



Ciência e Natura

ISSN: 0100-8307

cienciaenaturarevista@gmail.com

Universidade Federal de Santa Maria  
Brasil

Viaro Flores, Márcia; Pansonato, Claudia Candida  
Hélices generalizadas e curvas de Bertrand  
Ciência e Natura, vol. 36, núm. II, 2014, pp. 359-366  
Universidade Federal de Santa Maria  
Santa Maria, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467546184003>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica  
Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

## Hélices generalizadas e curvas de Bertrand

### Generalized helices and Bertrand curves

Márcia Viaro Flores<sup>\*1</sup>, Claudia Candida Pansonato<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Federal Farroupilha, Alegrete, RS, Brasil.

<sup>2</sup> Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

#### Resumo

Uma hélice circular é caracterizada por ter curvatura  $\kappa \neq 0$  e torção  $\tau$  constantes. Se a razão  $\frac{\tau}{\kappa}$  for constante, a curva é chamada hélice generalizada. Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada curva de Bertrand se existe uma outra curva  $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que as retas normais de  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  em  $s \in I$  são iguais. Tanto a hélice generalizada como a curva de Bertrand podem ser vistas como generalizações da hélice circular. Neste trabalho fazemos uma revisão de conceitos e resultados sobre hélices e curvas de Bertrand. Além disto, alguns exemplos destas curvas são plotados.

**Palavras-chave:** Hélices. Curvas de Bertrand. Indicatriz de Darboux.

#### Abstract

A circular helix is characterized by having constant curvature  $\kappa \neq 0$  and constant torsion  $\tau$ . If the ratio  $\frac{\tau}{\kappa}$  is constant, the curve is called generalized helix. A curve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  is called a Bertrand curve if there is another curve  $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  such that the normal lines of  $\gamma$  and  $\bar{\gamma}$  at  $s \in I$  are equal. Generalized helices and Bertrand curves can be viewed as generalizations of the circular helix. In this work we review the concepts and results on helices and Bertrand curves. Besides, some examples of these curves are plotted.

**Keywords:** Helices. Bertrand Curves. Darboux indicatrix.

\*marciaviaroflores@bol.com.br

Recebido: 15/01/2014 Aceito: 08/04/2014

## 1 Introdução

Um dos problemas importantes em geometria diferencial de curvas no espaço é a caracterização de uma curva regular. A curvatura  $\kappa$  e a torção  $\tau$  desempenham um papel efetivo nesta caracterização. Uma hélice circular é caracterizada por ter curvatura  $\kappa \neq 0$  e torção  $\tau$  constantes. Se a razão  $\frac{\tau}{\kappa}$  for constante, a curva é chamada hélice generalizada. Tal condição é equivalente aos vetores tangentes fazerem um ângulo constante com uma direção fixa. Existem muitas aplicações interessantes de hélices, sendo que as estruturas helicoidais surgem, por exemplo, em nanomolas, nanotubos de carbono, na forma da hélice dupla do DNA, em escadas helicoidais, entre outras (Lucas e Lambim (2005), N. Chouaieb e Maddocks (2006)).

Outra abordagem para o problema de caracterização de curvas é considerar a relação entre os vetores do referencial de Frenet. Sabemos que o vetor tangente unitário determina a curva a menos de um movimento rígido. Podemos perguntar se o vetor normal principal também determina a curva. Isto só ocorrerá se não existir uma relação linear com coeficientes constantes entre a curvatura e a torção. Quando isto ocorre, temos curvas que possuem o mesmo vetor normal principal em cada ponto. Tais curvas são denominadas *curvas de Bertrand*. Estas curvas foram descobertas por J. Bertrand em 1850 e constituem um importante tópico da geometria clássica de curvas. Tanto as hélices generalizadas como as curvas de Bertrand podem ser vistas como generalizações da hélice circular.

Neste trabalho fazemos uma revisão de conceitos e resultados sobre hélices e curvas de Bertrand, dando demonstrações alternativas de alguns resultados. Todos os argumentos utilizados neste artigo são elementares e clássicos. Observamos também que estas curvas não são suficientemente tratadas em textos usuais de Geometria Diferencial.

Na seção 1 é feito um estudo das hélices generalizadas. Destacamos o resultado de Izumiya e Takeuchi (2002) obtido no Teorema 1 que estabelece que toda hélice generalizada pode ser obtida a partir de uma curva plana.

A seção 2 é dedicada ao estudo das curvas de Bertrand. Destacamos o resultado de Izumiya e Takeuchi (2002) obtido no Teorema 2 que estabelece que toda curva de Bertrand pode ser obtida de uma curva esférica. Tal resultado utiliza um referencial móvel ao longo de uma curva esférica denominado *triedro de Sabban* (ver Koendrink (1990)).

Os resultados dados pelos teoremas 1 e 2 possibilitaram traçar hélices e curvas de Bertrand, utilizando-se o aplicativo *Mathematica*.

Finalmente, na seção 3 analisamos a indicatriz de

Darboux de uma curva de Bertrand  $\tilde{\gamma}$  através do estudo da evoluta esférica da curva esférica  $\gamma$  correspondente à curva  $\tilde{\gamma}$  (Teorema 2). Mostramos que a evoluta esférica é dada pela indicatriz binormal da curva  $\gamma$ .

