com Fronteira Móvel

Stability of the solution of the Benjamin-Bona-Mahony Dissipative Equation in Domain with Moving Boundary

Vanilde Bisognin*[1], Celene Buriol[2] e Marcio Violante Ferreira[3]

[1]Doutora em Matemática pela UFRJ na área de Análise Aplicada. Professora Titular do Centro Universitário Franciscano. Santa Maria, RS, Brasil
[2] Doutora em Matemática pela UFRJ na área de Análise Aplicada. Professora Associada do Departamento de Matemática da UFSM, Santa Maria, RS, Brasil
[3] Doutor em Matemática pela UFRJ na área de Análise Aplicada.Professor Adjunto do Departamento de Matemática da UFSM, Santa Maria, RS, Brasil

Resumo

Neste trabalho consideramos o problema de Cauchy associado à equação não-linear e dissipativa de Benjamin-Bona-Mahony em um Domínio limitado com Fronteira Móvel. Provamos a existência e unicidade de solução global e estudamos o seu comportamento assintótico. Utilizamos o método de Faedo-Galerkin, técnicas multiplicativas, estimativas de energia e compacidade para a obtenção dos resultados

Palavras-chave: *Equação de Benjamin-Bona-Mahony, fronteira móvel, existência e unicidade de solução, estabilização.*

Abstract

In this work we consider the Cauchy problem associated to nonlinear and dissipative Benjamin-Bona-Mahony equation in a bounded domain with moving boundary. We prove the existence and uniqueness of global solution and study the asymptotic behavior of the solution. We use the Faedo-Galerkin method, multiplier techniques, energy estimates and compactness for the results.

Keywords: *Benjamin-Bona-Mahony equation, moving boundary, existence and uniqueness of solution, stabilization.*

*vanildebisognin@gmail.com

Recebido: 12/03/2014 Aceito: 12/03/2014

1 Introdução

Sejam $\alpha,\beta \in C^2([0,+\infty[)$ funções reais satisfazendo

$$\alpha(\tau) < \beta(\tau), \quad \forall \tau \geq 0$$

e consideremos o "intervalo móvel"

$$\Omega_\tau = \{\xi \in \mathbb{R};\ \alpha(\tau) < \xi < \beta(\tau), 0 < \tau < T, T > 0\}.$$

Por Q_τ denotaremos o domínio limitado com fronteira móvel

$$Q_\tau = \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^2;\ \xi \in \Omega_\tau \text{ e } \tau \in (0,T), T > 0\}.$$

A fronteira de Q_τ é o conjunto

$$\Sigma_\tau = \bigcup_{0<\tau<T} \Gamma_\tau \times \{\tau\},$$

onde Γ_τ é a fronteira de Ω_τ. Em Q_τ consideramos o problema

$$u_\tau - u_{\xi\xi\tau} - \eta u_{\xi\xi} + u_\xi + u^p u_\xi = 0, (\xi,\tau) \in Q_\tau, \quad (1)$$

$$u(\xi,0) = u_0(\xi), \xi \in \Omega_0, \quad (2)$$

$$u(\xi,\tau) = 0 \text{ sobre } \Sigma_\tau, \quad (3)$$

onde $u = u(\xi,\tau)$ é uma função real das variáveis ξ e τ, Ω_0, que aparece em (2), é o conjunto $\{\xi \in \mathbb{R}; \alpha(0) < \xi < \beta(0)\}$, η é uma constante positiva e p é um inteiro, $p \geq 1$.

Em todo o trabalho suporemos que, além de ser $\alpha,\beta \in C^2([0,+\infty[)$, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$0 < c_1 \leq \beta(\tau) - \alpha(\tau) \leq c_2, \quad \forall \tau \geq 0 \quad (4)$$

e

$$\alpha'(\tau) \geq 0 \text{ e } \beta'(\tau) \leq 0, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (5)$$

O problema (1)-(3) em um domínio cilíndrico e não-limitado é conhecido como o modelo matemático dissipativo que descreve a propagação de ondas longas em um canal de fundo raso e foi obtido pelos matemáticos B. Benjamin, J. L. Bona e J. J. Mahony em 1972 (ver Benjamin et al. (1972)). A equação (1) é considerada como um modelo alternativo para a equação de Korteweg-de Vries.

O problema de existência, unicidade e estabilidade de soluções foi estudado por vários autores nos últimos anos. Albert (1986) considerou o problema dissipativo em $\mathbb{R}$ e provou a existência e unicidade de solução e obteve a taxa de decaimento, na norma de $L^\infty(\mathbb{R})$, na ordem de

$$||u(.,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(1+\tau)^{-\frac{1}{2}}, \text{ quando } \tau \to +\infty,$$

sem restrições ao dado inicial e $p > 1$, p inteiro.

