Ciência e Natura, v.37 n.1, 2015, jan.-abr. p. 23 – 44
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIA e NATURA 35 anos

Solução para as Equações de Navier-Stokes em domínios tridimensionais finos

Solutions for the Navier-Stokes Equations in tridimensional thin domains

Felipe Crivellaro Minuzzi*[1], João Paulo Lukaszczyk[2],

[1] Acadêmico do Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil.
Professor Associado do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil.

Resumo

A forma clássica do sistema de equações de Navier-Stokes, o qual deriva do princípio de conservação de massa e momento linear, descreve o movimento de um fluido homogêneo sujeito a um campo de forças externas. Neste trabalho, desenvolve-se um estudo para encontrar o intervalo maximal de existência de soluções no tempo para as equações de Navier-Stokes em um domínio tridimensional fino, isto é, $\Omega_\epsilon = \omega \times (0, \epsilon)$*, onde* $\omega \subset \mathbb{R}^2$ *e* $\epsilon \in (0, 1)$*, considerando combinações de diferentes condições de fronteira.*

Palavras-chave: *Equações de Navier-Stokes, Domínios finos, Existência de solução.*

Abstract

The classical form of the Navier-Stokes equations system, which is derived from the principle of conservation of mass and momentum, describes the motion of a homogeneous fluid subject to a field of external forces. In this work, we develop a study to find the maximal interval of existence of solutions in time to the Navier-Stokes equations in a three dimensional thin domain, i.e., $\Omega_\epsilon = \omega \times (0, \epsilon)$*, where* $\omega \subset \mathbb{R}^2$ *e* $\epsilon \in (0, 1)$*, considering different combinations of boundary conditions.*

Keywords: *Navier-Stokes equations; Thin domains; Existence of solutions.*

Recebido: 30/06/2014 Aceito: 20/11/2014

* feminuzzi@hotmail.com

1 Introdução

Por volta dos séculos XVIII e XIX, os matemáticos Leonhard Paul Euler (1707 - 1783), Claude Louis Marie Henri Navier (1785 - 1836) e George Gabriel Stokes (1819 - 1903) fizeram grandes avanços no campo da mecânica dos fluidos. O primeiro foi responsável pela dedução do movimento de fluidos quando estes não são viscosos, enquanto os outros dois consideraram o efeito da viscosidade. O resultado de seus trabalhos são o que hoje chamamos de *Equações de Euler* e *Equações de Navier-Stokes*, esta, objeto de estudo deste trabalho.

As equações de Navier-Stokes descrevem o movimento de um fluido homogêneo, sujeito a um campo de forças externos, e são deduzidas a partir da 2ª Lei de Newton, do Princípio de Conservação da Massa e de Momento Linear, como pode ser visto em Melo e Neto (1991), Chorin e Marsden (1990), Fox e McDonald (1988) e Kreiss e Lorenz (1989). Sua importância não atinge apenas a Matemática, mas campos como Física, Dinâmica dos Fluidos, Meteorologia, e, mais específicos, Dinâmica dos Oceanos, Geofísica, Mecânica dos Sólidos e Fisiologia, entre outros.

Apesar de muito usada, quando falamos em existência de soluções clássicas em $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, este ainda é um problema em aberto da Matemática, conhecido por ser um dos *Millenium Problems* do *Clay Mathematical Institute*, que premia 1 milhão de dólares a quem resolvê-lo. O trabalho da matemática russa Olga Ladyzhenskaya foi o primeiro que provou de maneira rigorosa a convergência de um método de diferenças finitas para as equações de Navier-Sokes. Hoje em dia, são conhecidos resultados de existência e unicidade para solução fraca em espaços de Sobolev, como pode ser encontrado em Lions (1969) e Temam (1984), os quais usam o método de Galerkin. Recentemente, em janeiro de 2014, o matemático cazáque Muchtarbai Otelbajew publicou um artigo afirmando ter encontrado solução clássica para as equações de Navier-Stokes. Tal trabalho ainda está em análise pela comissão examinadora do *Clay Mathematical Institute*.

A forma vetorial das equações de Navier-Stokes é dadas por

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u - \mu\Delta u + \nabla p = f, & \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ \mathbf{div}\ u = 0, & \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \end{cases}$$

onde Ω é um domínio suave em $\mathbb{R}^3$. O objetivo deste trabalho é estudar o intervalo maximal de existência no tempo de solução para o sistema acima em domínios tridimensionais finos, isto é, quando uma dimensão é pequena quando comparada as demais. Em outras palavras, consideraremos um domínio do tipo $\Omega_\epsilon = \omega\times(0,\epsilon)\subset\mathbb{R}^3$, sendo $\omega\subset\mathbb{R}^2$ um domíno regular e $0<\epsilon<1$.

O estudo de solução global no tempo para domínios finos foi iniciado por Raugel e Sell (1989), os quais consideraram uma dilatação no domínio para encontrar as equações de Navier-Stokes definidas em $\omega\times(0,1)$ fixo. Diferentemente, o artigo de Temam e Ziane (1996), não usa a dilatação e sim, trabalha diretamente em Ω_ϵ. Além disso, consideramos combinações entre condições de fronteira, as quais influenciam fortemente no comportamento das soluções.

Nosso trabalho está estruturado em duas seções principais; na primeira seção, deduzimos uma formulação matemática específica para domínios finos, como as combinações entre as condições de fronteira de *Dirichlet*, periódica e livre, e a interferência dessas na definição dos espaços funcionais H e V. Outra importante ferramenta usada nesta seção é o operador média integral na direção fina, definido de acordo com a condição de fronteira a ser utilizado. Por fim, apresentamos algumas desigualdades clássicas, como a de Poincaré, além de outras essencialmente importantes.

Na segunda seção, é feita uma formulação fraca para as equações de Navier-Stokes, baseando-se no operador média integral, além de estimativas *a priori* para o mesmo. Tais estimativas tornam-se uma importante ferramenta para os resultados acerca do intervalo maximal de existência de solução no tempo, estes dependendo da condição de fronteira considerada.

2 Introdução ao estudo em domínios finos

No desenvolver deste trabalho, usamos notações e resultados usuais no estudo de equações diferenciais parciais e em análise funcional, baseando-se principalmente em Evans (2010), Adams e Fournier (2003), Brezis (1983) e Rudin (1986). No que segue, Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^3$ e $L^p(\Omega)$, $1\le p<\infty$, é o espaço das funções mensuráveis $g:\Omega\to\mathbb{R}$ tais que

$$|g|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\ g(x)\ |^p \ dx\right)^{1/p} < \infty.$$

e $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev no qual todas as derivadas parciais de primeira ordem, com relação a todas variáveis, pertencem à $L^2(\Omega)$.

Considera-se também os espaços funcionais:

1. $\Lambda = \{u\in C_c^\infty(\Omega); \mathbf{div} u = 0\}$;
2. H é o fecho de Λ em $L^2(\Omega_\epsilon)$, munido da norma
$$|u|_\epsilon = \left(\int_{\Omega_\epsilon} |\ u\ |^2 \ dx\right)^{1/2}$$
3. V é o fecho de Λ em $H_0^1(\Omega_\epsilon)$, munido da norma
$$||u||_\epsilon = |\nabla u|_\epsilon = \left(\int_{\Omega_\epsilon} |\ \nabla u\ |^2 \ dx\right)^{1/2}$$

Os produtos internos de H e V são denotados por $(\cdot,\cdot)_\epsilon$ e $((\cdot,\cdot))_\epsilon$, respectivamente. A fórmula trilinear b_ϵ é dada por

$$b_\epsilon(u,v,w) = (u\cdot\nabla v, w)_\epsilon = \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_\epsilon} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j\, dx,$$

onde $u,v,w \in H^1(\Omega)$. Ainda, faz-se o uso do Operador de Stokes:

Definição 2.1. *Seja $P : L^2(\Omega_\epsilon) \to H_\epsilon$ o operador projeção. Define-se o operador de Stokes, denotado por A_ϵ, por*

$$\begin{array}{rcl} A_\epsilon : V_\epsilon \cap H^2(\Omega_\epsilon) \subset H & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & A_\epsilon u = -P(\Delta u) \end{array}$$

Bastante utilizado são as potências do Operador de Stokes, em particular, $A_\epsilon^{1/2}$. Quando usamos esta potência, o domínio do operador coincide com V, ou seja, $D(A_\epsilon) = V$. Sendo assim, se $u \in V$, então

$$||u||_\epsilon = \left|A_\epsilon^{1/2} u\right|_\epsilon$$

Para mais detalhes sobre este operador, veja Foias et al. (2002).

Seja Ω_ϵ um domínio fino, isto é, $\Omega_\epsilon = \omega \times (0,\epsilon)$, onde $0 < \epsilon < 1$ e $\omega \subset \mathbb{R}^2$ é suave. O objetivo deste trabalho é estudar o intervalo maximal de existência de soluções $u(x,t)$ no tempo do sistema

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u - \mu\Delta u + \nabla p = f, & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \times (0,\infty) \\ \textbf{div}\; u = 0, & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{em} \quad x \in \Omega_\epsilon, \end{cases}$$

onde

(i) $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ é o campo de velocidades no ponto $x = (x_1,x_2,x_3)$ e no instante t;

(ii) $p : \Omega_\epsilon \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $T > 0$, é a pressão;

(iii) $\mu > 0$ é a viscosidade do sistema e;

(iv) $u_0(x) = (u_0^1(x), u_0^2(x), u_0^3(x))$ é a velocidade inicial dada.

Neste trabalho, supõe-se que

$$u_0 \in H \text{ ou } V \;\text{ e }\; f \in L^\infty(0,+\infty,H)$$

Para isso, serão necessárias algumas definições iniciais com relação a fronteira de Ω_ϵ e aos espaços V e H, os quais serão definidos de acordo com a condição de fronteira em questão.

2.1 Condições de Fronteira

No que segue, a fronteira $\partial\Omega_\epsilon$ de Ω_ϵ será denotada por $\partial\Omega_\epsilon = \Gamma_t \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l$, onde

$$\Gamma_t = \omega \times \{\epsilon\},\;\; \Gamma_b = \omega \times \{0\},\;\; \text{e}\;\; \Gamma_l = \partial\omega \times (0,\epsilon).$$

Para a formulação do problema, faz-se algumas combinações entre certas condições para $\partial\Omega_\epsilon$, a saber, as condições de *Dirichlet*, periódica e de fronteira livre.

Mais precisamente, as combinações usadas são:

1. A condição de fronteira livre em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ e periódica em Γ_l, denotada por **(FP)**. Considera-se, neste caso, $\omega = (0,l_1)\times(0,l_2)$, $l_1, l_2 > 0$,
$$u_3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_t \cup \Gamma_b,$$
e u_i é periódica nas direções x_1 e x_2 com período l_1 e l_2, respectivamente, para $i = 1{,}2{,}3$. Além disso,
$$\int_{\Omega_\epsilon} u_0^j(x)\, dx = \int_{\Omega_\epsilon} f_j(x,t)\, dx = 0, \quad j = 1{,}2.$$

2. A condição de fronteira livre em $\partial\Omega_\epsilon$, denotada por **(FF)**. Neste caso, se $\mathbf{n}$ é o vetor normal apontado para fora de $\partial\Omega_\epsilon$, então
$$u\cdot\mathbf{n} = 0, \;\; \text{rot}u \times \mathbf{n} = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega_\epsilon.$$
A primeira relação acima indica que a velocidade é sempre perpendicular ao vetor normal, isto é, acompanha a superfície da fronteira.

3. A condição de Dirichlet em $\partial\Omega_\epsilon$, denotada por **(DD)**, ou seja,
$$u(x,t) = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega_\epsilon.$$

4. A condição de Dirichlet em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ e periódica em Γ_l, denotada por **(DP)**. Neste caso,
$$u(x,t) = 0 \;\; \text{em} \;\; \Gamma_t \cup \Gamma_b$$
e u é periódica em Γ_l. Além disso,
$$\int_{\Omega_\epsilon} u_0^3\, dx = \int_{\Omega_\epsilon} f_3(x,t)\, dx = 0.$$

Observe que os espaços H e V são influenciados por estas condições de fronteiras. Sendo assim, quando não houver diferença nas demonstrações, utilizaremos a notação para estes espaços por H_ϵ e V_ϵ.

2.2 Os operadores $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$

Seja $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ uma função escalar. O operador média integral na direção fina é definido por:

$$M_\epsilon : L^2(\Omega_\epsilon) \;\longrightarrow\; L^2(\Omega_\epsilon)$$

$$\phi \quad \longmapsto \quad M_\epsilon\phi = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \phi(x_1, x_2, s)\, ds. \quad (1)$$

Note que apesar de ϕ ser uma função de três variáveis, M_ϵ possui apenas duas, a saber, x_1 e x_2, visto que a integral em (1) depende apenas da terceira componente de ϕ. Define-se, também, o operador N_ϵ por

$$N_\epsilon\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi(x_1, x_2, x_3) - M_\epsilon\phi(x_1, x_2).$$

Portanto,

$$N_\epsilon + M_\epsilon = I_{L^2(\Omega_\epsilon)}.$$

O operador $\tilde{M}_\epsilon$ é definido para funções $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\epsilon : \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon) \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon) \\ u \quad &\longmapsto \quad \tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, M_\epsilon u_3) \end{aligned}$$

Dependendo da condição de fronteira, define-se:

(i) Para (FF) e (FP), $\tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, 0)$.