## 2 Hélices Generalizadas

Esta seção é dedicada ao estudo das hélices generalizadas. As principais referências utilizadas são Izumiya e Takeuchi (2002), Izumiya e N. Takeuchi (2003), Carmo (2005) e Struik (1961).

Para uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada pelo comprimento de arco, temos as conhecidas equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

onde  $\kappa(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção da curva em  $s$ ;  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  são os vetores tangente, normal e binormal, respectivamente.

A seguir apresentamos as definições de hélice circular e de hélice generalizada.

**Definição 1.** Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma hélice circular se a curvatura  $\kappa(s) \neq 0$  e a torção  $\tau(s)$  são constantes.

**Definição 2.** Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $\kappa(s) \neq 0$  é chamada uma hélice generalizada se a reta tangente de  $\gamma$  faz um ângulo constante com uma direção fixada.

Vamos agora determinar a direção fixada dada pela definição acima.

Quando um ponto se move ao longo de uma curva em  $\mathbb{R}^3$ , seu triedro de Frenet,  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ , transladado paralelamente até a origem, define um movimento rígido chamado Movimento de Frenet. A cada instante, o triedro de Frenet determina um eixo de rotação. Este é determinado pelo núcleo da matriz de Frenet

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix}$$

e é dado por  $\mathbf{D}(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)$ . Este vetor é chamado *vetor de Darboux*.

Agora, sendo  $\mathbf{a}$  a direção fixada, temos que  $\gamma' \cdot \mathbf{a} = \text{constante} \Rightarrow \gamma'' \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) = 0$ , ou seja,  $\mathbf{a}$  é ortogonal a  $\mathbf{n}$  para  $\kappa \neq 0$ .

Assim,  $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{t} + \mu\mathbf{b}$  e  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ .

Ainda,  $\gamma''' \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow (\kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}') \cdot \mathbf{a} = 0$  Utilizando as equações de Frenet e  $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{t} + \mu\mathbf{b}$ , obtemos

$$-\kappa^2\lambda + \kappa\tau\mu = 0$$

e, portanto,

$$\mathbf{a} = \frac{\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}}{\sqrt{\tau^2 + \kappa^2}}.$$

Portanto,  $\frac{\mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|}$  é a direção fixa da hélice generalizada.

A proposição a seguir é conhecida como Teorema de Lancret e nos dá uma caracterização da hélice generalizada em função da curvatura e torção. Aqui damos uma demonstração alternativa para esta proposição.

**Proposição 1.** *Uma curva com curvatura não-nula  $\gamma(s)$  é uma hélice generalizada se, e somente se,  $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$  é constante.*

**Demonstração**

Primeiramente, tomando  $\mathbf{a} = \frac{\kappa \mathbf{b} + \tau \mathbf{t}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$ , vamos encontrar  $\mathbf{a}'$ .

Seja  $\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ . Então

$$\mathbf{a}' = \frac{(\kappa' \mathbf{b} + \kappa \mathbf{b}' + \tau' \mathbf{t} + \tau \mathbf{t}')\omega - (\kappa \mathbf{b} + \tau \mathbf{t})\omega'}{\omega^2}.$$

Usando as equações de Frenet e o fato que  $\omega' = \frac{\kappa \kappa' + \tau \tau'}{\omega}$ , obtemos

$$\mathbf{a}' = \frac{\kappa^2 \tau' \mathbf{t} + \tau^2 \kappa' \mathbf{b} - \kappa \kappa' \tau \mathbf{t} - \kappa \tau \tau' \mathbf{b}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Reagrupando os termos de forma conveniente, temos

$$\mathbf{a}' = \frac{\tau(\tau \kappa' - \kappa \tau') \mathbf{b} + \kappa(\kappa \tau' - \kappa' \tau) \mathbf{t}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Suponha  $\gamma(s)$  uma hélice generalizada. Assim,

$$\gamma' \cdot \mathbf{a} = \text{constante}. \quad (2)$$

Derivando 2 e usando as equações de Frenet

$$\gamma'' \cdot \mathbf{a} + \gamma' \cdot \mathbf{a}' = 0 \Rightarrow \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{a}' = 0. \quad (3)$$

Aplicando as expressões de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}'$  em 3,

$$\begin{aligned} & (\kappa \mathbf{n}) \cdot \left( \frac{\kappa \mathbf{b} + \tau \mathbf{t}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right) + \\ & + \mathbf{t} \cdot \left( \frac{\tau(\tau \kappa' - \kappa \tau') \mathbf{b} + \kappa(\kappa \tau' - \kappa' \tau) \mathbf{t}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 \\ \Rightarrow & \mathbf{t} \cdot \left( \frac{\kappa(\kappa \tau' - \kappa' \tau) \mathbf{t}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\kappa(\kappa \tau' - \kappa' \tau)}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Como  $\kappa \neq 0$ , a expressão 4 nos dá:

$$\kappa \tau' - \kappa' \tau = 0. \quad (5)$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{\kappa^2}. \quad (6)$$

Usando 5 e 6, concluímos que

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0, \text{ ou seja, } \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) = \text{constante}.$$

Suponha, agora,  $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) = \text{constante}$ .