Quando $\eta = 0$ na equação (1) e $\xi \in \mathbb{R}$, tem-se a equação dispersiva de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) e, neste caso, Albert (1989) também obteve resultados de existência, unicidade e estabilidade de solução global. Neste caso, a taxa de decaimento, na norma de $L^\infty(\mathbb{R})$, é da ordem de

$$||u(.,\tau)||_{L^\infty(\mathbb{R})} = O(1+\tau)^{-\frac{1}{3}}, \text{ quando } \tau \to +\infty,$$

desde que o dado inicial seja suficientemente pequeno e $p > 4$.

Em Bisognin e Perla Menzala (1995), os autores consideraram o modelo que descreve a propagação de ondas longas em um canal cujo fundo não é raso, ou seja, o problema

$$u_\tau - u_{\xi\xi\tau} + a(\tau)u_\xi + b(\tau)u^p u_\xi - \eta u_{\xi\xi} = 0,$$
$$u(\xi,0) = u_0(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Neste caso os coeficientes variáveis $a(\tau)$ e $b(\tau)$ estão associados com a variação da profundidade do canal. Os autores estudaram o problema dispersivo ($\eta = 0$) e o problema dissipativo, quando $\eta > 0$ e obtiveram resultados semelhantes aos de Albert (1986) e Albert (1989), porém dependentes dos coeficientes variáveis que aparecem na equação.

O problema (1)-(3) para $\xi \in [0,1]$ e $\eta = 0$ foi estudado por Medeiros e Milla Miranda (1977), que obtiveram resultados de existência, unicidade e regularidade da solução considerando o termo não-linear geral. Ainda, para $\xi \in [0,1]$ e considerando a equação (1) com $\eta = 0$ e condições de fronteira não homogêneas, a existência e unicidade de solução foram obtidas por Bona e Dougalis (1980). No caso em que $p = 1$, a existência e unicidade de solução em um domínio não cilíndrico foi estabelecida por Límaco et al. (2004).

No trabalho de Rincon et al. (2010) os autores consideraram o problema (1)-(3) com $p = 1$ e $\eta = 0$ e estudaram a existência, unicidade e analisaram a solução numérica em um domínio com fronteira móvel.

O objetivo de nosso trabalho é mostrar que o problema com fronteira móvel (1)-(3), com $p \geq 1$ e $\eta > 0$, é bem posto e estabelecer o decaimento exponencial da solução. A ideia para tratar o problema é, primeiramente, transformar o domínio com fronteira móvel em um domínio cilíndrico. Após a transformação do domínio, obtém-se uma equação com coeficientes dependendo das variáveis espacial e temporal. Usando o método de Faedo-Galerkin, técnicas multiplicativas, estimativas de energia e resultados de compacidade provamos a existência, unicidade e o comportamento assintótico da solução.

Ao longo do trabalho, utilizamos as seguintes notações. Por $L^p(0,1)$ denotamos o espaço de (classes de) funções cuja potência p é integrável com norma

$$||u||_p^p = \int_0^1 |u(x)|^p\, dx, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Quando for $p = 2$, escreveremos simplesmente $||u||$, ou seja,

$$||u|| = \left(\int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O produto interno usual neste espaço será denotado por $(\, , \,)$. Assim,

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x) \, dx.$$

Já para a norma de $L^\infty(0,1)$, que se refere ao espaço de funções essencialmente limitadas em $(0,1)$, usaremos a notação $|| \cdot ||_\infty$, isto é,

$$||u||_\infty = \inf\{K; \ |u(x)| \leq K \ \texttt{q.s em} \ (0,1)\}.$$

Para cada $s \in \mathbb{R}$, $H^s(0,1)$ denotará o espaço de Sobolev de ordem s usual, conforme Adams (1975). Finalmente, por $C^k(I)$ denotamos o espaço das funções contínuas em I cujas derivadas, até ordem k, são contínuas. Várias constantes positivas são denotadas por C ou K, mas salientamos que estas podem mudar de uma linha para outra.

O trabalho está organizado do seguinte modo: na seção 2, provamos a existência e unicidade de solução para o problema (1)-(3) e na seção 3, estabelecemos o decaimento exponencial da solução.

2 Existência e unicidade de solução

O método a ser utilizado na prova da existência de solução consiste em, primeiramente, transformar o problema com fronteira móvel (1)-(3) num outro definido sobre um domínio cilíndrico. Para isso, considera-se a mudança de variável

$$x = \frac{\xi - \alpha(\tau)}{\beta(\tau) - \alpha(\tau)} \qquad \text{e} \qquad t = \tau. \tag{6}$$