(ii) Para (DD) e (DP), $\tilde{M}_\epsilon u = 0$.

Analogamente, define-se o operador $\tilde{N}_\epsilon$ por $\tilde{N}_\epsilon u = u - \tilde{M}_\epsilon u$, ou seja, $\tilde{N}_\epsilon + \tilde{M}_\epsilon = I_{\mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)}$.

Um fato interessante sobre os operadores definidos acima é que todos são projeções, isto é,

$$M_\epsilon^2 = M_\epsilon,\ N_\epsilon^2 = N_\epsilon,\ \tilde{M}_\epsilon^2 = \tilde{M}_\epsilon,\ \tilde{N}_\epsilon^2 = \tilde{N}_\epsilon.$$

De fato, seja $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$. Então,

$$M_\epsilon^2(\phi) = (M_\epsilon \circ M_\epsilon)(\phi) = M_\epsilon(M_\epsilon\phi).$$

Assim,

$$\begin{aligned} M_\epsilon(M_\epsilon\phi) &= \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon} M_\epsilon\phi(x_1, x_2)\, dx_3 \\ &= \frac{M_\epsilon\phi(x_1, x_2)}{\epsilon}\int_0^\epsilon dx_3 \\ &= M_\epsilon\phi(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Para N_ϵ, tem-se

$$\begin{aligned} N_\epsilon^2(\phi) = N_\epsilon(N_\epsilon\phi) &= N_\epsilon(\phi - M_\epsilon\phi) \\ &= N_\epsilon\phi - N_\epsilon(M_\epsilon\phi) \\ &= \phi - M_\epsilon\phi - (M_\epsilon\phi - M_\epsilon(M_\epsilon\phi)) \\ &= \phi - M_\epsilon\phi - (M_\epsilon\phi - M_\epsilon\phi) \\ &= \phi - M_\epsilon\phi = N_\epsilon\phi, \end{aligned}$$

com $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$. Analogamente mostra-se para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$. Além disso, é pertinente observar que, independente da condição de fronteira, cada componente de $\tilde{N}_\epsilon u$ satisfaz uma das seguintes situações:

$$\begin{aligned} &N_\epsilon u_j \equiv 0 \ \text{ em } \ \Gamma_t \cup \Gamma_b \quad \text{ ou} \\ &\int_0^\epsilon N_\epsilon u_j\, dx_3 = 0, \quad \text{para} \quad j = 1,2,3. \end{aligned} \quad (2)$$

O seguinte resultado reúne algumas propriedades para os operadores $M_\epsilon, N_\epsilon, \tilde{M}_\epsilon, \tilde{N}_\epsilon$, as quais serão úteis na demonstração do lema 2.1.

Proposição 2.1. *Vale que:*

(i) M_ϵ é a projeção ortogonal de $L^2(\Omega_\epsilon)$ em $L^2(\omega)$.

(ii) $M_\epsilon N_\epsilon = 0$ e $\tilde{M}_\epsilon\tilde{N}_\epsilon = 0$.

(iii) $\tilde{M}_\epsilon\nabla' = \nabla' M_\epsilon$, $\tilde{N}_\epsilon\nabla' = \nabla' N_\epsilon$.

(iv) Se $\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$ então $M_\epsilon\phi \in H^k(\omega)$ e $N_\epsilon\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$, $\forall\, k \geq 0$.

(v) A condição de fronteira para $\tilde{M}_\epsilon$ em $\partial\omega$ é a mesma de $u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$ em $\partial\omega \times (0, \epsilon)$.

(vi) Os operadores $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$ são auto-adjuntos.

Demonstração:

(i) Dado $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ tem-se, para todo $\theta \in L^2(\omega)$,

$$\begin{aligned} (\phi - M_\epsilon\phi, \theta)_{L^2(\Omega_\epsilon)} &= \int_{\Omega_\epsilon} [\phi - M_\epsilon\phi]\theta\, dx \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \phi\theta - M_\epsilon\phi\theta\, dx \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} \phi\theta\, dx - \int_{\Omega_\epsilon} M_\epsilon\phi\theta\, dx \end{aligned} \quad (3)$$

Resolvendo a primeira integral de (3), obtêm-se

$$\int_{\Omega_\epsilon} \phi\theta\, dx = \epsilon\int_\omega \theta(M_\epsilon\phi)\, dx. \quad (4)$$

Da segunda integral de (3),

$$\int_{\Omega_\epsilon} M_\epsilon\phi\theta\, dx = \epsilon\int_\omega \theta(M_\epsilon\phi)\, dx. \quad (5)$$

Comparando (4) e (5), segue que

$$(\phi - M_\epsilon\phi, \theta)_{L^2(\Omega_\epsilon)} = 0,$$

ou seja, M_ϵ é a projeção ortogonal de $L^2(\Omega_\epsilon)$ em $L^2(\omega)$.

(ii) Tem-se, para $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$,

$$\begin{aligned} M_\epsilon N_\epsilon &= M_\epsilon(N_\epsilon\phi) \\ &= M_\epsilon(\phi - M_\epsilon\phi) \\ &= M_\epsilon\phi - M_\epsilon(M_\epsilon\phi) \\ &= M_\epsilon\phi - M_\epsilon\phi = 0. \end{aligned}$$

Para $\tilde{M}_\epsilon\tilde{N}_\epsilon$ a demonstração é análoga.

(iii) Seja $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\epsilon\nabla' &= \tilde{M}_\epsilon(\nabla'\phi) \\ &= \tilde{M}_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, 0\right) \\ &= \left(M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right), 0\right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, pode-se inverter a integração pela derivação em cada coordenada do último vetor da expressão acima. Assim,

$$\begin{aligned}\left(M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right), 0\right) &= \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}M_\epsilon\phi, \frac{\partial}{\partial x_2}M_\epsilon\phi, 0\right) &= \nabla' M_\epsilon\phi\end{aligned}$$

Logo, $\tilde{M}_\epsilon(\nabla'\phi) = \nabla' M_\epsilon\phi$. Para $\tilde{N}_\epsilon\nabla'$, tem-se

$$\begin{aligned}(\tilde{N}_\epsilon\nabla')(\phi) &= \tilde{N}_\epsilon(\nabla'\phi) = \tilde{N}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, 0\right) \\ &= \left(N_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), N_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right), 0\right) \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), \frac{\partial\phi}{\partial x_2} - M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right), 0\right).\end{aligned}$$

Novamente, pelo Teorema da Convergência dominada,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), \frac{\partial\phi}{\partial x_2} - M_\epsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right), 0\right) &= \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}N_\epsilon\phi, \frac{\partial}{\partial x_2}N_\epsilon\phi, 0\right) &= \\ \nabla' N_\epsilon\phi.\end{aligned}$$

Logo, $\tilde{N}_\epsilon(\nabla'\phi) = \nabla' N_\epsilon\phi$.

(iv) Seja $\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$. Para $k = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_\omega |M_\epsilon\phi(x_1,x_2)|^2\ dx_1dx_2 &= \\ \int_\omega \left|\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \phi(x_1,x_2,s)\ ds\right|^2\ dx_1dx_2.\end{aligned} \tag{6}$$

Mas, pela Desigualdade de Hölder, para $p = q = 2$,

$$\int_0^\epsilon |\phi|\ ds \le \left(\int_0^\epsilon 1\ ds\right)^{1/2}\left(\int_0^\epsilon |\phi|^2\ ds\right)^{1/2}$$

Logo,

$$\left(\int_0^\epsilon |\phi|\ ds\right)^2 \le \epsilon\int_0^\epsilon |\phi|^2\ ds. \tag{7}$$

De (6) e (7), obtem-se

$$\begin{aligned}\int_\omega \left|\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \phi\ ds\right|^2\ dx_1dx_2 &\le \\ \int_\omega \left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon |\phi|\ ds\right)^2\ dx_1dx_2 &\le \\ \int_\omega \frac{1}{\epsilon}\left(\epsilon\int_0^\epsilon |\phi|^2\ ds\right)\ dx_1dx_2 &= \\ \epsilon\,||\phi||^2_{L^2(\Omega_\epsilon)}.\end{aligned}$$

Assim, $||M_\epsilon\phi||^2_{L^2(\omega)} \le \epsilon\,||\phi||^2_{L^2(\Omega_\epsilon)}$. Como $\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$, segue que $||M_\epsilon\phi||^2_{L^2(\omega)}$ é finito e portanto $M_\epsilon\phi \in H^k(\omega)$. Além disso, já que $M_\epsilon\phi \in H^k(\omega)$ e $\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$, segue que $N_\epsilon\phi = \phi - M_\epsilon\phi \in H^k(\Omega_\epsilon)$.

(v) Suponha que u satisfaz (DD). Então, $u \equiv 0$ em Γ_l, isto é, $u_i \equiv 0$ para $i = 1,2,3$ em $\partial\omega \times (0,\epsilon)$. Assim, como $\tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, M_\epsilon u_3)$, tem-se que $M_\epsilon u_i \equiv 0$ para $i = 1,2,3$, ou seja, $\tilde{M}_\epsilon u \equiv 0$ em $\partial\omega$.

Se u satisfaz (FP), u é periódica nas direções x_1 e x_2 com período $l_1, l_2 > 0$, ou seja, para todo $i = 1,2,3$, tem-se $u_i(x_1 + l_1, x_2 + l_2, x_3) = u_i(x_1, x_2, x_3)$. Assim, para todo $i = 1,2,3$,

$$\begin{aligned}M_\epsilon u_i(x_1 + l_1, x_2 + l_2) &= \\ \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_i(x_1 + l_1, x_2 + l_2, s)\ ds &= \\ \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_i(x_1, x_2, s)\ ds = M_\epsilon u_i(x_1, x_2),\end{aligned}$$

isto é, $\tilde{M}_\epsilon u$ é periódica nas direções x_1 e x_2.

A condição (FF) implica que $u \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\text{rot}(u \times \mathbf{n}) = 0$ em $\partial\Omega_\epsilon$. Logo,

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\epsilon u(x_1,x_2) &= (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, M_\epsilon u_3) &= \\ \left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_1\ ds, \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_2\ ds, \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u_3\ ds\right) &&= \\ \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon (u_1,u_2,u_3)\ ds.\end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{M}_\epsilon u \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon (u_1,u_2,u_3)\cdot\mathbf{n}\ ds = 0.$$

Além disso, $(\tilde{M}_\epsilon u) \times \mathbf{n} = \tilde{M}_\epsilon(u \times \mathbf{n})$ e

$$\begin{aligned}\text{rot}\left((\tilde{M}_\epsilon u) \times \mathbf{n}\right) &= \text{rot}\left(\tilde{M}_\epsilon(u \times \mathbf{n})\right) \\ &= \tilde{M}_\epsilon\left(\text{rot}(u \times \mathbf{n})\right) = 0,\end{aligned}$$

quando $(x_1,x_2) \in \partial\omega$ e $x_3 \in (0,\epsilon)$.

Portanto, $\tilde{M}_\epsilon u$ satisfaz (FF).

(vi) Sejam $u, v \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$. Então,

$$\begin{aligned}\left(\tilde{M}_\epsilon u, v\right)_\epsilon &= \int_{\Omega_\epsilon}\left(\tilde{M}_\epsilon u\right) v\ dx \\ &= \int_0^\epsilon\int_\omega \left(\tilde{M}_\epsilon u\right) v\ dx_1dx_2dx_3 \\ &= \int_\omega \tilde{M}_\epsilon u\left[\int_0^\epsilon v\ dx_3\right] dx_1dx_2 \\ &= \int_\omega \left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon u\ ds\int_0^\epsilon v\ dx_3\right] dx_1dx_2 \\ &= \int_\omega \left[\int_0^\epsilon u\ ds\right]\tilde{M}_\epsilon v\ dx_1dx_2 \\ &= \int_{\Omega_\epsilon} u\left(\tilde{M}_\epsilon v\right)\ dx = \left(u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon.\end{aligned}$$

Ainda,

$$\left(\tilde{N}_\epsilon u, v\right)_\epsilon = \left(u - \tilde{M}_\epsilon u, v\right)_\epsilon$$

$$
\begin{aligned}
&= (u,v)_\epsilon - \left(\tilde{M}_\epsilon u, v\right)_\epsilon \\
&= (u,v)_\epsilon - \left(u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon \\
&= \left(u, v - \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(u, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon
\end{aligned}
$$

■

Os resultados do lema a seguir independem da condição de fronteira escolhida e por isso estas serão omitidas.