Assim,

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{\kappa^2} = 0 \Rightarrow \kappa \tau' - \kappa' \tau = 0. \quad (7)$$

Utilizando isto em 1, concluímos que  $\mathbf{a}' = 0$ .

Então,

$$\gamma'' \cdot \mathbf{a} + \gamma' \cdot \mathbf{a}' = (\kappa \mathbf{n}) \cdot \left( \frac{\kappa \mathbf{b} + \tau \mathbf{t}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right) + \mathbf{t} \cdot 0 = 0.$$

Mas,

$$0 = \gamma'' \cdot \mathbf{a} + \gamma' \cdot \mathbf{a}' = (\gamma' \cdot \mathbf{a})' \Rightarrow \gamma' \cdot \mathbf{a} = \text{constante}.$$

Portanto,  $\gamma$  é uma hélice generalizada. ■

Veremos a seguir como uma hélice generalizada pode ser construída a partir de uma curva plana.

Dada uma curva plana  $\gamma(t)$ , definimos uma curva no espaço

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + (\cot \theta \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau) \mathbf{a} + \mathbf{c}, \text{ onde } \theta \text{ é um número constante e } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{c} \text{ são vetores constantes com } \gamma'(t) \cdot \mathbf{a} = 0 \text{ e } \|\mathbf{a}\| = 1.$$

**Teorema 1.** *A curva  $\tilde{\gamma}$  dada acima é uma hélice generalizada. Além disto, todas as hélices generalizadas podem ser construídas por este método.*

**Demonstração** Prova da 1ª afirmação.

Mostremos que  $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$  é constante. Assumimos  $\gamma(t)$  uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco.

Derivando  $\tilde{\gamma}$ , obtemos

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t) + \cot \theta \mathbf{a}.$$

$\tilde{\gamma}''(t) = \kappa_p(t) \mathbf{n}(t)$ , onde  $\kappa_p$  é a curvatura da curva plana.

$$\tilde{\gamma}'''(t) = \kappa_p'(t) \mathbf{n}(t) - (\kappa_p(t))^2 \mathbf{t}(t).$$

Também sabemos que para a curva  $\tilde{\gamma}$ ,

$$\kappa(t) = \frac{\|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''\|}{(\tilde{\gamma}' \cdot \tilde{\gamma}')^{\frac{3}{2}}} \text{ e } \tau(t) = \frac{\det(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}''')}{\|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''\|^2}.$$

Efetuada os cálculos, obtemos

$$\kappa(t) = |\kappa_p(t)| \sin^2 \theta \text{ e } \tau(t) = \kappa_p(t) \cot \theta \sin^2 \theta.$$

Assim,  $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$  é constante.

Prova da 2ª afirmação.

Seja  $\tilde{\gamma}$  uma hélice generalizada parametrizada pelo comprimento de arco. Neste caso, a imagem esférica de

$$\text{Darboux } \mathbf{d}(s) = \frac{\mathbf{D}(s)}{\|\mathbf{D}(s)\|} \text{ é constante.}$$

Denote  $\mathbf{a} = \mathbf{d}(s) = \frac{\tau(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}}$ , onde  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{B}$  são o tangente e o binormal, respectivamente, de  $\tilde{\gamma}$ .

Temos que  $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) = c$ . Escolha  $\theta$  tal que  $\cot \theta = c$  ( $\sin \theta > 0$ ).

Considere a curva  $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) - (\tilde{\gamma}(s) \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$ .

Então  $\gamma(s) \cdot \mathbf{a} = 0$ . Logo  $\gamma$  está no plano normal a  $\mathbf{a}$ , ou seja,  $\gamma$  é uma curva plana.

Temos que  $\tilde{\gamma}'(s) \cdot \mathbf{a} = \cos \theta$  e  $\|\tilde{\gamma}'(s) - (\tilde{\gamma}'(s) \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}\| = \sin \theta$ .

Segue que

$$\begin{aligned}\gamma(s) + (\cot \theta \int_0^s \|\gamma'(\tau)\| d\tau)\mathbf{a} = \\ \tilde{\gamma} - \cos \theta \mathbf{a}s + \cot \theta \sin \theta \mathbf{a}s = \tilde{\gamma}.\end{aligned}$$

Como consequência temos o seguinte resultado. ■

**Corolário 1.** Nas condições do Teorema anterior, a curva plana  $\gamma$  é um círculo se, e somente se, as hélices generalizadas correspondentes são hélices circulares.