Vê-se, facilmente, que

$$u_\tau = \Big[(\ln \gamma(t))' \, x - \alpha'(t)\gamma(t) \Big] \, u_x + u_t, \tag{7}$$

onde

$$\gamma(t) = \frac{1}{\beta(t) - \alpha(t)}. \tag{8}$$

Obtém-se, também,

$$u_\xi = \gamma(t) u_x, \quad u_{\xi\xi} = \gamma^2(t) u_{xx} \tag{9}$$

e

$$u_{\xi\xi\tau} = \Big[(\ln \gamma(t))' \, x - \alpha'(t)\gamma(t) \Big] \, \gamma^2(t) u_{xxx} + \tag{10}$$

$$+ 2\gamma(t)\gamma'(t) u_{xx} + \gamma^2(t) u_{xxt}. \tag{11}$$

Isto nos dá, após substituição na equação (1),

$$\begin{aligned} & u_t + q(x,t)u_x - q(x,t)\gamma^2(t)u_{xxx} - 2\gamma(t)\gamma'(t)u_{xx} - \\ & - \gamma^2(t)u_{xxt} - \eta\gamma^2(t)u_{xx} + \gamma(t)u_x + \gamma(t)u^p u_x = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

onde

$$q(x,t) = \Big[(\ln \gamma(t))' \, x - \alpha'(t)\gamma(t) \Big]. \tag{13}$$

Quanto à função $q(x,t)$, nota-se que

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \gamma(t) \left(\alpha'(t) - \beta'(t) \right), \tag{14}$$

$$q(0,t) = -\alpha'(t)\gamma(t) \leq 0 \tag{15}$$

e

$$q(1,t) = -\beta'(t)\gamma(t) \geq 0, \tag{16}$$

fatos esses que serão usados repetidas vezes ao longo deste trabalho. Observe-se agora que

$$x = \frac{\xi - \alpha(\tau)}{\beta(\tau) - \alpha(\tau)} = \begin{cases} 0, & se \quad \xi = \alpha(\tau) \\ 1, & se \quad \xi = \beta(\tau) \end{cases} \tag{17}$$

e, por (4), $0 < x < 1$. Quanto ao dado inicial, tem-se

$$u(x,0) = u_0 \left((\beta_0 - \alpha_0)x + \alpha_0 \right), 0 < x < 1, \tag{18}$$

onde $\beta_0 = \beta(0)$ e $\alpha_0 = \alpha(0)$. Já para as condições de contorno, obtém-se

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{19}$$

Em suma, nas novas variáveis x e t, dadas por (6), o problema (1)-(3) se escreve

$$\begin{aligned} & u_t - \gamma^2(t)u_{xxt} + [q(x,t) + \gamma(t)] \, u_x - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma^2(t) q(x,t) u_{xx} \right) - \\ & - a(t)u_{xx} + \gamma(t)u^p u_x = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{20}$$

$$u(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1, \tag{21}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{22}$$

onde $Q_T = (0,1) \times (0,T)$, $v_0(x) := u_0 \left((\beta_0 - \alpha_0)x + \alpha_0 \right)$ e

$$a(t) = \eta\gamma^2(t) + \gamma(t)\gamma'(t) \geq \eta \frac{1}{c_2^2} \geq 0. \tag{23}$$

Com relação à existência e unicidade de solução de (20)-(22) temos o seguinte

Teorema 2.1. *Suponhamos que $v_0 \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ e que α e β satisfazem as hipóteses (4)-(5). Então, para todo $T > 0$, existe uma única $u : Q_T \to \mathbb{R}$ com*

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)), \, u_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1))$$

satisfazendo

$$\int_{Q_T}\Big(u_t w+\gamma^2(t)\frac{\partial u_t}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+[q(x,t)+\gamma(t)]\frac{\partial u}{\partial x}w+ \\ +\gamma^2(t)q(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}-a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}w+ \\ +\gamma(t)u^p\frac{\partial u}{\partial x}w\Big)\,dxdt=0,\quad \forall\, w\in L^2(0,T;H_0^1(0,1)). \tag{24}$$

Demonstração: Aplicaremos o método de Faedo - Galerkin, conforme Lions (1969). Seja $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ base especial de $H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$ composta pelas autofunções do problema espectral

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}=\lambda_j w_j,\quad em\quad (0,1), \\ w_j(0)=w_j(1)=0,\quad j\in\mathbb{N}$$

e consideremos o seguinte
Problema aproximado: Encontrar $u_m(t)$, da forma

$$u_m(t)=\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j,$$

soluções de

$$(u_m',w_j)-\gamma^2(t)\left(\frac{\partial^2 u_m'}{\partial x^2},w_j\right)+ \\ +\left([q(x,t)+\gamma(t)]\frac{\partial u_m}{\partial x},w_j\right)- \\ -\gamma^2(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[q(x,t)\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}\right],w_j\right)-a(t)\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2},w_j\right)+ \\ +\gamma(t)\left(u_m^p\frac{\partial u_m}{\partial x},w_j\right)=0,\quad 1\le j\le m, \tag{25}$$

$$u_m(0)=u_{0m}, \tag{26}$$

com

$$u_{0m}=\sum_{j=1}^m \alpha_{jm}w_j\to v_0\ \texttt{em}\ H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1). \tag{27}$$

Devido à teoria geral de equações diferenciais ordinárias (Coddington e Levinson, 1955), está assegurada a existência de solução u_m de (25)-(26) num intervalo $[0,t_m)$. As estimativas a priori que serão obtidas a seguir mostrarão que $t_m=T$.

Para simplificar a notação, omitiremos a partir de agora o índice m da sequência (u_m) de soluções aproximadas. Identificaremos simplesmente por (u).

