Ciência e Natura
ISSN: 0100-8307
cienciaenaturarevista@gmail.com
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 36 – 46
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

Recorrência matemática na OBMEP

Mathematics recurrences in OBMEP

Tárcius Alievi Pinheiro*[1] e João Roberto Lazzarin[2]

[1,2] Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

Resumo

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) destaca-se por apresentar questões que contrapõem o modelo de exercícios propostos em muitos livros didáticos. Para solucionar os exercícios da OBMEP o estudante necessita utilizar de forma criativa os mais variados conceitos matemáticos. Pensando nisso, neste trabalho examinamos algumas questões que envolvem algum tipo de raciocínio recursivo e que podem proporcionar algumas respostas além das esperadas. Este artigo é decorrente de uma dissertação de mestrado profissional (PROFMAT-UFSM), no qual apresentamos alguns resultados clássicos de sequências recursivas e apresentamos soluções não padronizadas via recorrência matemática para algumas questões que apareceram em exames da OBMEP.

Palavras-chave: *Recorrência matemática. Sequências. OBMEP*

Abstract

The Brazilian Public Schools Mathematical Olympiad (OBMEP) stands out for presenting issues that contradict the model proposed in many textbooks. To solve the exercises OBMEP the student needs an creativity use of various mathematical concepts. Thinking of this, in this paper we examine some issues that involve some kind of recursive reasoning and which can cause unexpected solutions. This article is the result of a professional master's dissertation (PROFMAT-UFSM), in which we present some classical results of recursive sequences and presented nonstandard solutions via mathematical recurrence for some issues that appeared in the OBMEP exams.

Keywords: *mathematical recurrence. sequences. OBMEP*

Recebido: 18/06/2014 Aceito: 28/07/2014
*tarciuspinheiro@hotmail.com

1 Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) vem conquistando espaço nas escolas desde 2005 servindo principalmente como motivação para o estudo de problemas matemáticos. E tem conseguido isso por apresentar questões que contrapõem o modelo que a tempo domina as salas de aula que, resumidamente, é o de retransmitir problemas e soluções padronizadas pelos livros didáticos. Analisando as questões propostas na olimpíada percebemos que para resolvê-las o aluno precisa algo mais que um modelo pronto, precisa, além de ter certo domínio na linguagem, utilizar de forma criativa os fundamentos da matemática.

O interesse em conhecer o formato diferenciado das questões propostas nestes tipos de provas e, por consequência, identificar os principais conceitos matemáticos envolvidos em cada exercício foi um dos fatores motivadores para a realização deste trabalho.

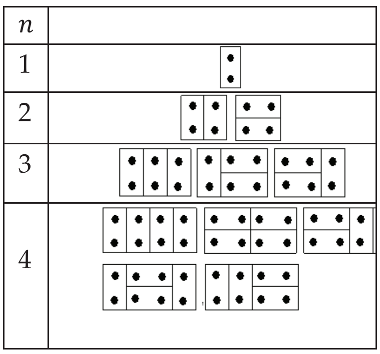
Como os problemas propostos na OBMEP englobam uma grande variedade de conceitos matemáticos, optamos por examinar somente alguns que tinham em sua essência algo relacionado com recorrências matemáticas. Percebemos que questões envolvendo algum tipo de raciocínio recorrente foram propostas nas provas dos níveis 1, 2 e 3 e, além disso, analisando os cartões respostas de cinco escolas municipais de Passo Fundo, notamos que em tais questões, grande parte dos estudantes apresentaram respostas erradas. Portanto, neste trabalho, apresentamos soluções diferentes para alguns problemas da OBMEP, o que pode fazer com que os agentes envolvidos tenham novas perspectivas quando buscarem soluções para questões que envolvam algum tipo de recorrência matemática.

Conforme Jesus e Silva (2006), por ser corriqueiro na Computação e na Matemática, é fundamental saber trabalhar com equações matemáticas provenientes de recorrências, e enfatizam: “muitos algoritmos são baseados em relações recorrentes e problemas combinatórios considerados difíceis à primeira vista, podem ser resolvidos mais facilmente quando escritos na forma de relações de recorrência” (p. 5). Podemos observar isso no seguinte problema que pode ser encontrado em (Grahan, Knuth e Patashnik , p. 306):

De quantas maneiras diferentes podemos organizar n dominós 2×1 em uma caixa $2 \times n$ (sem contar as possíveis permutações entre peças)?