**Demonstração** Pelos cálculos feitos no Teorema anterior, temos que a curvatura  $\kappa$  e a torção  $\tau$  das hélices generalizadas são dadas por

$$\kappa(t) = |\kappa_p(t)| \sin^2 \theta \quad \text{e} \quad \tau(t) = \kappa_p(t) \cot \theta \sin^2 \theta.$$

Temos que  $\kappa$  e  $\tau$  são constantes se, e somente se,  $\kappa_p$  é constante. ■

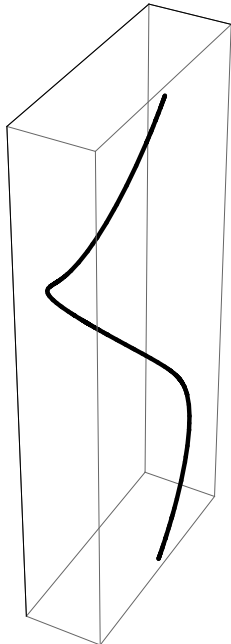


Figura 1: Hélice generalizada

A hélice generalizada da figura 1 foi gerada a partir da elipse  $\gamma(t) = (\cos t, 3 \sin t)$ ,  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ ,  $\cot \theta = 1$  e  $c = 0$ .

### 3 Curvas de Bertrand

**Definição 3.** Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $\kappa(s) \neq 0$  é chamada uma curva de Bertrand se existe uma curva  $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que as retas normais principais de  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  em  $s \in I$  são iguais. Neste caso,  $\bar{\gamma}$  é chamada um par de Bertrand de  $\gamma$ .

A proposição que segue nos fornece uma caracterização das curvas de Bertrand.

**Proposição 2.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva no espaço com  $\kappa(s) \neq 0$ . Suponha que  $\tau(s) \neq 0$ . Então  $\gamma$  é uma curva de Bertrand se, e somente se, existem números reais não-nulos  $A, B$  tal que

$$A\kappa(s) + B\tau(s) = 1, \text{ para todo } s \in I.$$

#### Demonstração

Suponha que  $\gamma$  é uma curva de Bertrand com  $\bar{\gamma}$  o par de Bertrand.

Sejam  $\mathbf{t}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$  os vetores tangentes unitários a  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$ , respectivamente. Temos

$$\frac{d}{dt}(\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t}) = \bar{\mathbf{t}}' \cdot \mathbf{t} + \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t}'. \quad (8)$$

Como os vetores  $\mathbf{t}'$  e  $\bar{\mathbf{t}}'$  são paralelos à reta normal principal comum, a expressão 8 se anula.

Denotando por  $\alpha$  o ângulo entre os tangentes nos pontos correspondentes, temos

$$\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} = \|\bar{\mathbf{t}}\| \|\mathbf{t}\| \cos \alpha = \cos \alpha = \text{constante}, \quad (9)$$

Assim, em todos os pontos correspondentes de  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  o ângulo entre os vetores tangentes é o mesmo.

Vamos utilizar  $s$  e  $\bar{s}$  como o parâmetro comprimento de arco de  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$ , respectivamente. Assim, como  $\gamma$  é curva de Bertrand,

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s). \quad (10)$$

Então, usando 9 e as equações de Frenet,

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} = \frac{d\bar{\gamma}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \mathbf{t} \\ &= \frac{ds}{d\bar{s}} (\mathbf{t} + a\mathbf{n}') \cdot \mathbf{t} \\ &= \frac{ds}{d\bar{s}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + a(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) \cdot \mathbf{t}) \\ &= \frac{ds}{d\bar{s}} (1 - a\kappa).\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{ds}{d\bar{s}} (1 - a\kappa) = \text{constante} \quad (11)$$

Por outro lado, temos

$$\|\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t}\| = \left\| \frac{ds}{d\bar{s}} ([\mathbf{t} + a(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})] \times \mathbf{t}) \right\| = \left\| \frac{ds}{d\bar{s}} a\tau\mathbf{n} \right\|$$

$$\|\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t}\| = \left\| \frac{ds}{d\bar{s}} a\tau \right\|. \quad (12)$$

Também

$$\|\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t}\| = \|\bar{\mathbf{t}}\| \|\mathbf{t}\| \sin \alpha = \sin \alpha. \quad (13)$$

De 9, 12 e 13, obtemos

$$a\tau \frac{ds}{d\bar{s}} = \pm \sin \alpha = \text{constante}. \quad (14)$$

Então, de 11 e 14, temos

$$\frac{\frac{ds}{d\bar{s}}(1 - a\kappa)}{\frac{ds}{d\bar{s}}a\tau} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = C \Rightarrow \frac{1 - a\kappa}{a\tau} = C. \quad (15)$$

Fazendo, em 15,  $a = A$  e  $C = \frac{B}{a}$ ,

$$\frac{1 - A\kappa}{A\tau} = \frac{B}{A} \Rightarrow 1 - A\kappa = B\tau \Rightarrow A\kappa + B\tau = 1.$$

Agora, seja a curva  $\gamma(s)$ , com  $s$  seu parâmetro comprimento de arco. Tomemos a curva

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + A\mathbf{n}(s) \quad (16)$$

e mostremos que se

$$A\kappa(s) + B\tau(s) = 1, \quad (17)$$

então  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  são curvas de Bertrand.