Lema 2.1. *Sejam $u, v \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon)$. Então:*

(i) $\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \tilde{N}_\epsilon u \cdot \nabla \tilde{M}_\epsilon v \, dx = 0$

(ii) $|u|_\epsilon^2 = \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$ *e* $||u||_\epsilon^2 = \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 + \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2$

(iii) Se $v \in V_\epsilon$ então $\tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon v \in V_\epsilon$

(iv) $b_\epsilon(u,u,\tilde{M}_\epsilon v) = b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v) + b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v)$ *e* $b_\epsilon(u,u,\tilde{N}_\epsilon v) = b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v) + b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v) + b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v)$, *onde $u,v \in V_\epsilon$.*

(v) Para todo $u \in D(A_\epsilon)$, tem-se

$$\Delta \tilde{N}_\epsilon u = \tilde{N}_\epsilon \Delta u \ \text{ e } \ \Delta \tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon \Delta u$$

Demonstração:
(i) Sejam $u, v \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon)$. Tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \tilde{N}_\epsilon u \cdot \nabla \tilde{M}_\epsilon v \, dx &= \\
\int_{\Omega_\epsilon} (\nabla N_\epsilon u_1 \nabla M_\epsilon v_1 + \nabla N_\epsilon u_2 \nabla M_\epsilon v_2 &+ \\
+ \nabla N_\epsilon u_3 \nabla M_\epsilon v_3) \, dx
\end{aligned}
$$

Note que a expressão acima é igual a

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} \Big(\nabla' N_\epsilon u_1 \cdot \nabla' M_\epsilon v_1 &+ \frac{\partial N_\epsilon u_1}{\partial x_3}\frac{\partial M_\epsilon v_1}{\partial x_3} + \\
\nabla' N_\epsilon u_2 \cdot \nabla' M_\epsilon v_2 &+ \frac{\partial N_\epsilon u_2}{\partial x_3}\frac{\partial M_\epsilon v_2}{\partial x_3} + \\
&+ \nabla' N_\epsilon u_3 \cdot \nabla' M_\epsilon v_3 + \\
&+ \frac{\partial N_\epsilon u_3}{\partial x_3}\frac{\partial M_\epsilon v_3}{\partial x_3}\Big) \, dx. \quad (8)
\end{aligned}
$$

Como $M_\epsilon v_i$ não dependem de x_3, pois $N_\epsilon u_i$ depende de x_3, segue que $\dfrac{\partial M_\epsilon v_i}{\partial x_3} \equiv 0$, para $i = 1,2,3$ e, além disso, pela propriedade (iii) da proposição anterior, $\nabla' N_\epsilon u_i \cdot \nabla' M_\epsilon v_i = \tilde{N}_\epsilon \nabla' u_i \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_i$, $i = 1,2,3$. Logo, (8) é igual à

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\epsilon} \Big(\tilde{N}_\epsilon \nabla' u_1 \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_1 + \tilde{N}_\epsilon \nabla' u_2 \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_2 &+ \\
\tilde{N}_\epsilon \nabla' u_3 \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_3\Big) \, dx. \quad (9)
\end{aligned}
$$

Observe que o conjunto

$$A = \left\{ \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \phi(x_1, x_2, s) \, ds, \phi \in L^2(\Omega_\epsilon) \right\} \subset L^2(\omega)$$

é fechado. De fato, tomando uma sequência de funções $(\phi_n) \subset A$ tal que $\phi_n \to \phi$, onde $\phi \in L^2(\omega)$, basta escolher $\theta(x_1, x_2, x_3) \in L^2(\Omega_\epsilon)$ de modo que $\phi = \dfrac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \theta \, ds$ e assim $\phi \in A$. Portanto, pela propriedade (i) da proposição anterior, pode-se decompor $L^2(\Omega_\epsilon)$ como a soma direta de $M_\epsilon \left(L^2(\Omega_\epsilon)\right)$ e $N_\epsilon \left(L^2(\Omega_\epsilon)\right)$ da mesma maneira que $\mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$ é soma direta de $\tilde{M}_\epsilon \left(L^2(\Omega_\epsilon)\right)$ e $\tilde{N}_\epsilon \left(L^2(\Omega_\epsilon)\right)$. Logo,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \tilde{N}_\epsilon \nabla' u_i \cdot \tilde{M}_\epsilon \nabla' v_i \, dx = 0,$$

para todo $i = 1,2,3$ e a integral em (9) é nula, ou seja,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \tilde{N}_\epsilon u \cdot \nabla \tilde{M}_\epsilon v \, dx = 0. \quad (10)$$

(ii) No item anterior, foi provado que o conjunto A é fechado e portanto, pode-se escrever $u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$ como a soma dos vetores ortogonais $\tilde{M}_\epsilon u$ e $\tilde{N}_\epsilon u$. Assim,

$$
\begin{aligned}
|u|_\epsilon^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} |u|^2 \, dx = \int_{\Omega_\epsilon} \left|\left(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u\right)\right|^2 \, dx \\
&= \int_{\Omega_\epsilon} \left|\left(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u\right) \cdot \left(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u\right)\right| \, dx \\
&= \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \underbrace{2 \int_{\Omega_\epsilon} \tilde{M}_\epsilon u \cdot \tilde{N}_\epsilon u \, dx.}_{= 0 \text{ pois } \tilde{M}_\epsilon u \perp \tilde{N}_\epsilon u}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$|u|_\epsilon^2 = \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2.$$

Além disso, vale que

$$
\begin{aligned}
||u||_\epsilon^2 &= \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\Omega_\epsilon} \left|\nabla(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u)\right|^2 \, dx \\
&= \int_{\Omega_\epsilon} \left|\nabla(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u) \cdot \nabla(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u)\right| \, dx \\
&= \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 + \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 + \\
&+ \underbrace{2 \int_{\Omega_\epsilon} \left(\nabla \tilde{M}_\epsilon u \cdot \nabla \tilde{N}_\epsilon u\right) \, dx.}_{= 0 \text{ por } (10)}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$||u||_\epsilon^2 = \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 + \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2$$

(iii) Seja $v \in V_\epsilon$. Então, para qualquer condição de fronteira considerada, $v \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon)$. Pelo item (iv) da proposição anterior, conclui-se que $\tilde{M}_\epsilon v \in \mathbb{H}^1(\omega)$. Mas,

$$\left|\left|\tilde{M}_\epsilon v\right|\right|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)}^2 = \int_{\Omega_\epsilon} \left|\tilde{M}_\epsilon v(x_1, x_2, x_3)\right|^2 \, dx \quad =$$

$$\begin{aligned}\int_0^\epsilon \int_\omega \left|\tilde{M}_\epsilon v(x_1,x_2,x_3)\right|^2 \; dx_1dx_2dx_3. &= \\ \int_0^\epsilon ||\tilde{M}_\epsilon v||^2_{\mathbb{L}^2(\omega)} \; dx_3 &= \\ ||\tilde{M}_\epsilon v||^2_{\mathbb{L}^2(\omega)} \int_0^\epsilon \; dx_3 &= \\ \epsilon\, ||\tilde{M}_\epsilon v||^2_{\mathbb{L}^2(\omega)}.\end{aligned}$$

Logo, como $\tilde{M}_\epsilon v \in \mathbb{H}^1(\omega)$, tem-se que $\| \tilde{M}_\epsilon v \|^2_{\mathbb{L}^2(\omega)}$ é finita e portanto $\tilde{M}_\epsilon v \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$. Analogamente, para $\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{M}_\epsilon v$, $i = 1,2,3$, sendo que $\frac{\partial}{\partial x_3}\tilde{M}_\epsilon v \equiv 0$. Além disso, pelo item (v) da proposição anterior, $\tilde{M}_\epsilon v$ satisfaz a mesma condição de fronteira de v.

Para concluir que $\tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$, resta verificar se $\mathbf{div}\tilde{M}_\epsilon v = 0$. De fato, para as condições (DD) e (DP), como $\tilde{M}_\epsilon v = 0$, segue que $\mathbf{div}\tilde{M}_\epsilon v = 0$. Para as demais condições, tem-se que $\mathbf{div} v = 0$, isto é,

$$\mathbf{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \mathbf{div} v \; dx_3 &= \\ \frac{1}{\epsilon}\left(\int_0^\epsilon \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\; dx_3 + \int_0^\epsilon \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\; dx_3 + \int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\; dx_3\right) &= \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon v_1 \; dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon v_2\; dx_3 + \int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\; dx_3, &\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}M_\epsilon v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}M_\epsilon v_2 \;\; = \;\; -\int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\; dx_3. \qquad (11)$$

Mas, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\; dx_3 = \frac{1}{\epsilon}v_3(x_1,x_2,\epsilon) - \frac{1}{\epsilon}v_3(x_1,x_2,0) = 0,$$

pois, para (FP), $v_3(x_1,x_2,\epsilon) = v_3(x_1,x_2,0) = 0$, para (PP), tomando ϵ como período, $v_3(x_1,x_2,\epsilon) = v_3(x_1,x_2,0)$ e, para (FF), como $\tilde{M}_\epsilon v = (M_\epsilon v_1, M_\epsilon v_2, 0)$, tem-se que $M_\epsilon v_3 = 0$, ou seja, $\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon v_3 \; dx_3 = 0$. Isto implica que

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon v_3\; dx_3 = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\; dx_3.$$

Portanto, de (11),

$$\frac{\partial}{\partial x_1}M_\epsilon v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}M_\epsilon v_2 \; = \; 0,$$

e, já que $\frac{\partial}{\partial x_3}M_\epsilon v_3 = 0$ pois $M_\epsilon v_3$ não depende de x_3,

$$\mathbf{div}\tilde{M}_\epsilon v = 0,$$

isto é, $\tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$. Além disso, $\tilde{N}_\epsilon v \in V_\epsilon$ pois $\tilde{N}_\epsilon v = v - \tilde{M}_\epsilon v$ e $v, \tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$.

(iv) Sejam $u, v \in V_\epsilon$. Tem-se que

$$\begin{aligned} b_\epsilon(u,u,\tilde{M}_\epsilon v) &= b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u + \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) \\ &= b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) \\ &+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right).\end{aligned}$$

Note que $b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) = 0$, pois

$$\begin{aligned} b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) \;=\; \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_\epsilon} N_\epsilon u_i \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} M_\epsilon v_j \; dx &= \\ \sum_{i,j=1}^{3}\int_\omega\int_0^\epsilon N_\epsilon u_i \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} M_\epsilon v_j \; dx &= \\ \sum_{i,j=1}^{3}\int_\omega\left(\int_0^\epsilon N_\epsilon u_i \; dx_3\right)\frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i}M_\epsilon v_j dx_1dx_2. \qquad (12)&\end{aligned}$$

Mas, pela propriedade (ii) da proposição anterior,

$$\begin{aligned}\int_0^\epsilon N_\epsilon u_i \; dx_3 \; = \; \epsilon\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon N_\epsilon u_i\; dx_3 \;\; &= \;\; \epsilon M_\epsilon\left(N_\epsilon u_i\right) \\ &= \;\; \epsilon\left(M_\epsilon \circ N_\epsilon\right)(u_i) \\ &= \;\; 0,\end{aligned}$$

ou seja, a integral em (12) é nula. Além disso,

$$b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) = 0$$

e, portanto,

$$b_\epsilon(u,u,\tilde{M}_\epsilon v) = b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right).$$

Analogamente, vale que

$$\begin{aligned} b_\epsilon(u,u,\tilde{N}_\epsilon v) &= b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) \\ &+ b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right).\end{aligned}$$

Mas $b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) = 0$, já que

$$\begin{aligned} b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) \;=\; \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_\epsilon} M_\epsilon u_i \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} N_\epsilon v_j \; dx &= \\ \sum_{i,j=1}^{3}\int_\omega \underbrace{\left(\int_0^\epsilon N_\epsilon v_j \; dx_3\right)}_{=\,0} M_\epsilon u_i \frac{\partial M_\epsilon u_j}{\partial x_i} dx_1dx_2 \;=\; 0.&\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} b_\epsilon(u,u,\tilde{N}_\epsilon v) &= b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) \\ &+ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right).\end{aligned}$$

(v) Para as condições de fronteira (DP) ou (DD), tem-se $\tilde{M}_\epsilon u = 0$, para $u \in D(A_\epsilon)$. Neste caso,

$$\Delta\tilde{M}_\epsilon u = 0,$$

e

$$\tilde{M}_\epsilon \Delta u = \tilde{M}_\epsilon (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3) = 0,$$

visto que, como $u \in D(A_\epsilon)$, então $u \in \mathbb{H}^2(\Omega_\epsilon)$ e assim $\Delta u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$. Portanto, $\Delta \tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon \Delta u$. Ainda, tem-se que $\tilde{N}_\epsilon u = u - \tilde{M}_\epsilon u = u - 0 = u$, isto é, $\Delta \tilde{N}_\epsilon u = \Delta u$. Por outro lado,

$$\tilde{N}_\epsilon \Delta u = \Delta u - \tilde{M}_\epsilon \Delta u = \Delta u - 0 = \Delta u.$$

Logo, $\Delta \tilde{N}_\epsilon u = \tilde{N}_\epsilon \Delta u$.