Esse é um exercício cuja solução é mais facilmente encontrada quando utilizamos um raciocínio recursivo. De fato, resolvendo o problema para casos particulares observamos que um dominó pode ser colocado de forma única em uma caixa 2×1. No Quadro 1 são apresentadas algumas maneiras de organizar algumas peças.

Quadro 1: Modos de organizar n dominós em uma caixa $2 \times n$



Analisando o Quadro 1 podemos perceber que se a_n é o total de maneiras de organizar os dominós, então

$$a_3 = a_1 + a_2$$

e

$$a_4 = a_2 + a_3,$$

o que intuitivamente nos leva a concluir que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Seria muito trabalhoso resolver esse problema para um valor de n especificado (por exemplo, $n = 8$), descrevendo cada uma das maneiras de guardarmos as peças na caixa. Felizmente, com a utilização do raciocínio recursivo, além de ser possível tornar mais simples a resolução de alguns problemas matemáticos, também podemos encontrar soluções gerais para os mesmos. No que diz respeito ao problema de organizar os dominós, apresentado acima, tais raciocínios fornecem uma fórmula para "a_n" que depende não mais dos dados anteriores, mas tão somente dos alguns dados iniciais e do valor de n, tais fórmulas são conhecidas como solução da recorrência (ver mais detalhes ver Lima et al., 2006).

A utilização dos métodos que apresentaremos a seguir para a resolução das questões da OBMEP pode, à primeira vista, parecer inapropriado aos olhos do professor porque foge do método convencional de ensino e exige uma gama razoável de desafios didáticos. No entanto, essa prática promove algo que estamos necessitando muito em nossas escolas: a utilização da criatividade e da experimentação na construção de soluções. Além disso, valoriza o trabalho do professor de matemática que deixa de ser mero transmissor para ser orientador na construção de modelos que podem ser criados em conjunto com seus alunos.

2 Recorrência Matemática

Conforme Hefez (2012), uma sequência é definida como um conjunto ordenado de elementos de qualquer natureza, e complementa: "[...] trata-se apenas de elementos de um conjunto etiquetados com os números naturais" (p.16). Formalizando esta ideia, o autor define que uma sequência de elementos de um conjunto A é uma função f cujo domínio é o conjunto dos números naturais, que denotaremos por $\mathbb{N}$, e cujo contradomínio é A. Em outras palavras, a cada número natural n associamos um elemento $f(n) = a_n$ do conjunto A, formando assim uma espécie de fila ordenada: a_1, a_2,a_3,...

Na concepção de Santos, Mello e Murari (1998), "a formulação de relações de recorrência é uma arma poderosa e versátil na resolução de problemas combinatórios" (p. 155). Os autores enfatizam que soluções de diversos problemas inicialmente considerados difíceis podem ser obtidas com facilidade utilizando-se essa ferramenta matemática.

Uma equação é de natureza recursiva quando é definida em função dela mesma aplicada a valores anteriores. Várias sequências são determinadas por meio de uma relação de recorrência, isto é, pode-se determinar qualquer um de seus termos a partir do(s) termo(s) precedente(s). Conforme apresentamos no exemplo a seguir.

Exemplo 1

(a) sequência (N_i) dos números naturais ímpares: $x_{n+1} = x_n + 2$, com $n \geq 1$ e com valor inicial $x_1 = 1$;

(b) progressão aritmética (PA): $x_{n+1} = x_n + r$, com $n \geq 1$, onde o número r é a razão da progressão;

(c) progressão geométrica (PG): $x_{n+1} = qx_n$, com $n \geq 1$, onde o número q é a razão da progressão;

(d) sequência (F_n) de Fibonacci: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, com $n \geq 0$ e valores iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