Estimativa a priori I: Tomando-se $w_j=u$ em (25) obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2-\gamma^2(t)\int_0^1 u_{xxt}u\,dx+ \\ +\int_0^1[q(x,t)+\gamma(t)]\,u_x u\,dx- \\ -\gamma^2(t)\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x,t)u_{xx}\right)u\,dx- \\ -a(t)\int_0^1 u_{xx}u\,dx+\gamma(t)\int_0^1 u^p u_x u\,dx=0.$$

Usando-se integração por partes e as identidades (14)-(16) obtém-se, separadamente,

$$-\gamma^2(t)\int_0^1 u_{xxt}u\,dx=\gamma^2(t)\int_0^1 u_{xt}u_x\,dx= \\ =\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\gamma^2(t)\|u_x\|^2\right)-\gamma(t)\gamma'(t)\|u_x\|^2,$$

$$\int_0^1[q(x,t)+\gamma(t)]\,u_x u\,dx= \\ =\frac{1}{2}\int_0^1[q(x,t)+\gamma(t)]\,\frac{\partial u^2}{\partial x}\,dx= \\ =-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}\left(u^2\right)\,dx=-\frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)}\|u\|^2,$$

$$-\gamma^2(t)\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x,t)u_{xx}\right)u\,dx= \\ =\gamma^2(t)\int_0^1 q(x,t)u_{xx}u_x\,dx=\frac{\gamma^2(t)}{2}\int_0^1 q(x,t)\frac{\partial u_x^2}{\partial x}\,dx= \\ -\frac{\gamma^2(t)}{2}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\int_0^1 u_x^2\,dx+\frac{\gamma^2(t)}{2}\left[q(x,t)u_x^2\right]_0^1= \\ -\frac{1}{2}\gamma(t)\gamma'(t)\|u_x\|^2+ \\ +\frac{\gamma^2(t)}{2}q(1,t)\left(u_x(1,t)\right)^2-\frac{\gamma^2(t)}{2}q(0,t)\left(u_x(0,t)\right)^2= \\ =-\frac{1}{2}\gamma(t)\gamma'(t)\|u_x\|^2- \\ -\frac{\gamma^3(t)}{2}\beta'(t)\left(u_x(1)\right)^2+\frac{\gamma^3(t)}{2}\alpha'(t)\left(u_x(0,t)\right)^2,$$

$$-a(t)\int_0^1 u_{xx}u\,dx=a(t)\|u_x\|^2$$

e

$$\gamma(t)\int_0^1 u^p u_x u\,dx=\frac{\gamma(t)}{p+2}\int_0^1\frac{\partial u^{p+2}}{\partial x}\,dx=0,$$

donde segue, graças à hipótese (5), que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\gamma^2(t)\|u_x\|^2\right)\le\frac{1}{2}\gamma(t)\gamma'(t)\|u_x\|^2- \\ -\eta\gamma^2(t)\|u_x\|^2+\frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)}\|u\|^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\gamma^2(t)\|u_x\|^2\right)\le \\ \frac{1}{2}|\gamma(t)||\gamma'(t)|\|u_x\|^2+\frac{|\gamma'(t)|}{2|\gamma(t)|}\|u\|^2\le$$

$$\le \frac{|\gamma'(t)|}{2|\gamma(t)|}\left(\gamma^2(t)\|u_x\|^2+\|u\|^2\right)\le$$
$$\le \frac{c_2|\gamma'(t)|}{2}\left(\gamma^2(t)\|u_x\|^2+\|u\|^2\right),$$

onde usou-se a hipótese (4). Denotando

$$\gamma_1=\sup_{0\le t\le T}|\gamma'(t)|,$$

obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\gamma^2(t)\|u_x\|^2\right)\le$$
$$\le \frac{c_2\gamma_1}{2}\left(\|u\|^2+\gamma^2(t)\|u_x\|^2\right).$$

Aplicando-se a Desigualdade de Gronwall e lembrando que $\frac{1}{c_2^2}\le\gamma^2(t)$, conclui-se que

$$\|u_m\|_{H^1(0,1)}\le K_1(T),\quad 0<t<t_m, \tag{28}$$

sendo K_1 dependente de T e do dado inicial v_0, mas não de m.

Estimativa a priori II: Tomando-se agora $w_j=-u_{xx}$ em (25) obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2+\frac{\gamma^2(t)}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xx}\|^2-$$
$$-\int_0^1[q(x,t)+\gamma(t)]\,u_xu_{xx}\,dx+$$
$$+\gamma^2(t)\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x,t)u_{xx}\right)u_{xx}\,dx+$$
$$+a(t)\|u_{xx}\|^2-\gamma(t)\int_0^1 u^pu_xu_{xx}\,dx=0.$$