Para as condições de fronteira (FP), (FF), sejam $v \in C_0^\infty(\omega) \times C_0^\infty(\omega)$ e $u \in D(A_\epsilon)$. Como

$$\tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, 0),$$

tem-se

$$\begin{aligned} \int_\omega \Delta(\tilde{M}_\epsilon u) \cdot v \, dx_1 dx_2 &= \\ \int_\omega \left(\Delta' M_\epsilon u_1, \Delta' M_\epsilon u_2, 0\right) \cdot (v_1, v_2, 0) \, dx_1 dx_2 &= \\ \sum_{i=1}^2 \int_\omega \Delta' M_\epsilon u_i v_i \, dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Green, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_\omega \Delta' M_\epsilon u_i v_i \, dx_1 dx_2 &= \\ -\sum_{i=1}^2 \int_\omega \nabla'(M_\epsilon u_i) \cdot \nabla' v_i \, dx_1 dx_2 &+ \\ \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\omega} v_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} M_\epsilon u_i \, dS &= \\ -\sum_{i=1}^2 \int_\omega \nabla'(M_\epsilon u_i) \cdot \nabla' v_i \, dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

pois $v \equiv 0$ em $\partial\omega$ e $\mathbf{n}$ é a normal de $\partial\omega$. Assim, pela propriedade (iii) da proposição anterior,

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \int_\omega \nabla'(M_\epsilon u_i) \cdot \nabla' v_i \, dx_1 dx_2 &= \\ -\sum_{i=1}^2 \int_\omega \tilde{M}_\epsilon(\nabla' u_i) \cdot \nabla' v_i \, dx_1 dx_2 &= \\ -\sum_{i=1}^2 \int_\omega \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon (\nabla' u_i) \, dx_3\right) \cdot \nabla' v_i \, dx_1 dx_2 &= \\ -\frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx. \end{aligned} \tag{13}$$

Novamente, pela fórmula de Green,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx &= \\ \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\epsilon} v_i \Delta u_i \, dx - \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^2 \int_{\partial\Omega_\epsilon} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \, dS. \end{aligned} \tag{14}$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\epsilon} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \, dS &= \int_{\Gamma_t} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \, dS + \int_{\Gamma_l} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \, dS \\ &+ \int_{\Gamma_b} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \, dS. \end{aligned} \tag{15}$$

A segunda integral depois da igualdade de (15) é nula, pois se $x \in \Gamma_l$, então $(x_1, x_2) \in \partial\omega$ e $v_i(x_1, x_2) = 0$, já que $v_i \in C_0^\infty(\omega)$. Agora, quando $x \in \Gamma_t$ ou $x \in \Gamma_b$, tem-se que $\mathbf{n} = \pm e_3 = (0, 0, 1)$ e assim

$$\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial u_i}{\partial x_3}$$

e, de acordo com a condição (FP), deve-se ter $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_3} = 0$ para $i = 1, 2$.

Já para a condição de fronteira (FF), observa-se que

$$\text{rot} u = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

e $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ em Γ_t e Γ_b, logo,

$$\text{rot} u \times \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, 0\right) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0.$$

Mas $u \cdot \mathbf{n} = 0$ em Γ_t e Γ_b, isto é, $u_3 = 0$ e $\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0$. Assim,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0.$$

Como o somatório em (13) só compreende $i = 1,2$, segue que a primeira e a terceira integral depois da igualdade de (15) são nulas e portanto

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \, dS = 0.$$

Substituindo em (14), tem-se

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\epsilon} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_\epsilon} v_i \Delta u_i \, dx &= \\ \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^2 \int_\omega \int_0^\epsilon v_i \Delta u_i \, dx = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^2 \int_\omega v_i \left(\int_0^\epsilon \Delta u_i\right) dx &= \\ \sum_{i=1}^2 \int_\omega v_i M_\epsilon \Delta u_i \, dx_1 dx_2 &= \\ \int_\omega (v_1, v_2) \cdot \underbrace{(M_\epsilon \Delta u_1, M_\epsilon \Delta u_2)}_{\tilde{M}_\epsilon(\Delta' u)} \, dx_1 dx_2 &= \end{aligned}$$

$$= \int_\omega \tilde{M}_\epsilon(\Delta u) \cdot v \, dx_1 dx_2.$$

Conclui-se que

$$\int_\omega \Delta(\tilde{M}_\epsilon u) \cdot v \, dx_1 dx_2 = \int_\omega \tilde{M}_\epsilon(\Delta u) \cdot v \, dx_1 dx_2,$$

ou seja,

$$\int_\omega \left(\tilde{M}_\epsilon(\Delta u) - \Delta(\tilde{M}_\epsilon u)\right) \cdot v \, dx_1 dx_2 = 0.$$

Assim, $\tilde{M}_\epsilon(\Delta u) = \Delta(\tilde{M}_\epsilon u)$ q.s. em ω. Além disso,

$$\Delta u = \Delta \tilde{M}_\epsilon u + \Delta \tilde{N}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon(\Delta u) + \Delta \tilde{N}_\epsilon u.$$

Mas por outro lado,

$$\tilde{N}_\epsilon(\Delta u) = \Delta u - \tilde{M}_\epsilon(\Delta u) \Rightarrow \Delta u = \tilde{M}_\epsilon(\Delta u) + \tilde{N}_\epsilon(\Delta u).$$

Portanto, $\tilde{N}_\epsilon(\Delta u) = \Delta \tilde{N}_\epsilon u$.

■

Além destes resultados, os operadores $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$ também comutam-se com o operador de Stokes A_ϵ, isto é,

$$A_\epsilon \tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u \quad \text{e} \quad A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u = \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u,$$

onde $u \in D(A_\epsilon)$. Para as condições (FF) e (FP), ainda temos o seguinte resultado:

Lema 2.2. *Se $u \in D(A_\epsilon)$ satisfaz (FF) e (FP), então*

$$b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u,)\right) = 0$$

2.3 Desigualdades Fundamentais em Domínios Finos

Nesta seção, serão enunciados resultados para desigualdades clássicas em domínios finos. Tal ferramenta torna-se importante para conhecer a exata dependência das constantes que aparecem em desigualdades do tipo Sobolev com relação à espessura do domínio. Algumas serão apenas enunciadas, pelo fato de suas demonstrações serem extensas e fugirem do escopo principal deste trabalho.

A primeira desigualdade aqui enunciada é a de *Poincaré*, cuja demonstração pode ser encontrada em Temam e Ziane (1996).

Proposição 2.2 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $u \in H^1(\Omega_\epsilon)$ satisfazendo:*

$$\begin{cases} u \equiv 0 \;\; em \;\; \Gamma_t \cup \Gamma_b \\ \int_0^\epsilon u(x_1,x_2,x_3)\, dx_3 = 0 \; q.s. \;\; em \;\; \omega. \end{cases} \tag{16}$$

Então,

$$|u|_\epsilon \le \epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_\epsilon$$

Vale notar que a desigualdade acima vale para qualquer condição de fronteira a ser considerada. Como visto no lema (2.1), se $u \in V_\epsilon$ então $\tilde{N}_\epsilon u \in V_\epsilon$ e portanto, tem-se o seguinte resultado.

Corolário 2.1. *Para qualquer $u \in V_\epsilon$, vale que*

$$\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \le \epsilon \left|\frac{\partial \tilde{N}_\epsilon u}{\partial x_3}\right|_\epsilon$$

Corolário 2.2. *Sob as mesmas hipóteses da proposição 2.2, tem-se*

$$|u|_\epsilon \quad \le \quad \epsilon \, |\nabla u|_\epsilon .$$

Demonstração: De fato, basta notar que

$$\begin{aligned} |u|_\epsilon &\le \epsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_\epsilon = \epsilon \sqrt{\left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_\epsilon^2} \\ &\le \epsilon \sqrt{\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_\epsilon^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_\epsilon^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_\epsilon^2} \\ &= \epsilon \, |\nabla u|_\epsilon . \end{aligned}$$

■

Corolário 2.3. *Sob as mesmas hipóteses da proposição 2.2, tem-se*

$$||u||_\epsilon \quad \le \quad \epsilon \, |A_\epsilon u|_\epsilon$$

Demonstração: Da definição do operador de Stokes, A_ϵ é definido positivo, isto é, vale

$$(A_\epsilon u, u)_\epsilon = ||u||_\epsilon^2 \quad > \quad 0.$$

Mas, pela desigualdade de Holder, tomando $p = q = 2$, tem-se

$$(A_\epsilon u, u)_\epsilon \quad \le \quad |A_\epsilon u|_\epsilon \, |u|_\epsilon .$$

Logo,

$$||u||_\epsilon^2 \quad \le \quad |A_\epsilon u|_\epsilon \, |u|_\epsilon .$$

Usando o corolário anterior,

$$||u||_\epsilon^2 \quad \le \quad |A_\epsilon u|_\epsilon \, \epsilon \, |\nabla u|_\epsilon \; = \; \epsilon \, |A_\epsilon u|_\epsilon \, ||u||_\epsilon .$$

Portanto,

$$||u||_\epsilon \quad \le \quad \epsilon \, |A_\epsilon u|_\epsilon .$$

■

Uma outra desigualdade importante é a de Agmon, a qual será apresentada aqui na sua forma específica para domínios finos. A demonstração pode ser encontrada em Temam e Ziane (1996).

Corolário 2.4 (Desigualdade Anisotrópica de Agmon para Domínios Finos). *Existe uma constante positiva $c_0(\omega)$, que não depende de ϵ, tal que, para toda $u \in H^2(\Omega_\epsilon)$,*

$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} &\leq c_0(\omega)\,|u|_\epsilon^{1/4} \cdot \left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right|_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\epsilon^2}\,|u|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right)^{1/4} \cdot \prod_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_\epsilon \right. \\ &+ \left. \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_\epsilon + |u|_\epsilon \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Corolário 2.5. *Suponha que $u \in D(A_\epsilon)$. Então, para qualquer condição de fronteira, vale*

$$\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_\epsilon \leq \epsilon \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_i \partial x_3}\right|_\epsilon, \quad para\ \ i,j = 1,2,3. \tag{17}$$

Demonstração: Observe que, para $i = 1,2$, devido à (2), tem-se

$$\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i} = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_t \cup \Gamma_b \quad \text{e} \quad \int_0^\epsilon \frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\, dx_3 = 0,$$

com $j = 1,2,3$. Sendo assim, $\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}$ satisfaz (16). Logo, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_i}\right|_\epsilon \leq \epsilon \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_i \partial x_3}\right|_\epsilon.$$

Agora, para a dimensão espacial x_3, deve-se ter um pouco mais de cuidado, visto que não é possível passar a derivada com relação à x_3 para dentro da integral em (2). Portanto, usando integração por partes em x_3, temos

$$\int_{\Omega_\epsilon} N_\epsilon u_j \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\, dx = -\int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3}\right)^2 dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} \left(\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3}\right)^2 dx &= -\int_{\Omega_\epsilon} N_\epsilon u_j \frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\, dx \\ &\leq \int_{\Omega_\epsilon} |N_\epsilon u_j| \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\right| dx \\ &\leq |N_\epsilon u_j|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \\ \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3}\right|_\epsilon^2 &\leq |N_\epsilon u_j|_\epsilon \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\right|_\epsilon \\ \text{pelo Corol. (2.1)} &\leq \epsilon \left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3}\right|_\epsilon \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\right|_\epsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\frac{\partial N_\epsilon u_j}{\partial x_3}\right|_\epsilon \leq \left|\frac{\partial^2 N_\epsilon u_j}{\partial x_3^2}\right|_\epsilon.$$

■

Combinando os corolários 2.1 e 2.4, resulta o que segue.

Corolário 2.6. *Existe uma constante positiva $c_0(\omega)$, que não depende de ϵ, tal que, para toda $u \in D(A_\epsilon)$,*

$$|\tilde{N}_\epsilon u|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq c_0(\omega)\,|\tilde{N}_\epsilon u|_\epsilon^{1/4} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial \tilde{N}_\epsilon u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_\epsilon \right)^{3/4}$$

Corolário 2.7. *Existe uma constante positiva c_0, independente de ϵ, tal que*

$$|\tilde{N}_\epsilon u|^2_{L^6(\Omega_\epsilon)} \leq c_0\, ||\tilde{N}_\epsilon u||^2_\epsilon.$$

A partir do corolário acima e da proposição 2.2, obtem-se o seguinte lema.