Observemos que tomando $x_1 = 0$ no Exemplo 1(a), obtemos a sequência de números pares não negativos. Portanto, o valor inicial é crucial na busca de uma solução não recorrente (isto é, de uma solução que dependa somente de n e não dos valores anteriores). Analisando o Exemplo 1, percebemos que apenas N_i e F_n estão perfeitamente definidas, uma vez que N_1, F_0 e F_1 são conhecidos. No entanto, mesmo fixando valores para r e q, as progressões aritmética e geométrica não estão definidas uma vez que para diferentes valores de x_1 existem diferentes sequências que resolvem as equações. Além disso, ressaltamos que tais recorrências possuem apenas dependências lineares dos valores anteriores, por isso são chamadas de recorrências lineares. Dizemos que uma recorrência é de ordem k, com $k \in \mathbb{N}$, quando um termo x_{n+1} depende dos k termos que o antecedem. No que segue vamos formalizar esta ideia.

Definição 1 Uma recorrência linear de ordem k é uma equação da forma

$$x_{n+1} = r_{k-1}x_n + r_{k-2}x_{n-1} + r_{k-3}x_{n-2} + \cdots + r_0 x_{n-k+1} + g(n), \qquad (1)$$

onde, $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, ..., $x_k = a_k$ e $r_0, r_1, \ldots, r_{k-1} \in \mathbb{R}$ e $r_0 \neq 0$.

Caso $g(n) = 0$, dizemos que a recorrência é homogênea.

Uma solução da equação (1) é uma fórmula fechada que nos permite escrever x_{n+1} apenas em função de n e das condições iniciais. Com tal solução é possível encontrar o valor de qualquer termo sem necessidade de determinarmos os termos que o antecedem.

Pela Definição 1 temos que uma recorrência é de primeira ordem quando um termo x_n depende somente do termo x_{n-1}. Para determinar uma fórmula fechada, isto é, uma solução para calcular x_n, precisamos, segundo Lima et al. (2006), verificar as soluções para os termos iniciais e perceber um padrão, encontrar a relação de recorrência correspondente e verificar a validade de tal relação.

Referindo-se à resolução de recorrências, Santos, Mello e Murari (1998) explicam que conjecturar uma fórmula fechada para determinada sequência pode não ser tarefa simples, entretanto, verificar se tal fórmula é válida para que possamos determinar qualquer termo da sequência é, na maioria das vezes, um trabalho simples, uma vez que basta aplicar diretamente o Princípio da Indução Matemática (Para mais detalhes sobre o Princípio da Indução matemática ver Hefez, 2011).

Exemplo 2 Considerando a relação homogênea de recorrência

$$x_n = (n-1)x_{n-1}, \text{ com } x_1 = 2.$$

À primeira vista pode parecer que para calcular o centésimo termo dessa sequência seja necessário saber quais são os termos x_{n-1}, com $n = 2,3,4,\dots,100$. No entanto, é possível determinar uma fórmula fechada para x_n e assim obter x_{100} sem precisar determinar todos os termos anteriores. De fato,

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ x_5 &= 4x_4 \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = \\ = 2 \cdot 2x_2 \cdot 3x_3 \cdot 4x_4 \cdot 5x_5 \cdot \dots \cdot (n-1)x_{n-1}.$$

Portanto, desde que os termos sejam todos não nulos, podemos multiplicar ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{x_i}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$, obtendo

$$x_n = 2[(n-1)!].$$

Aplicando o Princípio da Indução Matemática para verificar a validade da fórmula temos que para $n = 1$,

$$x_1 = 2[(1-1)!] = 2,$$

é verdadeira. Supondo que

$$x_k = 2[(k-1)!],$$

seja válida para algum número natural $k > 1$, vem que

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (k+1-1)x_k \\ &= k \cdot 2[(k-1)!] = 2 \cdot k!, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

No caso de recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas, aquelas que podem ser resolvidas de modo mais simples são do tipo $x_n = x_{n-1} + g(n)$ uma vez que o coeficiente de x_{n-1} é igual a um, o que torna possível a simplificação de termos, conforme o exemplo a seguir.