Observe-se que

$$\gamma^2(t)\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(q(x,t)u_{xx}\right)u_{xx}\,dx=$$
$$-\frac{\gamma^2(t)}{2}\int_0^1 q(x,t)\frac{\partial u_{xx}^2}{\partial x}\,dx=\frac{1}{2}\gamma(t)\gamma'(t)\|u_{xx}\|^2$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_x\|^2+\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2\right)=$$
$$=\int_0^1[q(x,t)+\gamma(t)]\,u_xu_{xx}\,dx-\eta\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2$$
$$-\frac{1}{2}\gamma(t)\gamma'(t)\|u_{xx}\|^2+\gamma(t)\int_0^1 u^pu_xu_{xx}\,dx,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_x\|^2+\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2\right)\le$$
$$\le\int_0^1[q(x,t)+\gamma(t)]\,u_xu_{xx}\,dx+\gamma(t)\int_0^1 u^pu_xu_{xx}\,dx,$$

já que $\gamma(t)\gamma'(t)\ge 0$. Vamos estimar separadamente os dois termos do segundo membro da desigualdade anterior. Da imersão $H^1(0,1)\hookrightarrow L^\infty(0,1)$ tem-se

$$\|u\|_\infty\le c_0\|u\|_{H^1(0,1)}.$$

Logo,

$$\left|\gamma(t)\int_0^1 u^pu_xu_{xx}\,dx\right|\le\frac{\|u\|_\infty^p}{2}\left(\|u_x\|^2+\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2\right)\le$$
$$\le\frac{1}{2}c_0^pK_1^p\left(\|u_x\|^2+\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2\right),$$

graças à estimativa (28). Por outro lado, notando que

$$|q(x,t)|\le c_2\gamma_1+\alpha_1\frac{1}{c_1},\quad x\in[0,1],\ t\in[0,T],$$

onde $\alpha_1=\sup_{0\le t<T}|\alpha'(t)|$, obtém-se

$$\int_0^1[q(x,t)+\gamma(t)]\,u_xu_{xx}\,dx\le$$
$$\le\underbrace{\left(c_2\gamma_1+\frac{\alpha_1+1}{c_1}\right)}_{C}\int_0^1|u_x||u_{xx}|\,dx\le$$
$$\le\frac{C}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2(t)}\|u_x\|^2+\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2\right)\le$$
$$\le\frac{C}{2}\left(c_2^2\|u_x\|^2+\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2\right).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_x\|^2+\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2\right)\le$$
$$\le\left(c_0^pK_1^p+C\right)\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2+$$
$$+\left(c_0^pK_1^p+c_2^2C\right)\|u_x\|^2\le$$
$$\le\left(c_0^pK_1^p+C+c_2^2C\right)\left(\|u_x\|^2+\gamma^2(t)\|u_{xx}\|^2\right).$$

Conclui-se, aplicando-se a Desigualdade de Gronwall, que

$$\|u_m\|_{H^2(0,1)}\le K_2(T),\quad 0<t<t_m. \tag{29}$$

Estimativa a priori III: Por último toma-se $w_j=u_t$ em (25). Então,

$$\|u_t\|^2+\gamma^2(t)\|u_{xt}\|^2+\int_0^1[q(x,t)+\gamma(t)]\,u_xu_t\,dx+$$
$$+\gamma^2(t)\int_0^1 q(x,t)u_{xx}u_{xt}\,dx-a(t)\int_0^1 u_{xx}u_t\,dx$$
$$+\gamma(t)\int_0^1 u^pu_xu_t\,dx=0.$$

Assim, procedendo como nas estimativas anteriores, obtém-se

$$\|u_t\|^2+\frac{1}{c_2^2}\|u_{xt}\|^2\le\left(c_2\gamma_1+\frac{\alpha_1+1}{c_1}\right)\|u_x\|\|u_t\|+$$

$$+\frac{1}{c_1^2}\left(c_2\gamma_1+\frac{\alpha_1}{c_1}\right)\|u_{xx}\|\|u_{xt}\|+$$
$$\left(\frac{\eta}{c_1^2}+\frac{\gamma_1}{c_1}\right)\|u_{xx}\|\|u_t\|+\frac{\|u\|_\infty^p}{c_1}\|u_x\|\|u_t\|.$$

Utilizando cálculos simples e a estimativa (29) conclui-se, finalmente, que

$$\|u'_m\|_{H^1(0,1)}\leq K_3(T),\quad 0<t<t_m. \tag{30}$$

As estimativas (28)-(30) permitem estender cada solução local u_m ao intervalo $[0,T)$. Voltando-se então a tais estimativas, válidas para $0<t<T$, obtém-se

$$u_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)) \tag{31}$$

e

$$u'_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,1)) \tag{32}$$

o que permite a passagem ao limite no problema aproximado (25)-(26) provando-se, assim, a existência de solução u de (20)-(22) no sentido definido em (24).