Lema 2.3. *Para $2 \leq q \leq 6$, existe uma constante positiva $c(q)$, independente de ϵ tal que, para todo $u \in V_\epsilon$,*

$$|\tilde{N}_\epsilon u|^2_{L^q(\Omega_\epsilon)} \leq c(q)\epsilon^{\frac{6-q}{q}}\, ||\tilde{N}_\epsilon u||^2_\epsilon$$

Teorema 2.1. *Sob qualquer uma das condições de fronteira consideradas, existe uma constante c, independente de ϵ, tal que, para todo $u \in D(A_\epsilon)$,*

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_\epsilon^2 \leq c\,|A_\epsilon u|_\epsilon^2.$$

Por fim, o próximo resultado está relacionado com desigualdades para a forma trilinear b_ϵ.

Lema 2.4. *Seja $0 < q < \dfrac{1}{2}$. Existe uma constante positiva $c_4(q)$, que não depende de ϵ, tal que, para qualquer condição de fronteira considerada, tem-se*

(i) $|b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w)| \leq c_4\epsilon^q\, ||\tilde{M}_\epsilon u||_\epsilon\, |A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u|_\epsilon\, |w|_\epsilon$, $\forall\ u \in D(A_\epsilon)$ *e* $w \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$.

(ii) $|b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, w)| \leq c_4\epsilon^{1/2}\, ||\tilde{M}_\epsilon u||_\epsilon\, |A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u|_\epsilon\, |w|_\epsilon$, $\forall\ u \in D(A_\epsilon)$ *e* $w \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$.

(iii) $|b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, w)| \leq c_4\, ||\tilde{N}_\epsilon u||_\epsilon^{3/2}\, |A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u|_\epsilon^{1/2}\, |w|_\epsilon$ $\leq c_4\epsilon^{1/2}\, ||\tilde{N}_\epsilon u||_\epsilon\, |A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u|_\epsilon\, |w|_\epsilon$, $\forall\ u \in D(A_\epsilon)$ *e* $w \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon)$.

A demonstração do lema acima pode ser encontrado em Temam e Ziane (1996).

3 Solução Fraca em Domínios Finos

Com relação a existência de solução das equações de Navier-Stokes em domínios gerais, o seguinte resultado é conhecido em diversas bibliografias, tais como Temam (Temam (1984), Temam (1995)) e Lions (Lions (1969)). Ambos usam o método de Galerkin para encontrar solução fraca em espaços de Sobolev. Mais precisamente, tem-se

Teorema 3.1. *Sejam $u_0 \in H$ e $f \in L^2(0,T,V)$. Então existe*

$$u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$$

para todo $T > 0$, solução das equações de Navier-Stokes. Se $u_0 \in V$ então existe $T = T(\Omega,\mu,u_0,f) > 0$ tal que

$$u \in L^2(0,T,D(A_\epsilon)) \cap L^\infty(0,T,V)$$

é a única solução das equações de Navier-Stokes.

No que segue, a solução única dada pelo teorema acima é chamada de solução forte.

3.1 Estimativas para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$

As desigualdades apresentadas na última seção motivam algumas estimativas *a priori* para os operadores $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$, as quais formam o principal mecanismo para o estudo do tempo máximo de existência das soluções. Primeiramente, a partir das equações de Navier-Stokes, faz-se a formulação fraca para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$.

Antes de demonstrar a formulação fraca, observe que como $(u,v)_{D(A^{1/2})} = ((A_\epsilon^{1/2}u, A_\epsilon^{1/2}v))_\epsilon$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon v\right)\right)_\epsilon &= \left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_{D(A_\epsilon^{1/2})} \\ &= \left(\nabla\tilde{M}_\epsilon u, \nabla\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon .\end{aligned}$$

Note que faz sentido tomar o produto interno com relação a $\tilde{M}_\epsilon u$ e $\tilde{M}_\epsilon v$, pois, como $u,v \in D(A_\epsilon^{1/2}) = V_\epsilon$, tem-se pelo lema 2.1 que $\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$.

Proposição 3.1 (Formulação fraca para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$). *Sejam $v \in V_\epsilon$ e $u \in H_\epsilon$. Então,*

(i) $$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon + \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) = \left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon ,$$

(ii) $$\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon + \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) = \left(\tilde{N}_\epsilon f, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon .$$

Demonstração: Considere a forma vetorial das equações de Navier-Stokes,

$$u_t + u\cdot\nabla u - \mu\Delta u + \nabla p = f.$$

Aplicando o operador $\tilde{M}_\epsilon$ em cada componente da equação acima, tem-se

$$\tilde{M}_\epsilon u_t + \tilde{M}_\epsilon(u\cdot\nabla u) - \mu\tilde{M}_\epsilon\Delta u + \tilde{M}_\epsilon\nabla p = \tilde{M}_\epsilon f. \quad (18)$$

Observe que $\tilde{M}_\epsilon u_t = \left(\tilde{M}_\epsilon u\right)_t$ e $\mu\tilde{M}_\epsilon\Delta u = \mu\Delta\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)$. Ainda,

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\epsilon\nabla p &= \tilde{M}_\epsilon\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\frac{\partial p}{\partial x_2},\frac{\partial p}{\partial x_3}\right) \\ &= \left(M_\epsilon\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right), M_\epsilon\left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\right), M_\epsilon\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(M_\epsilon p), \frac{\partial}{\partial x_2}(M_\epsilon p), \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3}(M_\epsilon p)}_{=0}\right) \\ &= \nabla'\tilde{M}_\epsilon p.\end{aligned}$$

Multiplicando (18) por $\tilde{M}_\epsilon v$ e integrando em Ω_ϵ tem-se

$$\begin{aligned}\left(\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)_t, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon &+ \left(\tilde{M}_\epsilon(u\cdot\nabla u), \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon \\ &- \mu\left(\Delta\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon \\ &+ \left(\nabla'\tilde{M}_\epsilon p, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon \\ &= \left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon . \end{aligned} \quad (19)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon &= \left(\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)_t, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon \\ &+ \left(\tilde{M}_\epsilon u, \left(\tilde{M}_\epsilon v\right)_t\right)_\epsilon ,\end{aligned}$$

e, como $v \in V_\epsilon$, não depende de t, donde $\left(\tilde{M}_\epsilon u, \left(\tilde{M}_\epsilon v\right)_t\right) = 0$. Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(\left(\tilde{M}_\epsilon u\right)_t, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon . \quad (20)$$

Como $\tilde{M}_\epsilon$ é auto-adjunto e $\tilde{M}_\epsilon^2 = \tilde{M}_\epsilon$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\tilde{M}_\epsilon(u\cdot\nabla u), \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon &= \left(u\cdot\nabla u, \tilde{M}_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon v\right)\right)_\epsilon \\ &= \left(u\cdot\nabla u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon \\ &= b_\epsilon\left(u, u, \tilde{M}_\epsilon v\right)\end{aligned}$$

Usando o item (iv) do lema 2.1,

$$\begin{aligned}\left(\tilde{M}_\epsilon(u\cdot\nabla u), \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon &= b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v) \\ &+ b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v).\end{aligned} \quad (21)$$

Ainda,

$$-\mu\left(\Delta\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \mu\left(\nabla\tilde{M}_\epsilon u, \nabla\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon . \quad (22)$$

Além disso,

$$\left(\nabla'\tilde{M}_\epsilon p, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = 0 \quad (23)$$

Substituindo (20), (21), (22) e (23) em (19), obtem-se a seguinte formulação fraca para $\tilde{M}_\epsilon$

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon + \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon +$$

$$b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v\right) = \left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon.$$

Para o operador $\tilde{N}_\epsilon$, procede-se analogamente, aplicando $\tilde{N}_\epsilon$ à forma vetorial das equações de Navier-Stokes, multiplicando por $\tilde{N}_\epsilon v$ e integrando em Ω_ϵ. Deste modo, ao aplicar o item (iv) do lema 2.1, tem-se que

$$\begin{aligned}\left(\tilde{N}_\epsilon\left(u\cdot\nabla u\right), \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon &= \left(u\cdot\nabla u, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon \\ &= b_\epsilon(u, u, \tilde{N}_\epsilon v) \\ &= b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v) \\ &+ b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v) \\ &+ b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v).\end{aligned}$$

Assim, conclui-se a formulação fraca para o operador $\tilde{N}_\epsilon$ dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon + \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v\right) = \left(\tilde{N}_\epsilon f, \tilde{N}_\epsilon v\right)_\epsilon.$$

■

Para facilitar as expressões calculadas nas estimativas, utiliza-se, no que segue, as seguintes notações:

(i) $a_0(\epsilon) = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u_0\right|_\epsilon$;

(ii) $b_0(\epsilon) = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u_0\right|_\epsilon$;

(iii) $\alpha(\epsilon) = \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon$;

(iv) $\beta(\epsilon) = \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon$;

(v) $R_0^2(\epsilon) = a_0^2(\epsilon) + b_0^2(\epsilon) + \alpha^2(\epsilon) + \beta^2(\epsilon)$.

Observe que, de acordo com (ii) do lema 2.1,

$$\begin{aligned}|u_0|^2_{D(A_\epsilon^{1/2})} &= \left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 \\ &= \left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 \\ &= \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u_0\right|_\epsilon^2 + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u_0\right|_\epsilon^2 \\ &= a_0^2(\epsilon) + b_0^2(\epsilon),\end{aligned}$$

e

$$|f|_\epsilon^2 = \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 = \alpha^2(\epsilon) + \beta^2(\epsilon),$$

ou seja,

$$R_0^2(\epsilon) = \left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2. \tag{24}$$

Agora, dado $\sigma > 1$, como consequência do teorema 3.1, tem-se que existe $T^\sigma(\epsilon) > 0$ tal que, para todo $t \in [0, T^\sigma(\epsilon))$,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \le \sigma R_0^2(\epsilon). \tag{25}$$

Aqui, $[0, T^\sigma(\epsilon))$ é o intervalo máximo onde a desigualdade acima corresponde. Vale notar que se $T^\sigma(\epsilon) < \infty$, então

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(T^\sigma(\epsilon))\right|_\epsilon^2 = \sigma R_0^2(\epsilon). \tag{26}$$

Com efeito, caso não valesse a igualdade, teria uma contradição com o fato de $T^\sigma(\epsilon)$ ser o tempo máximo.

Apresentamos agora dois lemas com as estimativas para os operadores $\tilde{N}_\epsilon$ e $\tilde{M}_\epsilon$, fundamentais para prova dos teoremas de existência. O resultado a seguir independe da condição de fronteira considerada.

Lema 3.1 (Estimativas para $\tilde{N}_\epsilon u$)**.** *Suponha que* $0 < q < \frac{1}{2}$ *e*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{2q}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2\right) = 0.$$

Então, existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(\mu) > 0$ *tal que para todo* ϵ, $0 < \epsilon \le \epsilon_1$, *existem* $T^\sigma(\epsilon) > 0$ *e uma constante positiva* $c_5(\mu)$, *independente de* ϵ, *de modo que para* ϵ, $0 < \epsilon \le \epsilon_1$ *e* $0 < t < T^\sigma(\epsilon)$, *tem-se:*

(i) $\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \le b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \dfrac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)$;

(ii) $\displaystyle\int_0^t \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2\, ds \le \frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)$;

(iii) $\displaystyle\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^3 \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon\, ds \le c_5(\mu)\epsilon\left(b_0^2(\epsilon) + \epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon) + t\beta^2(\epsilon)\right)$.