Exemlo 3 Dada a recorrência

$$x_n = x_{n-1} + g(n-1),$$

observamos que uma fórmula fechada para essa relação pode ser obtida raciocinando da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + g(1) \\ x_3 &= x_2 + g(2) \\ x_4 &= x_3 + g(3) \\ x_5 &= x_4 + g(4) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + g(n-1). \end{aligned}$$

Assim, adicionando membro a membro cada uma das igualdades, obtemos

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k).$$

No entanto, esse método nem sempre é eficiente para resolver recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas. Tomando como exemplo a equação de recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + 3 \qquad (2)$$

ao adicionarmos as igualdades, conforme feito no Exemplo 3, não será possível simplificar os termos $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$. O que nos ajuda a resolver tal problema é o fato de podermos transformar uma recorrência do tipo (2) em outra mais simples, usando o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em Lima et al. (2006):

Teorema 1 Sempre que a_{n-1} for uma solução não-nula de $x_n = g(n)x_{n-1}$, pode-se transformar a recorrência

$$x_n = g(n)x_{n-1} + h(n)$$

em

$$y_n = y_{n-1} + h(n) \cdot [g(n) \cdot a_{n-1}]^{-1},$$

fazendo a substituição $x_{n-1} = a_{n-1}y_{n-1}$.

Com o teorema acima podemos determinar a solução para a seguinte recorrência:

Exemplo 4 Encontrar uma fórmula fechada para a relação recursiva dada por

$$x_n = 2x_{n-1} + 3, \text{ com } x_1 = 2.$$

Nesse caso, uma solução para $x_n = 2x_{n-1}$ é $x_n = 2^{n-1}$. Assim, pode ser feita a substituição $x_{n-1} = 2^{n-2}y_{n-1}$. Daí, segue-se que

$$2^{n-1}y_n = 2 \cdot 2^{n-2} \cdot y_{n-1} + 3 \Leftrightarrow$$

$$y_n = y_{n-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Daí, segue que

$$y_n = y_1 + 3\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= y_1 + 3\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= y_1 + 3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Como $x_1 = y_1 = 2$, temos

$$y_n = 5 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Logo, pode-se concluir que

$$x_n = 2^{n-1} \cdot \left[5 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= 5 \cdot 2^{n-1} - 3.$$

A validade dessa solução é verificada aplicando o Princípio da Indução Matemática. Nesse caso, para $n = 1$ a igualdade é verdadeira, pois

$$x_1 = 5 \cdot 2^{1-1} - 3 = 2.$$

Supondo que a igualdade seja válida para algum $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, temos que

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 2x_k + 3 \\ &= 2 \cdot (5 \cdot 2^{k-1} - 3) + 3 \\ &= 5 \cdot 2^k - 3, \end{aligned}$$

o que prova a validade da solução.

3 Solução Via Recorrência Para Problemas da OBMEP

Observando as provas aplicadas no ensino fundamental e médio na OBMEP de 2012, percebemos que algumas questões propostas nas provas dos três níveis da olimpíada requerem um raciocínio recursivo para serem resolvidas.

O estudo desta ferramenta torna-se fundamental porque o professor pode efetuar em conjunto com seus alunos a construção de modelos e soluções gerais para diversos problemas. Não queremos propor que toda a formalidade sobre recorrência matemática apresentada nesse artigo seja utilizada em sala de aula, e sim incentivar a utilização de um método criativo de solucionar questões matemáticas. Com isso, acreditamos que o professor em sala de aula possa mediar soluções de forma indutiva e natural, incentivando uma maior autonomia de seus alunos na busca de soluções frente o problema proposto.

Dentre as questões da OBMEP que analisamos, escolhemos e resolvemos três que envolvem raciocínio recursivo. A Questão 1 foi selecionada por basicamente dois motivos: primeiro por ter sido proposta nas provas dos três níveis da última olimpíada e segundo por poder ser resolvida de maneira criativa e ao mesmo tempo simples, utilizando, inclusive, o conceito de progressão aritmética, assunto importante constante no currículo do ensino médio. Por similar motivo apresentamos a Questão 2, que resolvemos formulando uma relação recursiva que envolve o conceito de progressão geométrica. Finalizamos com a questão 3 que foi proposta aos alunos dos três níveis da OBMEP 2012. Do nosso ponto de vista, ela apresenta uma possibilidade de solução bem diferenciada do padrão por envolver diferentes conteúdos matemáticos, tais como relações trigonométricas, multiplicação de matrizes e rotações de vetores no plano.