Unicidade: Usaremos o método da energia. Suponhamos que u_1 e u_2 sejam soluções de (24) e ponhamos $u=u_1-u_2$. Tem-se, da identidade (24),

$$\int_0^t\int_0^1\left(u_s w+\gamma^2(s)\frac{\partial u_s}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+[q(x,s)+\gamma(s)]\frac{\partial u}{\partial x}w+\right.$$
$$+\gamma^2(s)q(x,s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}-a(s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}w+$$
$$\left.+\gamma(s)\left[u_1^p\frac{\partial u_1}{\partial x}-u_2^p\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]w\right)\,dxds=0,$$

$\forall\, w\in L^2(0,T;H_0^1(0,1))$. Em particular, com $w=u$,

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1\left\{\frac{\partial u^2}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\gamma^2(s)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\right\}\,dxds+$$
$$-\int_0^t\int_0^1\left\{\gamma(s)\gamma'(s)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dxds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1\left\{[q(x,s)+\gamma(s)]\frac{\partial u^2}{\partial x}\right\}\,dxds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1\left\{\gamma^2(s)q(x,s)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}\,dxds-$$
$$-\int_0^t\int_0^1\left\{a(s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u\right\}\,dxds+$$
$$+\frac{1}{p+1}\int_0^t\int_0^1\left\{\gamma(s)u\frac{\partial}{\partial x}\left(u_1^{p+1}-u_2^{p+1}\right)\right\}\,dxds=0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\left(\|u(t)\|^2+\gamma^2(t)\|u_x(t)\|^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\left(\|u(s)\|^2+\gamma^2(s)\|u_x(s)\|^2\right)\,ds-$$
$$-\eta\int_0^t\gamma^2(s)\|u_x(s)\|^2\,ds+$$
$$+\frac{1}{p+1}\int_0^t\int_0^1\left\{\gamma(s)\left(u_1^{p+1}-u_2^{p+1}\right)u_x\right\}\,dxds. \tag{33}$$

Quanto à última integral em (33), note-se que

$$\left|\frac{1}{p+1}\int_0^t\int_0^1\left\{\gamma(s)\left(u_1^{p+1}-u_2^{p+1}\right)u_x\right\}\,dxds\right|\leq$$
$$\leq\int_0^t\int_0^1|\gamma(s)|\left(|u_1|^p+|u_2|^p\right)|u_1-u_2|\,|u_x|\,dxds\leq$$
$$\leq K\int_0^t\int_0^1|\gamma(s)||u||u_x|\,dxds\leq$$
$$\leq\frac{K}{2}\int_0^t\left(\|u(s)\|^2+\gamma^2(s)\|u_x(s)\|^2\right)\,ds,$$

onde

$$K=\left(\|u_1\|_{L^\infty(Q_T)}^p+\|u_2\|_{L^\infty(Q_T)}^p\right).$$

Logo,

$$\|u(t)\|^2+\gamma^2(t)\|u_x(t)\|^2\leq$$
$$\leq\int_0^t\left(K+\frac{|\gamma'(s)|}{|\gamma(s)|}\right)\left(\|u(s)\|^2+\gamma^2(s)\|u_x(s)\|^2\right)\,ds,$$

de onde conclui-se, utilizando-se a Desigualdade de Gronwall, que

$$\|u(t)\|^2+\gamma^2(t)\|u_x(t)\|^2=0$$

e, portanto, $u_1=u_2$. ∎

Voltando-se agora às antigas variáveis ξ e τ obtém-se o seguinte resultado de existência e unicidade de solução para o problema (1)-(3):

Teorema 2.2. *Se $u_0\in H_0^1(\Omega_0)\cap H^2(\Omega_0)$ então, para todo $T>0$, existe uma única função $u:Q_\tau\to\mathbb{R}$ satisfazendo*

$$u\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega_\tau)\cap H_0^1(\Omega_\tau)),\ u_\tau\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_\tau)),$$

$$\int_{Q_\tau}\left(u_\tau w+u_{\xi\tau}w_\xi-\eta u_{\xi\xi}w+u_\xi w+u^p u_\xi w\right)\,d\xi d\tau=0, \tag{34}$$

$\forall\, w\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\tau))$ e

$$u(\xi,0)=u_0(\xi),\quad\forall\,\xi\in\Omega_0. \tag{35}$$

3 Comportamento assintótico

Passamos agora ao estudo do comportamento assintótico da solução do problema (1)-(3) obtida na seção anterior. Assim como na prova da existência de solução, trabalharemos com o problema transformado (20)-(22). O principal resultado desta seção é apresentado a seguir.

Teorema 3.1. *Seja u a solução do problema* (1)-(3) *obtida no Teorema 2.2. Então existem constantes $C>0$ e $K>0$ tal que*

$$\|u(\tau)\|^2_{H^1_0(\Omega_\tau)} \leq C\|v_0\|^2_{H^1_0(0,1)}e^{-K\tau}, \quad \forall\, \tau > 0,$$

onde $v_0(x) = u_0\left((\beta_0-\alpha_0)x+\alpha_0\right)$.

Demonstração: Sabemos, do Teorema 2.1, que a solução $u : Q_T \to \mathbb{R}$ com

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(0,1)\cap H^1_0(0,1)),\ u_t \in L^\infty(0,T;H^1_0(0,1))$$

satisfaz

$$\int_0^1 u_t w\, dx + \gamma^2(t)\int_0^1 \frac{\partial u_t}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\, dx +$$
$$\int_0^1 [q(x,t)+\gamma(t)]\frac{\partial u}{\partial x}w\, dx + \gamma^2(t)\int_0^1 q(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\, dx$$
$$-\,a(t)\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}w\, dx + \gamma(t)\int_0^1 u^p\frac{\partial u}{\partial x}w\, dx = 0, \tag{36}$$

$\forall\, w \in L^2(0,T;H^1_0(0,1))$.