Demonstração: Da formulação fraca para $\tilde{N}_\epsilon$, substituindo v por $A_\epsilon u$, tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) = \left(\tilde{N}_\epsilon f, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon.$$

Observe que, pela comutatividade do operador de Stokes com $\tilde{N}_\epsilon$,

$$\begin{aligned}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &= \left(\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon = \left(\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u\right)\right)_\epsilon \\ &= \left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon \\ &= \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2,\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \tag{27}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &= \\
\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \left(\tilde{N}_\epsilon u, \frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &= \\
\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \left(\tilde{N}_\epsilon u, \frac{d}{dt}A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon &= \\
\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \left(\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u\right)\right)_\epsilon &= \\
\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \left(A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u, \frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon &= \\
2\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon .
\end{aligned}$$

Assim, de (27),

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 .
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &= \\
\mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon &= \\
\mu\left(A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u, A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon &= \\
\mu\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 .
\end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{N}_\epsilon f, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &= \left(\tilde{N}_\epsilon f, A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right)_\epsilon \\
&\leq \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \\
&\leq \frac{\delta^2}{2}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{1}{2\delta^2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 .
\end{aligned}$$

A última desigualdade acima vem de $2ab \leq a^2 + b^2$, tomando $a = \delta\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon$ e $b = \delta^{-1}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon$, onde $\delta > 0$ é um número real. Escolhendo $\frac{1}{2\delta^2} = \frac{\mu}{2}$, tem-se $\delta^2 = \mu^{-1}$. Daí,

$$\left(\tilde{N}_\epsilon f, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon \leq \frac{1}{2\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$$

Pelas estimativas do Lema 2.4,

$$\begin{aligned}
& b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) \\
+ \ & b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) \\
\leq \ & c_4\epsilon^q \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \\
+ \ & c_4\epsilon^{1/2}\left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \\
+ \ & c_4\epsilon^{1/2}\left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \\
= \ & c_4\epsilon^q \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + c_4\epsilon^{1/2}\left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\
+ \ & c_4\epsilon^{1/2}\left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 .
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 &= \left(\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)\right)_\epsilon = \left(A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon \\
&= \left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon \\
&= \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon .$$

Analogamente,

$$\left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon , \tag{28}$$

e, com isso,

$$\begin{aligned}
& b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) \\
+ \ & b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u\right) \\
\leq \ & c_4\epsilon^q \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\
+ \ & c_4\epsilon^{1/2}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 .
\end{aligned}$$

Temos, portanto, a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &\leq \\
\frac{1}{2\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &+ \\
\Big[c_4\epsilon^q\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &+ \\
c_4\epsilon^{1/2}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2\Big] .
\end{aligned}$$

Como $0 < \epsilon < 1$ e $0 < q < \frac{1}{2}$, pode-se afirmar que $\epsilon^{1/2} < \epsilon^q$. Assim, somando $c_4\epsilon^q\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$, o qual é um valor positivo, na última expressão acima, obtem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &+ \left[\mu - 4c_4\epsilon^q\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon\right.\right. \\
&+ \left.\left.\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)\right]\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \\
&\leq \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 .
\end{aligned}$$

Observe que, do item (ii) do Lema 2.1,

$$\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 &= \left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \\
&= \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 ,
\end{aligned}$$

para $t \in [0, T^\sigma(\epsilon))$ e, além disso,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon \leq \sqrt{2}\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon .$$

Mas, de (25), temos

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon \le \sqrt{2}\,\sqrt{\sigma}R_0(\epsilon).$$

Assim,

$$\mu - 4c_4\epsilon^q\left(\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\right) \ge \mu - 4c_4\epsilon^q\sqrt{2}\,\sqrt{\sigma}R_0(\epsilon),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left[\mu - 4c_4\epsilon^q\sqrt{2\sigma}R_0(\epsilon)\right]\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \le \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2. \tag{29}$$

A partir deste momento, usando a hipótese

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{2q}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{2q}R_0^2(\epsilon) = 0,$$

pode-se afirmar que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\mu - 4c_4\epsilon^q\sqrt{2\sigma}R_0(\epsilon)\right) = \mu > 0,$$

ou seja, existe um $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$,

$$\mu - 4c_4\epsilon^q\sqrt{2\sigma}R_0(\epsilon) \le \frac{\mu}{2}.$$

Substituindo em (29),

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \le \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2, \tag{30}$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon_1$ e $0 \le t < T^\sigma(\epsilon)$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \le \epsilon^2\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2,$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2\epsilon^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \le \frac{1}{\mu}\left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2. \tag{31}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Gronwall, obtem-se

$$\begin{aligned}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &\le e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}b_0^2(\epsilon) + \frac{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}{\mu}\int_0^t \beta^2(\epsilon)\,ds\\ &\le e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}b_0^2(\epsilon) + \frac{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}{\mu}t\beta^2(\epsilon)\end{aligned} \tag{32}$$

Para algum t, com $t \le \frac{2\epsilon^2}{\mu}e^{\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}$, vale que

$$\frac{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}{\mu}t\beta^2(\epsilon) \le \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon),$$

e, substituindo em (32),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \le b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon), \tag{33}$$

o que prova o item (i) do lema.

Integrando de 0 à t a expressão em (31), tem-se

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \le b_0^2(\epsilon) + \frac{1}{\mu}t\beta^2(\epsilon).$$

Como

$$\frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \le \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds,$$

obtem-se

$$\frac{\mu}{2\epsilon^2}\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \le b_0^2(\epsilon) + \frac{1}{\mu}t\beta^2(\epsilon),$$

ou seja,

$$\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \le \frac{2\epsilon^2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon), \tag{34}$$

para todo $0 < \epsilon \le \epsilon_1$ e $0 < t < T^\sigma(\epsilon)$.

Agora, integrando (30) de 0 à t,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^t\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \le b_0^2(\epsilon) + \frac{1}{\mu}t\beta^2(\epsilon).$$

Daí,

$$\frac{\mu}{2}\int_0^t\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \le b_0^2(\epsilon) + \frac{1}{\mu}t\beta^2(\epsilon),$$

ou seja,

$$\int_0^t\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \le \frac{2}{\mu}b_0^2(\epsilon) + \frac{2}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon), \tag{35}$$

para todo $0 < \epsilon \le \epsilon_1$ e $0 < t < T^\sigma(\epsilon)$, provando assim o item (ii) do lema.

Aplicando a desigualdade de Hölder com $p = q = 2$ para as funções $u = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3$ e $v = \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon$, temos

$$\underbrace{\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon ds}_{=\Psi} \le \left(\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^6 ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds\right)^{1/2}$$

Observe que

$$\left(\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^6 ds\right)^{1/2} \leq \sup_{0\leq s\leq t}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \left(\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds\right)^{1/2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Psi &\leq \sup_{0\leq s\leq t}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 \left(\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds\right)^{1/2}\\ &\cdot \left(\int_0^t \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon ds\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Note que é possível tomar o supremo da função $\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^4$, pois vale (33).

Substituindo as estimativas encontradas em (33), (34) e (35) na expressão acima, obtem-se

$$\Psi \leq 4\epsilon\left(b_0^2(\epsilon)+\frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon)\right)\left(\frac{1}{\mu}b_0^2(\epsilon)+\frac{1}{\mu^2}t\beta^2(\epsilon)\right).$$

Fazendo

$$c_5(\mu) = \left[2\max(1,\frac{1}{\mu^2},\frac{1}{\mu})\right]^2,$$

conclui-se que

$$\Psi \leq c_5(\mu)\epsilon\left(b_0^2(\epsilon)+\epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon)+t\beta^2(\epsilon)\right),$$

o que prova o item (iii) e, portanto, o lema está demonstrado.

■

Lema 3.2 (Estimativas para $\tilde{M}_\epsilon u$). *Considerando as condições (FF) e (FP), suponha que* $0 < q < \frac{1}{2}$ *e*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{2q}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2\right) = 0.$$

Então, existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(\mu) > 0$*, tal que para todo* ϵ*, com* $0 < \epsilon \leq \epsilon_1$*, existem* $T^\sigma(\epsilon) > 0$ *e uma constante positiva* $c_{10}(\mu)$*, independente de* ϵ*, a partir dos quais vale:*

(i) $\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t} + \dfrac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t)$;

(ii) $\displaystyle\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \leq \frac{a_0^2(\epsilon)}{\mu\lambda_1} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)t}{\mu^2\lambda_1^2} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t)$;

(iii) $\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \dfrac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} + c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t)$;

(iv) $\displaystyle\int_0^t \left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \leq \frac{2a_0^2(\epsilon)t}{\mu} + c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t)$.

Demonstração: Da formulação fraca para $\tilde{M}_\epsilon$, substituindo v por u, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon + \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon &+\\ b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right) &= \left(\tilde{M}_\epsilon f,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon.\end{aligned}$$

É possível afirmar (veja Temam (1984), Lema 1.3, pág. 162) que

$$b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right) = 0,$$

e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\tilde{M}_\epsilon f,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon \leq \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon.$$

Assim como foi feito no lema anterior para $\tilde{N}_\epsilon$, o termo com a derivada em relação ao tempo é tal que, antes de substituir,

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon = \left(\frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon v\right)_\epsilon,$$

pois $v \in V_\epsilon$ e não depende de t. Mas,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon &= \left(\frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon\\ +\left(\tilde{M}_\epsilon u,\frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon &= 2\left(\frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon &= \left(\frac{d}{dt}\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon\\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2.\end{aligned}$$

Ainda,

$$\mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right)_\epsilon = \mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 &+\\ b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right) &\leq \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon.\end{aligned} \quad (36)$$

Do lema 2.4, obtem-se

$$\begin{aligned}b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{N}_\epsilon u,\tilde{M}_\epsilon u\right) &\leq\\ c_4\left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon &=\\ c_4\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon\end{aligned}$$

onde a última igualdade acima vem de (28). Substituindo em (36),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + c_4\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon.$$

A desigualdade de Poincarè, neste contexto, afirma que

$$\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \frac{1}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon, \tag{37}$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor (o menor) do operador de Stokes. Assim,

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + 2\mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{2}{\lambda_1}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon + \frac{2c_4}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon.$$

Para $\delta > 0$,

$$\frac{2}{\lambda_1}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq 2\delta\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \frac{1}{2\delta\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2,$$

e,

$$\frac{2c_4}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \frac{2}{4\delta}\left(\frac{c_4}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\right)^2 + 2\delta\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + 2\mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq 2\delta\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \frac{1}{2\delta\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{2}{4\delta}\left(\frac{c_4}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\right)^2 + 2\delta\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + (2\mu - 2\delta - 2\delta)\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{2\delta\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{c_4^2}{2\delta\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon$$

Seja δ de forma que $2\mu - 4\delta = \mu$, ou seja, $\delta = \frac{\mu}{4}$. Daí,

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon. \tag{38}$$

De (37),

$$\frac{d}{dt}\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\lambda_1\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \frac{2}{\mu\lambda_1^2}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon. \tag{39}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t} + \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\, ds \tag{40}$$

Do item (iii) do lema 3.1,

$$\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t} + \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}c_5(\mu)\epsilon\left(b_0^2(\epsilon) + \epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon) + t\beta^2(\epsilon)\right). \tag{41}$$

Seja

$$R_n^2(\epsilon) = \max(b_0^2(\epsilon), \beta^2(\epsilon)).$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\epsilon\left(b_0^2(\epsilon) + \epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon) + t\beta^2(\epsilon)\right) &\leq \\ \epsilon\left(2\max(b_0^2(\epsilon), \beta^2(\epsilon)\right)\left(t\beta^2(\epsilon)) + b_0^2(\epsilon)\right) &\leq \\ \epsilon 2R_n^2(\epsilon)\left(tR_n^2(\epsilon) + R_n^2(\epsilon)\right) &= \\ \epsilon 2R_n^4(\epsilon)(1+t).\end{aligned} \tag{42}$$

Pondo $c_6(\mu) = \dfrac{4c_4^2}{\mu\lambda_1^2}c_5(\mu)$ e substituindo em (41),

$$\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1 t} + \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t),$$

o que prova o item (i) do lema.

Integrando de 0 à t a expressão em (38),

$$\left|\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \mu\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \leq \left|\tilde{M}_\epsilon u(0)\right|_\epsilon^2 + \frac{2\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 t}{\mu\lambda_1^2} + \frac{2c_4^2}{\mu\lambda_1^2}\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon\, ds.$$

Segue que

$$\mu\int_0^t\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \leq \left|\tilde{M}_\epsilon u(0)\right|_\epsilon^2 +$$

$$\frac{2\alpha^2(\epsilon)t}{\mu\lambda_1^2} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t).$$

A partir de (37),

$$\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^2 ds \leq \frac{a_0^2(\epsilon)}{\mu\lambda_1} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)t}{\mu^2\lambda_1^2} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t),$$

provando, assim, o item (ii) do lema.

Agora, para encontrar estimativas em H^1 para $\tilde{M}_\epsilon$, substituindo v por $A_\epsilon u$ na formulação fraca de $\tilde{M}_\epsilon$, obtem-se

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + \mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon + b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) + b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) = \left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon.$$

Procedendo analogamente aos cálculos iniciais feitos no lema 3.1, mas dessa vez para $\tilde{M}_\epsilon$, encontra-se as seguintes relações:

(i) $\frac{d}{dt}\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$;

(ii) $\mu\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u, A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon = \mu\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$.

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 = \left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon - b_\epsilon\left(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) - b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right). \quad (43)$$

Usando o lema 2.2,

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + 2\mu\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 = 2\left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon - 2b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right). \quad (44)$$

Aplicando o item (iii) do lema 2.4 à forma trilinear acima, temos

$$\begin{aligned} & 2b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) \leq \\ \leq\ & 2c_4\left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \\ =\ & 2c_4\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \\ =\ & 2c_4\frac{1}{\mathrm{k}}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\mathrm{k}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \\ \leq\ & \left(\frac{1}{\mathrm{k}}c_4\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{3/2}\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^{1/2}\right)^2 \\ +\ & \left(\mathrm{k}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon\right)^2, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade acima foi obtida pela desigualdade de Young. A partir daí, seja $\mathrm{k}^2 = \frac{\mu}{2}$, isto é, $\frac{1}{\mathrm{k}^2} = \frac{2}{\mu}$. Então,

$$2b_\epsilon\left(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right) \leq \frac{2c_4^2}{\mu}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon + \frac{\mu}{2}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \quad (45)$$

Ainda,

$$\begin{aligned} 2\left(\tilde{M}_\epsilon f, \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right)_\epsilon &\leq 2\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right|_\epsilon = \\ & 2\mathrm{k}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon\frac{1}{\mathrm{k}}\left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \\ & \mathrm{k}^2\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{1}{\mathrm{k}^2}\left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right|_\epsilon^2 = \\ & \frac{2}{\mu}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + \frac{\mu}{2}\left|\tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u\right|_\epsilon^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Novamente, usa-se aqui a desigualdade de Young e $\mathrm{k}^2 = \frac{\mu}{2}$, isto é, $\frac{1}{\mathrm{k}^2} = \frac{2}{\mu}$. Substituindo (45) e (46) em (44),

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{2}{\mu}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + c_7\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon, \quad (47)$$

onde $c_7(\mu) = \frac{2c_4^2}{\mu}$.