Diferenciando a expressão 16 com relação a  $s$ , obtemos

$$\frac{d\bar{\gamma}}{ds} = \mathbf{t} + A\mathbf{n}' = (1 - A\kappa)\mathbf{t} + A\tau\mathbf{b} \quad (18)$$

Em 17, tomando  $C = \frac{B}{A}$ , ficamos com

$$1 - A\kappa = CA\tau. \quad (19)$$

Portanto, de 18 e 19

$$\frac{d\bar{\gamma}}{ds} = A\tau(C\mathbf{t} + \mathbf{b}). \quad (20)$$

Assim, se a orientação de  $\bar{\gamma}$  já foi escolhida, o vetor tangente unitário a  $\bar{\gamma}$  é da forma

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{C\mathbf{t} + \mathbf{b}}{\sqrt{1 + C^2}} \quad (21)$$

Derivando 21, obtemos

$$\frac{d\bar{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}}(C\mathbf{t}' + \mathbf{b}') \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}}(C\kappa - \tau)\mathbf{n}.$$

Observe que este vetor é a derivada do vetor tangente a  $\bar{\gamma}$  e pertence à normal principal a  $\bar{\gamma}$  e esta normal coincide com a normal principal de  $\gamma$ . Portanto,  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  são curvas de Bertrand. ■

**Corolário 2.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva no espaço com  $\kappa(s) \neq 0$  e  $\tau(s) \neq 0$ . Então  $\gamma$  é uma curva de Bertrand se, e somente se, existe um número real  $A \neq 0$  tal que

$$A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s) = 0.$$

**Demonstração** Pela proposição anterior, como  $\gamma$  é uma curva de Bertrand, existem números reais não-nulos  $A$  e  $B$  tais que  $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ .

Então como  $\tau(s) \neq 0$ ,  $B = \frac{1 - A\kappa(s)}{\tau(s)}$ . Ou seja, a expressão  $\frac{1 - A\kappa(s)}{\tau(s)}$  é uma constante.

Diferenciando, temos

$$\frac{-A\kappa'(s)\tau(s) - (1 - A\kappa(s))\tau'(s)}{[\tau(s)]^2} = 0.$$

Portanto,

$$-A\kappa'(s)\tau(s) - \tau'(s) + A\kappa(s)\tau'(s) = 0$$

Suponha agora que

$$A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s) = 0$$

Portanto,  $\frac{A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s)}{[\tau(s)]^2} = 0$ .

Então,

$$\frac{A(\tau'(s)\kappa(s) - \kappa'(s)\tau(s)) - \tau'(s)}{\tau(s)^2} = \left( \frac{1 - A\kappa(s)}{\tau(s)} \right)' = 0$$

Logo,  $\frac{1 - A\kappa(s)}{\tau(s)} = B$ . Assim,  $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ , com  $B$  uma constante real.

Assim, pela proposição anterior,  $\gamma$  é uma curva de Bertrand. ■

Veremos na proposição a seguir que curvas de Bertrand espaciais possuem torção nunca nula.

**Proposição 3.** Se  $\gamma$  é uma curva de Bertrand, ou  $\gamma$  é plana ou  $\tau(s)$  nunca se anula.

**Demonstração** Seja  $\gamma$  uma curva de Bertrand com  $\bar{\gamma}$  o par de Bertrand e sejam  $\mathbf{t}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$  os vetores tangentes unitários de  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$ , respectivamente.

Pela demonstração da Proposição 2,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} &= \cos \alpha = \text{constante} \quad e \\ \|\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t}\| &= \sin \alpha = \text{constante}, \end{aligned} \quad (22)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo formado entre os vetores tangentes.

Sendo  $s$  o comprimento de arco de  $\gamma$ , temos que

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + a\mathbf{n}(s). \quad (23)$$

Derivando 23 com relação ao comprimento de arco  $\bar{s}$  de  $\bar{\gamma}$ , obtemos

$$\frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{\gamma}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = (\gamma'(s) + a\mathbf{n}'(s)) \frac{ds}{d\bar{s}}. \quad (24)$$

Usando as equações de Frenet em 24

$$\bar{\mathbf{t}} = (\mathbf{t} + a(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})) \frac{ds}{ds} = ((1 - a\kappa)\mathbf{t} + a\tau\mathbf{b}) \frac{ds}{ds}. \quad (25)$$

Por outro lado, usando 25

$$\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t} = ((1 - a\kappa)\mathbf{t} + a\tau\mathbf{b}) \frac{ds}{ds} \times \mathbf{t} = a\tau \frac{ds}{ds} \mathbf{n}. \quad (26)$$

Assim, como  $\|\mathbf{n}\| = 1$ , de 22 obtemos o que segue:

$$\|\bar{\mathbf{t}} \times \mathbf{t}\| = \|a\tau \frac{ds}{ds} \mathbf{n}\| = \|a\tau \frac{ds}{ds}\| = C, \quad (27)$$

onde  $C$  é uma constante.

Como  $a \neq 0$  e  $\frac{ds}{ds} \neq 0$ , da expressão 27 concluímos que:

(a) se  $C = 0$ , então  $\tau(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ , ou seja,  $\gamma$  é uma curva plana;

(b) se  $C \neq 0$ , então  $\tau(s) \neq 0$ , para todo  $s \in I$ .