Considerando $w=u$ em (36) e utilizando argumentos análogos ao da Estimativa I da demonstração da existência de solução obtém-se a identidade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 u^2\, dx\right\} + \frac{\gamma^2(t)}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 u_x^2\, dx\right\} +$$
$$+\,\frac{\gamma(t)}{2}(\beta'(t)-\alpha'(t))\int_0^1 u^2\, dx + \frac{\gamma^2(t)}{2}q(1,t)u_x^2(1,t) -$$
$$-\,\frac{\gamma^2(t)}{2}q(0,t)u_x^2(0,t) + \frac{\gamma^3(t)}{2}(\beta'(t)-\alpha'(t))\int_0^1 u_x^2\, dx +$$
$$+\,a(t)\int_0^1 u_x^2\, dx = 0 \tag{37}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 u^2\, dx + \gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2\, dx\right\} \leq$$
$$\leq \frac{\gamma(t)}{2}(\alpha'(t)-\beta'(t))\int_0^1 u^2\, dx - \eta\gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2\, dx -$$
$$+\,\frac{\gamma^3(t)}{2}(\alpha'(t)-\beta'(t))\int_0^1 u_x^2\, dx, \tag{38}$$

onde usamos, além de (14)-(16), as identidades

$$\frac{\gamma^2(t)}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 u_x^2\, dx\right\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2\, dx\right\} -$$
$$-\,\gamma(t)\gamma'(t)\int_0^1 u_x^2\, dx$$

e

$$a(t) = \eta\gamma^2(t) + \gamma(t)\gamma'(t).$$

Vamos estimar separadamente cada termo do lado direito de (38). Para isso, recorde-se que, devido à hipótese (4),

$$\frac{1}{c_2} \leq \gamma(t) \leq \frac{1}{c_1}.$$

Portanto,

$$\frac{\gamma(t)}{2}(\alpha'(t)-\beta'(t))\int_0^1 u^2\, dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{2c_1}(\alpha'(t)-\beta'(t))\int_0^1 u^2\, dx \tag{39}$$

e

$$\frac{\gamma^3(t)}{2}(\alpha'(t)-\beta'(t))\int_0^1 u_x^2\, dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{c_1}\frac{\gamma^2(t)}{2}(\alpha'(t)-\beta'(t))\int_0^1 u_x^2\, dx. \tag{40}$$

De (38)-(40) obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 u^2\, dx + \gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2\, dx\right\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2c_1}(\alpha'(t)-\beta'(t))\int_0^1 u^2\, dx - \eta\gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2\, dx -$$
$$+\,\frac{\gamma^2(t)}{2c_1}(\alpha'(t)-\beta'(t))\int_0^1 u_x^2\, dx, \tag{41}$$

Seja

$$f(t) = \int_0^1 u^2\, dx + \gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2\, dx.$$

Com esta notação, a desigualdade (41) se escreve

$$\frac{d}{dt}\{f(t)\} \leq \frac{1}{c_1}\left(\alpha'(t)-\beta'(t)\right)f(t) -$$
$$-\,2\eta\gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2 dx. \tag{42}$$

Da desigualdade de Poincaré tem-se

$$-\int_0^1 u^2\, dx \geq -\int_0^1 u_x^2\, dx.$$

Disto, e de (42), segue que

$$\frac{d}{dt}\{f(t)\} \leq \frac{1}{c_1}\left(\alpha'(t)-\beta'(t)\right)f(t) -$$
$$-\,\eta\gamma^2(t)\int_0^1 u^2 dx - \eta\gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2 dx$$
$$\leq \frac{1}{c_1}\left(\alpha'(t)-\beta'(t)\right)f(t) -$$
$$-\,\frac{\eta}{c_2^2}\int_0^1 u^2\, dx - \eta\gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2\, dx. \tag{43}$$

Tomando

$$c_3 = \min\left\{\frac{1}{c_2^2}\ ,\ 1\right\}$$

obtém-se, de (43),

$$\frac{d}{dt}\{f(t)\} \leq \frac{1}{c_1}\left(\alpha'(t)-\beta'(t)\right)f(t) - c_3\eta f(t),$$

isto é

$$\frac{d}{dt}\{f(t)\} - \left[\frac{1}{c_1}\left(\alpha'(t) - \beta'(t)\right) - c_3\eta\right] f(t) \leq 0. \quad (44)$$

Multiplicando (44) por

$$e^{-\int_0^t \left[\frac{1}{c_1}(\alpha'(s)-\beta'(s))-c_3\eta\right] ds}$$

chega-se à desigualdade

$$\frac{d}{dt}\left\{f(t)e^{-\int_0^t \left[\frac{1}{c_1}(\alpha'(s)-\beta'(s))-c_3\eta\right] ds}\right\} \leq 0. \quad (45)$$