Usando $A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u$ no lugar de $\tilde{M}_\epsilon u$ em (37), obtem-se

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \frac{1}{\lambda_1}\left|A_\epsilon^{1/2}\left(A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right)\right|_\epsilon,$$

ou seja,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{\lambda_1^2}\left|A_\epsilon\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2.$$

Logo, de (47),

$$\frac{d}{dt}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \mu\lambda_1^2\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq \frac{2}{\mu}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + c_7(\mu)\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^3\left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon.$$

Com base na desigualdade de Gronwall, e procedendo analogamente aos cálculos que levam a desigualdade em (40), tem-se

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 \leq a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} + c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t),$$

provando, assim, o item (iii) do lema. Integrando de 0 à t a expressão em (47), prova-se o item (iv).

■

3.2 Comportamento de $T^\sigma(\epsilon)$

A partir de agora, demonstramos o resultado principal deste trabalho, isto é, o intervalo maximal de existência da solução forte das equações tridimensionais de Navier-Stokes, quando o domínio é considerado fino. Na seção anterior, foram demonstrados dois lemas com relação as estimativas para $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$. O lema 3.1 vale para qualquer condição de fronteira a ser considerada. Entretanto, o lema 3.2 faz referência apenas para as condições (FF) e (FP). Esta distinção nas estimativas para $\tilde{M}_\epsilon$ decorre da definição da mesma; por exemplo, sabe-se que $\tilde{M}_\epsilon u = 0$ para (DD) e (DP), isto é, não faz sentido calcular estimativas neste caso.

O primeiro resultado diz respeito as condições de fronteira (DD) e (DP).

Teorema 3.2. *Suponha que*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \left(\left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2 \right) = 0.$$

Então, existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(\mu)$ tal que para $0 < \epsilon < \epsilon_1$, a solução forte u_ϵ de

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f, & em \quad \Omega_\epsilon \times (0, \infty) \\ \textbf{div } u = 0, & em \quad \Omega_\epsilon \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & em \quad x \in \Omega_\epsilon, \end{cases}$$

com as condições de fronteira (DD) e (DP) existe para todo tempo, isto é, $T_\epsilon = \infty$ e

$$u_\epsilon \in C^0 \left([0, \infty); V_\epsilon \right) \cap L^2 \left(0, T, D(A_\epsilon) \right),$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Como definido inicialmente para as condições de fronteira (DD) e (DP), tem-se que $\tilde{M}_\epsilon u \equiv 0$. Deste modo, $\tilde{N}_\epsilon u = u$, onde $u \in L^2(\Omega_\epsilon)$ e, portanto, as estimativas encontradas no lema 3.1 valem também para u. Aplicando o item (i) do referido lema para a função u, obtem-se que

$$\left| A_\epsilon^{1/2} u(t) \right|_\epsilon^2 \le \left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} |f|_\epsilon^2 \tag{48}$$

Suponha que $T^\sigma(\epsilon) < \infty$. Para $\epsilon < \frac{\mu}{\sqrt{2}}$, vale que

$$\left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} |f|_\epsilon^2 \le \left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2,$$

pois $e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} \le 1$. Daí,

$$\left| A_\epsilon^{1/2} u(t) \right|_\epsilon^2 \le \left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2. \tag{49}$$

Observe que, de (25) e (26),

$$\sup_{0 \le t \le T^\sigma(\epsilon)} \left| A_\epsilon^{1/2} u(t) \right|_\epsilon^2 = \sigma R_0^2(\epsilon).$$

Mas, por (49), $\left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2$ é uma cota superior para a função $\left| A_\epsilon^{1/2} u(t) \right|_\epsilon^2$. Logo,

$$\sigma R_0^2(\epsilon) \le \left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2,$$

para $\epsilon < \frac{\mu}{\sqrt{2}}$. Como, de (24)

$$R_0^2(\epsilon) = \left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2,$$

a desigualdade acima implica que $\sigma \le 1$, o que contradiz a suposição inicial de que $\sigma > 1$. Portanto,

$$T^\sigma(\epsilon) = +\infty,$$

quando $\epsilon < \min\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}, \epsilon_1 \right)$, onde ϵ_1 satisfaz

$$4 c_4 \epsilon^{1/2} \sqrt{2\sigma} R_0(\epsilon) \le \frac{\mu}{2},$$

para $0 < \epsilon < \epsilon_1$.

■

Vale salientar que, para $t > 0$ em (48), fazendo ϵ tender a zero, tem-se que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left| A_\epsilon^{1/2} u_t \right|_\epsilon^2 \le \lim_{\epsilon\to 0} \left(\left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2} |f|_\epsilon^2 \right) = 0,$$

ou seja, $\forall\ t > 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left| A_\epsilon^{1/2} u_t \right|_\epsilon^2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\epsilon\to 0} \left| A_\epsilon^{1/2} u_t \right|_\epsilon^2 = 0,$$

a partir do qual se conclui que

$$\lim_{\epsilon\to 0} ||u_\epsilon||_\epsilon = 0,$$

isto é, a norma em H^1 da solução u_ϵ converge para zero quando ϵ tende a zero, desde que $t > 0$.

Com relação as condições (FF) e (FP), demonstra-se que $T^\sigma(\epsilon) = \infty$ em dois passos. Primeiro, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 3.2. *Considere as condições de fronteira (FF) e (FP) e suponha que*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^q \left(\left| A_\epsilon^{1/2} u_0 \right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2 \right) = 0, \tag{50}$$

para algum $0 < q < 1$. Então,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{2-2q} T^\sigma(\epsilon) = \infty.$$

Demonstração: Dos lemas 3.1 e 3.2, tem-se

(i) $\left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{N}_\epsilon u(t) \right|_\epsilon^2 \le b_0^2(\epsilon) e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \dfrac{2\epsilon^2}{\mu^2} \beta^2(\epsilon)$ para $0 \le t < T^\sigma(\epsilon)$ e

(ii) $\left| A_\epsilon^{1/2} \tilde{M}_\epsilon u(t) \right|_\epsilon^2 \le a_0^2(\epsilon) e^{-\mu \lambda_1^2 t} + \dfrac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2 \lambda_1} + c_8(\mu) \epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t).$

Somando as duas expressões acima e usando o item (ii) do lema 2.1, temos

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \le b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon) + a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t). \quad (51)$$

Fixando σ de modo que

$$\sigma = 4\max\left(1, \frac{2}{\mu^2}, \frac{1}{\mu^2\lambda_1^3}\right), \quad (52)$$

e, com isso, observe que

$$b_0^2(\epsilon)\underbrace{e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}}}_{<1} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon) + a_0^2(\epsilon)\underbrace{e^{-\mu\lambda_1 t}}_{<1} + \frac{\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1^3} \le b_0^2\frac{\sigma}{4} + \beta^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + a_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + \alpha^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} = R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4}.$$

Substituindo em (51),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \le R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t).$$

Note ainda que, como $R_n^2(\epsilon) = \max(b_0^2(\epsilon), \beta^2(\epsilon))$, tem-se

$$R_n^2(\epsilon) \le R_0^2(\epsilon) \implies R_n^4(\epsilon) \le R_0^4(\epsilon),$$

a partir do qual

$$\begin{aligned}\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 &\le R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + c_6(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t) \le \\ &R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} + c_6(\mu)\epsilon R_0^4(\epsilon)(1+t) = \\ R_0^2(\epsilon)\frac{\sigma}{4} &+ c_6(\mu)\left(\epsilon^q R_0^2(\epsilon)\right)\epsilon^{1-q}R_0^2(\epsilon)(1+t),\end{aligned} \quad (53)$$

para $0 \le t < T^\sigma(\epsilon)$.

Agora, suponha que $T^\sigma(\epsilon) < \infty$. Logo, de (26)

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(T^\sigma(\epsilon))\right|_\epsilon^2 = \sigma R_0^2(\epsilon),$$

e, substituindo em (53),

$$\frac{3\sigma}{4}R_0^2(\epsilon) \le c_6(\mu)\left(\epsilon^q R_0^2(\epsilon)\right)\epsilon^{1-q}R_0^2(\epsilon)(1 + T^\sigma(\epsilon)). \quad (54)$$

Não é difícil ver que $R_0^2(\epsilon) \ne 0$. De fato, se esta não fosse válida, isto é, se $R_0^2(\epsilon) = 0$, de (24)

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 = 0 \quad \text{e} \quad |f|_\epsilon^2 = 0.$$

Assim, $f = 0$ e $A_\epsilon^{1/2}u_0 = 0$ q.s. em Ω_ϵ. Daí $u_0 = 0$ q.s. o que implicaria $u(t) = 0$, uma solução trivial a qual não interessa. Logo, $R_0^2(\epsilon) \ne 0$ e, portanto, de (54),

$$\frac{3\sigma}{4} \le c_6(\mu)\left(\epsilon^q R_0^2(\epsilon)\right)\epsilon^{1-q}(1 + T^\sigma(\epsilon)). \quad (55)$$

Afirma-se que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{1-q}T^\sigma(\epsilon) = \infty. \quad (56)$$

Suponha que a expressão acima não seja verdade, ou seja, existe uma constante $L_1 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, tem-se $\epsilon > 0$ com $0 < \epsilon < \delta$ e $\epsilon^{1-q}T^\sigma(\epsilon) \le L_1$.

Sendo assim, tome $\delta = \frac{1}{n}$, $n \ge 1$. Então, existe uma sequência $(\epsilon_n)_{n\ge 1}$ com

$$\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0,$$

pois $0 < \epsilon < \frac{1}{n}$ e $\epsilon_n^{1-q}T^\sigma(\epsilon_n) \le L_1$, isto é,

$$T^\sigma(\epsilon_n) \le \frac{L_1}{\epsilon_n^{1-q}}, \quad \forall\, n \ge 1.$$

Voltando na expressão (55),

$$\frac{3\sigma}{4} \le c_6(\mu)\left(\epsilon_n^q R_0^2(\epsilon_n)\right)\epsilon_n^{1-q}\left(1 + \frac{L_1}{\epsilon_n^{1-q}}\right).$$

Mas $0 < q < 1$ e $\epsilon_n < 1$, daí, $1 - q > 0$ e $\epsilon_n^{1-q} < 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{3\sigma}{4} &\le c_6(\mu)\left(\epsilon_n^q R_0^2(\epsilon_n)\right)(1 + L_1)\\ \frac{3\sigma}{4} &\le L_2\epsilon_n^q R_0^2(\epsilon_n),\end{aligned} \quad (57)$$

onde $L_2 = L_2(\mu) = c_6(\mu)(1 + L_1)$. Fazendo n tender ao infinito e usando a hipótese (50), o lado direito da expressão (57) tende a zero e, portanto, $\sigma = 0$, uma contradição com a escolha de σ em (52). Logo, vale (56) e a proposição está demonstrada.

■

Agora, mostra-se que o intervalo maximal de existência da solução forte das equações de Navier-Stokes é infinito, quando o domínio é fino. Mais precisamente,

Teorema 3.3. *Suponha que*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{2q}\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2\right) = 0, \quad (58)$$

para algum $0 < 2q < 1$. Então, existe $\epsilon_2 = \epsilon_2(\mu, q, \omega)$ tal que para $0 < \epsilon < \epsilon_2$, a solução forte u_ϵ de

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u - \mu\Delta u + \nabla p = f, & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \times (0,\infty)\\ \textbf{\textit{div}}\; u = 0, & \text{em} \quad \Omega_\epsilon \times (0,\infty)\\ u(x,0) = u_0(x), & \text{em} \quad x \in \Omega_\epsilon,\end{cases}$$

com as condições de fronteira (FF) e (FP) existe para todo tempo, isto é, $T_\epsilon = \infty$ e

$$u_\epsilon \in C^0\left([0,\infty); V_\epsilon\right) \cap L^2\left(0, T, D(A_\epsilon)\right),$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Seja

$$K_\epsilon^2 = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u_0\right|_\epsilon^2 + \frac{8}{\mu^2\lambda_1}\left|\tilde{M}_\epsilon f\right|_\epsilon^2 + B_\epsilon^2,$$

onde

$$B_\epsilon^2 = \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u_0\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon f\right|_\epsilon^2.$$

Observe que, substituindo a expressão acima em K_ϵ^2, aplicando o item (ii) do lema 2.1 e a hipótese (58) temos

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^q K_\epsilon^2 &= \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^q\left(\left|A_\epsilon^{1/2}u_0\right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2\right)\\ &= 0 \end{aligned} \tag{59}$$

Agora, escolhe-se $\epsilon_2 = \epsilon_2(\mu,\lambda_1,q)$ satisfazendo

(i) $0 < \epsilon_2 < \dfrac{1}{4}$;

(ii) Para $0 < \epsilon \le \epsilon_2$, $\epsilon^q K_\epsilon^2 \le 1$;

(iii) $\dfrac{2\epsilon^2}{\mu^2} \le \dfrac{1}{8}$, $e^{-\frac{\mu\lambda_1}{\epsilon^{2(1-q)}}} \le \dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{16c_4(\mu)}{\mu}\max\left(1,\dfrac{1}{\mu^3}\right)\epsilon^q \le \dfrac{1}{4}$;

(iv) Para $0 < \epsilon \le \epsilon_2$, $\epsilon^{2-2q}T^\sigma(\epsilon) > 4$.