Portanto, uma curva de Bertrand é plana ou sua torção nunca se anula. ■

Vimos anteriormente que toda hélice pode ser obtida a partir de uma curva plana. Veremos agora um resultado similar envolvendo as curvas de Bertrand. Para isso, vamos definir o chamado *triedro de Sabban*.

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva esférica parametrizada pelo comprimento de arco e  $\sigma$  o parâmetro comprimento de arco de  $\gamma$ . Considere:

$$\mathbf{t}(\sigma) = \gamma'(\sigma);$$

$$\mathbf{s}(\sigma) = \gamma(\sigma) \times \mathbf{t}(\sigma).$$

$\{\gamma(\sigma), \mathbf{t}(\sigma), \mathbf{s}(\sigma)\}$  forma um referencial ortonormal chamado *triedro de Sabban*.

Vamos mostrar agora que  $\mathbf{t}'(\sigma) = -\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)\mathbf{s}(\sigma)$ , onde  $\kappa_g$  é a curvatura geodésica de  $\gamma \subset \mathbb{S}^2$ .

De fato, temos que a curvatura geodésica é dada por  $\kappa_g(\sigma) = \langle \gamma''(\sigma), \mathbf{t}(\sigma) \times \mathbf{N}(\sigma) \rangle$ . Utilizando  $\mathbf{N} = \gamma$  para o vetor normal da esfera temos

$$\kappa_g(\sigma) = \langle \mathbf{t}'(\sigma), \mathbf{t}(\sigma) \times \gamma(\sigma) \rangle = \langle \mathbf{t}'(\sigma), \mathbf{s}(\sigma) \rangle.$$

Assim obtemos as equações:

$$\gamma'(\sigma) = \mathbf{t}(\sigma)$$

$$\mathbf{t}'(\sigma) = -\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)\mathbf{s}(\sigma)$$

$$\mathbf{s}'(\sigma) = -\kappa_g(\sigma)\mathbf{t}(\sigma).$$

Definimos uma curva no espaço

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(r) dr + a \cot \theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathbf{s}(r) dr + \mathbf{c}. \quad (28)$$

**Teorema 2.** A curva  $\tilde{\gamma}$  acima é uma curva de Bertrand. Além disto, todas as curvas de Bertrand podem ser construídas por este método.

**Demonstração** Vamos mostrar primeiramente que  $\tilde{\gamma}$  dada em 28 é uma curva de Bertrand. A ideia aqui é utilizar a Proposição 2.

Para isso, precisamos calcular a curvatura e a torção de  $\tilde{\gamma}(\sigma)$ .

Derivando  $\tilde{\gamma}(\sigma)$ , obtemos

$$\tilde{\gamma}'(\sigma) = a(\gamma(\sigma) + \cot \theta \mathbf{s}(\sigma)).$$

$$\tilde{\gamma}''(\sigma) = a(1 - \cot \theta \kappa_g(\sigma))\mathbf{t}(\sigma).$$

$$\tilde{\gamma}'''(\sigma) = -a \cot \theta \kappa_g'(\sigma)\mathbf{t}(\sigma) + a(1 - \cot \theta \kappa_g(\sigma))(-\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)\mathbf{s}(\sigma)).$$

Assim, encontramos, com  $\varepsilon = \pm 1$ :

$$\kappa(\sigma) = \varepsilon \frac{\sin^2 \theta (1 - \kappa_g(\sigma) \cot \theta)}{a} \quad (29)$$

e

$$\tau(\sigma) = \frac{\sin^2 \theta (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta)}{a}. \quad (30)$$

Logo, existem números reais  $A = a\varepsilon$  e  $B = a \cot \theta$  tais que  $A\kappa(\sigma) + B\tau(\sigma) = 1$  o que significa que  $\tilde{\gamma}$  é uma curva de Bertrand.

Agora, sendo  $\tilde{\gamma}$  curva de Bertrand, queremos mostrar que

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(r) dr + a \cot \theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathbf{s}(r) dr + \mathbf{c},$$

para alguma curva esférica  $\gamma$ .

Como  $\tilde{\gamma}$  é curva de Bertrand, existem  $A, B \in \mathbb{R}$  tais que  $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ .

Façamos  $a = A$ ,  $\cot \theta = \frac{B}{a}$ ,  $a > 0$  e escolhemos

$\varepsilon = \pm 1$  com  $\frac{\varepsilon \sin \theta}{a} > 0$ .

Definimos uma curva esférica dada por

$$\gamma(s) = \varepsilon(\sin \theta \mathbf{T}(s) - \cos \theta \mathbf{B}(s)), \quad (31)$$

onde  $\mathbf{T}(s)$  e  $\mathbf{B}(s)$  são os vetores tangente e binormal, respectivamente, da curva  $\tilde{\gamma}$ .