Resolvendo a inequação diferencial (45) obtém-se

$$\begin{aligned} f(t) &\leq f(0)e^{\int_0^t \left[\frac{1}{c_1}(\alpha'(s)-\beta'(s))-c_3\eta\right] ds} = \\ &= f(0)e^{\frac{1}{c_1}(\alpha(t)-\beta(t)-\alpha(0)+\beta(0))}e^{-c_3\eta t} \leq \\ &\leq f(0)e^{\left(-1+\frac{c_2}{c_1}\right)}e^{-c_3\eta t} \leq \\ &\leq f(0)e^{\frac{c_2}{c_1}}e^{-c_3\eta t}. \end{aligned} \quad (46)$$

Observe-se agora que

$$\begin{aligned} &\int_0^1 u^2\, dx + \gamma^2(t)\int_0^1 u_x^2\, dx \geq \\ &\geq \int_0^1 u^2\, dx + \frac{1}{c_2^2}\int_0^1 u_x^2\, dx \geq \\ &\geq c_3\left(\int_0^1 u^2\, dx + \int_0^1 u_x^2\, dx\right). \end{aligned}$$

Disto, e de (46), conclui-se que

$$\begin{aligned} &\|u(t)\|^2_{H_0^1(0,1)} = \int_0^1 u^2\, dx + \int_0^1 u_x^2\, dx \leq \\ &\leq \left[\int_0^1 v_0^2(x)\, dx + \gamma^2(0)\int_0^1 u_x^2(x,0)\, dx\right]\frac{e^{\frac{c_2}{c_1}}}{c_3}e^{-c_3\eta t} \leq \\ &\leq \left[\int_0^1 v_0^2(x)\, dx + \frac{1}{c_1^2}\int_0^1 u_x^2(x,0)\, dx\right]\frac{e^{\frac{c_2}{c_1}}}{c_3}e^{-c_3\eta t} \leq \\ &\leq \frac{c_4}{c_3}\left[\int_0^1 v_0^2(x)\, dx + \int_0^1 u_x^2(x,0)\, dx\right]e^{\frac{c_2}{c_1}}e^{-c_3\eta t} = \\ &= C\|v_0\|^2_{H_0^1(0,1)}e^{-Kt}, \end{aligned} \quad (47)$$

onde $c_4 = \max\{1, \frac{1}{c_1^2}\}$, $C = \frac{c_4}{c_3}e^{\frac{c_2}{c_1}}$ e $K = c_3\eta$. Retornando às variáveis originais ξ e τ e usando (47) segue o resultado.

■

4 Conclusões

O resultado principal apresentado neste artigo está relacionado ao problema de existência, unicidade e comportamento assintótico da solução da equação dissipativa do tipo BBM em um domínio com fronteira móvel. Nossos resultados de decaimento diferem daqueles obtidos por Albert (1986) e Albert (1989), quando considerou o domínio cilíndrico e $x \in \mathbb{R}$, obtendo decaimento algébrico.

Como continuidade deste trabalho, novos problemas podem ser propostos, como considerar um sistema de equações de BBM dissipativo e estudar o comportamento assintótico das soluções e também estabelecer a análise numérica das mesmas.

Agradecimentos

Este trabalho é uma homenagem dos autores pela comemoração dos 35 anos da Revista Ciência e Natura, da qual a primeira autora foi editora chefe. Os autores agradecem o convite para a participação nessa edição especial.

Referências

Adams, R. A., 1975. Sobolev Spaces. Academic Press.

Albert, 1986. Dispersion of low-energy waves for the generalized benjamin-bona-mahony equation. J. Differential Equations 63 (1), 117–134.

Albert, J., 1989. On the decay of solutions of the generalized benjamin-bona-mahony equations. J. Math. Anal. Appl. 141 (2), 527–537.

Benjamin, T. B., Bona, J. L., Mahony, J. J., 1972. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philos. Trans. Roy. Soc. London 272 (1220), 47–78.

Bisognin, V., Perla Menzala, G., 1995. Asymptotic behaviour of nonlinear dispersive models with variable coefficients. Ann. Mat. Pura Appl 168 (4), 219–235.

Bona, J. L., Dougalis, V. A., 1980. An initial and boundary value problem for a model equation for propagation of long waves. J. Math. Anal. Appl. 75 (2), 503–522.

Coddington, E. A., Levinson, N., 1955. Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill.

Límaco, J., Clark, H. R., Medeiros, L. A., 2004. On equations of benjamin-bona-mahony type. Nonlinear Anal. 59 (8), 1243–1265.

Lions, J. L., 1969. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Gauthier-Villars.

Medeiros, L. A., Milla Miranda, M., 1977. Weak solutions for a nonlinear dispersive equation. J. Math. Anal. Appl. 59 (3), 432–441.

Rincon, M. A., Límaco, J., Vale, R., 2010. Analysis and numerical solution of benjamin-bona-mahony equation with moving boundary. Appl. Math. Comput. 216 (1), 138–148.