Note que o item (ii) decorre de (59) e, no item (iii), o lado esquerdo das desigualdades tendem a zero a medida que ϵ se aproxima de zero. Pela proposição 3.2, o lado esquerdo da expressão em (iv) tende ao infinito, tornando válido tal item. Sendo assim, está bem definido este ϵ_2.

Lembrando o item (iii) do lema 3.1, pode-se reescrever tal estimativa com os dados acima, isto é,

$$\begin{aligned}\int_0^t \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon^3 \left|A_\epsilon\tilde{N}_\epsilon u(s)\right|_\epsilon ds &\le\\ c_5(\mu)\epsilon\left(b_0^2(\epsilon)+\epsilon^2\beta^2(\epsilon)\right)\left(b_0^2(\epsilon)+t\beta^2(\epsilon)\right) &\le\\ c_5(\mu)\epsilon\left(\epsilon^2B_\epsilon^2+B_\epsilon^2\right)\left(tB_\epsilon^2+B_\epsilon^2\right) &=\\ c_5(\mu)\epsilon B_\epsilon^4\left(\epsilon^2+1\right)(1+t) &\le\\ \frac{4}{\mu}\max\left(1,\frac{1}{\mu^3}\right)B_\epsilon^4(1+t).\end{aligned}$$

Defina, para $0 < \epsilon \le \epsilon_2$,

$$t_\epsilon = \epsilon^{2(q-1)}.$$

Do lema 3.1, item (i),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \le b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon), \tag{60}$$

e como $e^{-\frac{\mu t}{2\epsilon^2}} \le e^{-\frac{\mu t_\epsilon}{2\epsilon^2}}$, onde $t_\epsilon \le t < 2t_\epsilon$, vale que

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \le b_0^2(\epsilon)e^{-\frac{\mu t_\epsilon}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon),$$

onde $t_\epsilon \le t < 2t_\epsilon$. Assim, usando as condições satisfeitas por ϵ_2,

$$\begin{aligned}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\le b_0^2\frac{1}{4} + \beta^2(\epsilon)\frac{1}{8}\\ &= b_0^2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \beta^2(\epsilon)\frac{1}{8}\\ &\le B_\epsilon^2\frac{1}{8} + B_\epsilon^2\frac{1}{8}\\ &= \frac{1}{4}B_\epsilon^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \le \frac{1}{4}B_\epsilon^2, \tag{61}$$

para $t_\epsilon \le t < 2t_\epsilon$.

Agora, usando o item (iii) do lema 3.2, isto é,

$$\begin{aligned}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\le a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1}\\ &+ c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t),\end{aligned} \tag{62}$$

e recordando que $R_n^2(\epsilon) = \max(b_0^2(\epsilon),\beta^2(\epsilon))$, obtem-se

$$\begin{aligned}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\le a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t_\epsilon} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1}\\ + \mathrm{c}(\mu)\epsilon&\left(\epsilon^q B_\epsilon^2\right)B_\epsilon^2\epsilon^{1-q}(1+2t_\epsilon),\end{aligned} \tag{63}$$

para $t_\epsilon \le t < 2t_\epsilon$, onde $\mathrm{c}(\mu) = \dfrac{16c_4(\mu)}{\mu}\max\left(1,\dfrac{1}{\mu^3}\right)$. Usando as condições satisfeitas por ϵ_2, tem-se

$$\begin{aligned}a_0^2(\epsilon)e^{-\mu\lambda_1^2 t_\epsilon} &\le \frac{1}{4}K_\epsilon^2 \quad \text{e}\\ \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} &\le \frac{1}{8}K_\epsilon^2 \le \frac{1}{4}K_\epsilon^2.\end{aligned} \tag{64}$$

Além disso, observe que $\epsilon^q B_\epsilon^2 \le \epsilon^q K_\epsilon^2 \le 1$ e portanto,

$$\mathrm{c}(\mu)\epsilon\left(\epsilon^q B_\epsilon^2\right)B_\epsilon^2\epsilon^{1-q}(1+2t_\epsilon) \le \frac{3}{4}B_\epsilon^2. \tag{65}$$

Substituindo (65) e (64) em (63),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \le \frac{5}{4}K_\epsilon^2, \tag{66}$$

para $t_\epsilon \le t < 2t_\epsilon$. Somando as expressões (66) e (61), novamente aplicando o item (ii) do lema 2.1,

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \le \frac{3}{2}K_\epsilon^2$$

Sabe-se que a norma de uma aplicação é uma função contínua. Isto vale também para a norma $||\cdot||_\epsilon$. Posto isso, calculando o limite quando t tende à t_ϵ, para a função $\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2$, tem-se

$$\lim_{t\to t_\epsilon}\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 = \lim_{t\to t_\epsilon}||u(t)||_\epsilon^2$$

$$
\begin{aligned}
&= ||u(t_\epsilon)||_\epsilon^2 \\
&= \left|A_\epsilon^{1/2}u(2t_\epsilon)\right|_\epsilon^2,
\end{aligned}
$$

e como

$$\lim_{t\to t_\epsilon}\left|A_\epsilon^{1/2}u(t)\right|_\epsilon^2 \leq \frac{3}{2}K_\epsilon^2,$$

segue que

$$\left|A_\epsilon^{1/2}u(2t_\epsilon)\right|_\epsilon^2 \leq \frac{3}{2}K_\epsilon^2.$$

O objetivo agora é usar indução. Suponha que existe um tempo t_0 satisfazendo

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t_0)\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{2}B_\epsilon^2 \quad \text{e} \\
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t_0)\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{2}K_\epsilon^2.
\end{aligned} \tag{67}
$$

A desigualdade de Gronwall para o intervalo $t_0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$ faz com que as expressões (60) e (62) sofram alguma mudança. Sendo assim, temos

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq e^{-\dfrac{\mu(t-t_0)}{2\epsilon^2}}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t_0)\right|_\epsilon^2 \\
&+ \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon),
\end{aligned}
$$

e, por (67),

$$\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \leq \frac{1}{2}B_\epsilon^2 e^{-\dfrac{\mu(t-t_0)}{2\epsilon^2}} + \frac{2\epsilon^2}{\mu^2}\beta^2(\epsilon),$$

com $t_0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$.

Também

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq e^{-\mu\lambda_1^2(t-t_0)}\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t_0)\right|_\epsilon^2 \\
+ \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} &+ c_8(\mu)\epsilon R_n^4(\epsilon)(1+t-t_0).
\end{aligned}
$$

De (67),

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq \frac{1}{2}K_\epsilon^2 e^{-\mu\lambda_1^2(t-t_0)} + \frac{2\alpha^2(\epsilon)}{\mu^2\lambda_1} \\
&+ c_8(\mu)\left(\epsilon^q B_\epsilon^2\right)B_\epsilon^2\epsilon^{1-q}(1+t-t_0),
\end{aligned}
$$

com $t_0 \leq t < T^\sigma(\epsilon)$.

Tome, portanto, $t_0 = 2\epsilon^{2(q-1)}$. Assim como feito em (66) e (61), obtêm-se

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq \frac{1}{8}B_\epsilon^2 + \frac{1}{8}B_\epsilon^2 \\
&= \frac{1}{4}B_\epsilon^2,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 &\leq \frac{1}{8}K_\epsilon^2 + \frac{1}{8}K_\epsilon^2 + \frac{1}{4}K_\epsilon^2 \\
&= \frac{1}{2}K_\epsilon^2,
\end{aligned}
$$

para $2\epsilon^{2(q-1)} \leq t < 3\epsilon^{2(q-1)}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\left|A_\epsilon^2 u(t)\right|_\epsilon^2 &= \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{N}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 + \left|A_\epsilon^{1/2}\tilde{M}_\epsilon u(t)\right|_\epsilon^2 \\
&\leq \frac{1}{4}B_\epsilon^2 + \frac{1}{2}K_\epsilon^2 \\
&\leq \frac{1}{4}K_\epsilon^2 + \frac{1}{2}K_\epsilon^2 \\
&= \frac{3}{4}K_\epsilon^2,
\end{aligned}
$$

para $2\epsilon^{2(q-1)} \leq t < 3\epsilon^{2(q-1)}$, o que implica $T^\sigma(\epsilon) > 3\epsilon^{2(q-1)}$.

Analogamente, para $t_0 = 3\epsilon^{2(q-1)}$, tem-se

$$\left|A_\epsilon^2 u(t)\right|_\epsilon^2 \leq \frac{3}{4}K_\epsilon^2,$$

para $3\epsilon^{2(q-1)} \leq t < 4\epsilon^{2(q-1)}$, a partir do qual $T^\sigma(\epsilon) > 4\epsilon^{2(q-1)}$. Repetindo este argumento n vezes, concluí-se que

$$T^\sigma(\epsilon) > n\epsilon^{2(q-1)}, \quad \forall \ n \geq 1.$$

Portanto, $T^\sigma(\epsilon) = +\infty$ para $0 < \epsilon \leq \epsilon_2$, ou seja, o intervalo maximal de existência da solução forte para o sistema de equações de Navier-Stokes em domínios tridimenisonais fino é infinito.

■

4 Conclusões

O estudo sobre as equações de Navier-Stokes é importante para a matemática não somente pelo seu amplo campo de aplicações, mas para melhor entendimento e desenvolvimento de teorias no campo das equações diferenciais parciais. Este trabalho teve como objetivo compilar resultados que levaram ao estudo do intervalo maximal de existência da solução das equações de Navier-Stokes em domínios tridimensionais finos do tipo $\Omega_\epsilon = \omega \times (0,\epsilon)$, com $\omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\epsilon \in (0,1)$.

O principal resultado obtido neste artigo depende do teorema clássico de existência de soluções para domínios limitados quaisquer, o qual garante, com certas hipóteses, a existência de solução fraca. Restringindo os dados iniciais, tal teorema garante também a existência de uma solução única, denominada solução forte, para um tempo $T > 0$ que depende do domínio, dos dados iniciais e da viscosidade. Com isso, podemos concluir que em domínios finos, dependendo de uma relação entre os dados iniciais, este tempo T é infinito, ou seja, o intervalo maximal de existência de solução forte para as equações de Navier-Stokes é infinito.

Referências

Adams, R. A., Fournier, J. J. (2003). *Sobolev spaces*, vol 140. Academic press.

Brezis, H. (1983). *Analyse fonctionelle*, vol 5. Masson.

Chorin, A. J., Marsden, J. E. (1990). *A mathematical introduction to fluid mechanics*, vol 2. Springer New York.

Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society.

Foias, C., Manley, I., Rosa, R., Temam, R., Mayer, M. E. (2002). *Navier-Stokes equations and turbulence*, vol 55. Taylor & Francis.

Fox, R., McDonald, A. (1988). Introdução a mecânica dos fluidos. 3ª. *Ed Rio de Janeiro: Ed Guanabara*.

Kreiss, H. O., Lorenz, J. (1989). *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, vol 136. Access Online via Elsevier.

Lions, J. L. (1969). *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*, vol 31. Dunod Paris.

Melo, S. T., Neto, F. M. (1991). *Mecânica dos fluidos e equaçoes diferenciais*. IMPA.

Raugel, G., Sell, G. R. (1989). Equations de navier-stokes dans des domaines minces en dimension trois: régularité globale. *Comptes rendus de l'Académie des sciences Série 1, Mathématique*, *309*(6), 299–303.

Rudin, W. (1986). *Real and complex analysis (3rd)*. New York: McGraw-Hill Inc.

Temam, R. (1984). *Navier–Stokes Equations*. American Mathematical Soc..

Temam, R. (1995). *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, vol 66. Siam.

Temam, R., Ziane, M. (1996). Navier-stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions. *Advances in Differential Equations*, *1*(4), 499–546.