Então, derivando a expressão 31, usando as equações de Frenet com  $\mathbf{N}$  o vetor normal principal de  $\tilde{\gamma}$  e usando a relação  $A\kappa + B\tau = 1$ , encontramos

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \varepsilon(\sin \theta \mathbf{T}'(s) - \cos \theta \mathbf{B}'(s)) \\ &= \varepsilon(\sin \theta \kappa + \cos \theta \tau) \mathbf{N} \\ &= \varepsilon(\kappa + \cot \theta \tau) \mathbf{N} \\ &= \frac{\varepsilon}{a} \sin \theta \mathbf{N}(s). \end{aligned}$$

Seja  $\sigma$  o parâmetro comprimento de arco de  $\gamma$ , então

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\| = \left| \frac{\varepsilon}{a} \sin \theta \right| = \frac{\varepsilon}{a} \sin \theta.$$

Também temos

$$\begin{aligned} a\gamma(s) \frac{d\sigma}{ds} &= a\varepsilon(\sin \theta \mathbf{T}(s) - \cos \theta \mathbf{B}(s)) \frac{\varepsilon}{a} \sin \theta \\ &= \sin \theta (\sin \theta \mathbf{T}(s) - \cos \theta \mathbf{B}(s)). \end{aligned} \quad (32)$$



Logo,

$$a \cot \theta \gamma(s) \times \frac{d\gamma}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \cos \theta (\sin \theta \mathbf{B}(s) + \cos \theta \mathbf{T}(s)). \quad (33)$$

Como  $\mathbf{s} = \gamma \times \frac{d\gamma}{d\sigma}$ , temos

$$\begin{aligned} a \int_0^\sigma \gamma(r) dr + a \cot \theta \int_0^\sigma \mathbf{s}(r) dr = \\ \int_{u_0}^u \sin \theta (\sin \theta \mathbf{T}(t) - \cos \theta \mathbf{B}(t)) dt \\ + \int_{u_0}^u \cos \theta (\sin \theta \mathbf{B}(t) + \cos \theta \mathbf{T}(t)) dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$a \int_0^\sigma \gamma(r) dr + a \cot \theta \int_0^\sigma \mathbf{s}(r) dr = \int_{u_0}^u \mathbf{T}(t) dt = \tilde{\gamma} + \mathbf{c}.$$

E, portanto,

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^\sigma \gamma(r) dr + a \cot \theta \int_{\sigma_0}^\sigma \mathbf{s}(r) dr + \mathbf{c}.$$

A curva de Bertrand da figura 3 foi gerada a partir da curva esférica

$$\gamma(t) = (\sin t \cos 2t, \sin t \sin 2t, \cos t),$$

figura 2, tomando-se  $a = 1$ ,  $\cot \theta = 1$  e  $\mathbf{c} = 0$ .

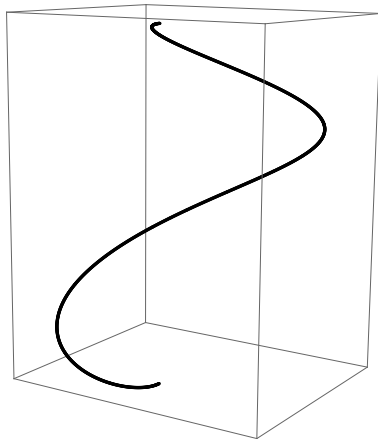


Figura 2: Curva Esférica

**Corolário 3.** A curva esférica  $\gamma$  é um círculo se, e somente se, as curvas de Bertrand correspondentes são hélices circulares

**Demonstração** Pela demonstração do teorema anterior, temos

$$\kappa'(\sigma) = -\frac{\varepsilon \kappa'_g(\sigma) \cos \theta}{a} \quad \text{e} \quad \tau'(\sigma) = \frac{\sin^2 \theta \kappa'_g(\sigma)}{a}.$$

A curva  $\gamma$  é um círculo se, e somente se,  $\kappa'_g(\sigma) \equiv 0$ . Esta condição é equivalente a  $\kappa'(\sigma) = \tau'(\sigma) \equiv 0$  ■

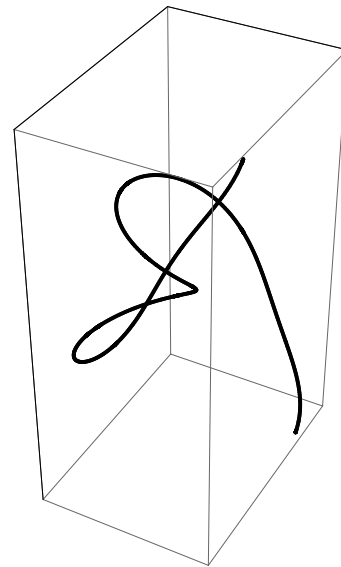


Figura 3: Curva de Bertrand

## 4 Indicatriz de Darboux

A curva descrita na esfera pelo vetor unitário de Darboux,  $\mathbf{d} = \mathbf{D}/\|\mathbf{D}\|$ , é conhecida por *indicatriz de Darboux*. Quando a curva é uma hélice generalizada, vimos que  $\mathbf{d}$  é a direção fixa da hélice.

Veremos a seguir o que ocorre com a indicatriz de Darboux de uma curva de Bertrand  $\tilde{\gamma}$ . Para isto considere a curva esférica correspondente dada pelo Teorema 2. No artigo Izumiya e Takeuchi (2002), a *evoluta esférica* desta curva (centro de curvatura de  $\gamma$ ) é obtida através do estudo das singularidades da função altura.

A evoluta esférica de uma curva  $\gamma$  pode também ser vista como o envelope da família de grandes círculos ortogonais a  $\gamma$ . Esta família é descrita por

$$\begin{aligned} F : I \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (s, \mathbf{x}) &\longmapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}, \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{t}$  é o tangente unitário de  $\gamma$ .

Tomando o envelope

$$D_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2; F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0\}$$

desta família e utilizando as equações de Frenet, obtemos  $D_F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2; \mathbf{x} = \pm \mathbf{b}(s), s \in I\}$ , ou seja, os vetores binormais de  $\gamma$  formam sua evoluta esférica.

Podemos expressar a evoluta esférica em termos do referencial de Sabban. Neste caso, de  $F(s, \mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial s} = 0$  obtemos

$$\mathbf{x} \cdot (-\gamma + k_g \mathbf{s}) = 0,$$

$$\text{ou seja, } \mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2 + 1}} (k_g \gamma + \mathbf{s}).$$

Temos então a seguinte proposição.



**Proposição 4.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva esférica e  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva de Bertrand correspondente a  $\gamma$ . Então a indicatriz de Darboux de  $\tilde{\gamma}$  é igual à evoluta esférica de  $\gamma$ .*

**Demonstração** Pela demonstração do Teorema 2, temos que a curvatura e a torção de  $\tilde{\gamma}$  são dadas por

$$\kappa(\sigma) = \frac{\varepsilon \sin^2 \theta (1 - \kappa_g(\sigma) \cot \theta)}{a} \quad (34)$$

e

$$\tau(\sigma) = \frac{\sin^2 \theta (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta)}{a}. \quad (35)$$

Ainda, pelo Teorema 2, os vetores tangente  $\mathbf{T}$  e normal  $\mathbf{N}$  de  $\tilde{\gamma}$  são dados por

$$\mathbf{T}(\sigma) = a(\gamma(\sigma) + \cot \theta \mathbf{s}(\sigma)) \frac{d\sigma}{ds} \quad (36)$$

e

$$\mathbf{N}(\sigma) = \varepsilon \mathbf{t}(\sigma). \quad (37)$$

Então, de 36 e 37, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\sigma) &= \mathbf{T}(\sigma) \times \mathbf{N}(\sigma) \\ &= a(\gamma(\sigma) + \cot \theta \mathbf{s}(\sigma)) \frac{d\sigma}{ds} \times \varepsilon \mathbf{t}(\sigma) \\ &= \varepsilon a \left( \frac{d\sigma}{ds} \right) (\mathbf{s}(\sigma) - \cot \theta \gamma(\sigma)). \end{aligned} \quad (38)$$

Como o vetor de Darboux é dado por  $\mathbf{D} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$ , temos utilizando 34, 35, 36 e 38 que

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\sigma) &= \left[ \frac{\sin^2 \theta}{a} (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta) \right] a(\gamma(\sigma) \\ &\quad + \cot \theta \mathbf{s}(\sigma)) \frac{d\sigma}{ds} \\ &\quad + \left[ \frac{\varepsilon}{a} \sin^2 \theta (1 - \kappa_g(\sigma) \cot \theta) \right] a \varepsilon \left( \frac{d\sigma}{ds} \right) (\mathbf{s}(\sigma) \\ &\quad - \cot \theta \gamma(\sigma)). \end{aligned}$$

Efetuada os cálculos, obtemos

$$\mathbf{D}(\sigma) = \frac{d\sigma}{ds} (\mathbf{s}(\sigma) + \kappa_g(\sigma) \gamma(\sigma)).$$

Portanto,

$$\mathbf{d}(\sigma) = \frac{\mathbf{D}(\sigma)}{\|\mathbf{D}(\sigma)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(\sigma) + 1}} (\kappa_g(\sigma) \gamma(\sigma) + \mathbf{s}(\sigma)).$$

Logo,  $\mathbf{d}$  é a evoluta esférica de  $\gamma$ . ■

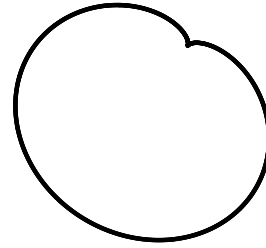


Figura 4: Evoluta esférica da curva da figura 2

## Referências

- Carmo, M. P., 2005. Geometria diferencial de curvas e superfícies. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.
- Izumiya, S., N. Takeuchi, 2003. Special curves and ruled surfaces. Contributions to Algebra and Geometry 44, 203–212.
- Izumiya, S., Takeuchi, N., 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves. J. geom. 74, 97–109.
- Koendrink, J., 1990. Solid shape. MIT Press, Cambridge, MA.
- Lucas, A. A., Lambim, P., 2005. Diffraction by dna, carbon nanotubes and other helical nanostructures. Rep. Prog. Phys. 68, 1181–1249.
- N. Chouaieb, A. G., Maddocks, J., 2006. Helices. PANS 103, 9398–9403.
- Struik, D. J., 1961. Lectures on classical differential geometry. Dover Publications, Inc., New York.