Questão 1 (Questão 09- OBMEP 2012, nível 2) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na Figura 1. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

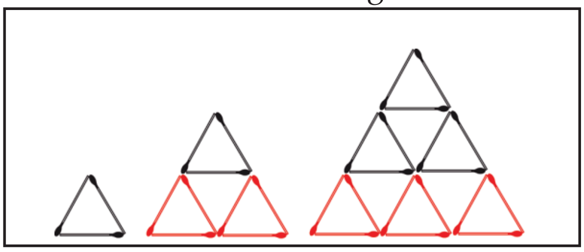


Figura 1 - Sequência de triângulos

Solução. Na Figura 1, consideremos $a_1 = 3$ o número de palitos utilizados para construir o primeiro triângulo. Desta forma, $a_2 = a_1 + 6$, $a_3 = a_2 + 9$, e assim sucessivamente. Assim, podemos formar a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 2 \cdot 3 \\ a_3 &= a_2 + 3 \cdot 3 \\ a_4 &= a_3 + 4 \cdot 3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + n \cdot 3. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro todas as igualdades obtemos que

$$a_n = a_1 + 3(2 + 3 + 4 + \cdots + n)$$

$$= \frac{3n(n+1)}{2}.$$

Como $a_n = 135$, segue que

$$\boldsymbol{3n^2 + 3n = 270 \Rightarrow n = 9 \; ou \; n = -10.}$$

Desconsiderando o valor negativo, a resposta procurada é $n = 9$.

Questão 2 (Questão 219-Banco de questões OBMEP, 2010 pág. 33) Colando seis triângulos – Construa uma figura com seis triângulos equiláteros adjacentes, o primeiro com lado de comprimento $1cm$ e os triângulos seguintes com lado igual à metade do lado do triângulo anterior, como indicado na Figura 2. Qual é o perímetro dessa figura?

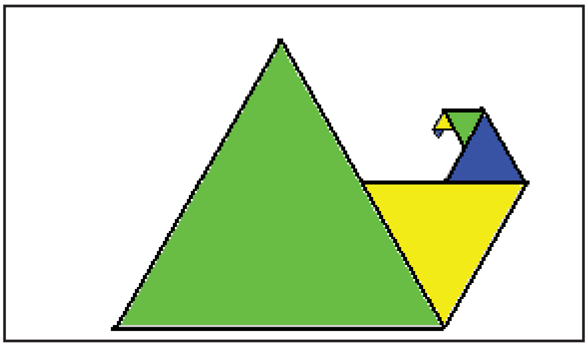


Figura 2

Solução. Quando a figura possui apenas um triângulo seu perímetro é $P_1 = 3cm$. Após incluir o segundo triângulo, o perímetro da figura aumenta em $\frac{1}{2}cm$, ou seja, $P_2 = P_1 + \frac{1}{2}$. Com a colocação do terceiro triângulo a medida do contorno da figura aumenta em $\frac{1}{4}cm$, isto é, $P_3 = P_2 + \frac{1}{2^2}$, e assim sucessivamente. Portanto, podemos escrever:

$$P_1 = 3$$
$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}$$
$$P_3 = P_2 + \frac{1}{2^2}$$
$$\vdots$$
$$P_n = P_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Adicionando membro a membro todas as igualdades segue que

$$P_n = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 3 + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Logo, para uma figura formada por 6 triângulos, seu perímetro é

$$P_6 = 4 - \frac{1}{32} = \frac{127}{32}cm$$

Na questão a seguir não é tão evidente que haja uma fórmula de recorrência que permita resolvê-la. No entanto, utilizando alguns resultados de álgebra linear e trigonometria, podemos encontrar uma solução geral para o problema.

Questão 3 (Questão 9- OBMEP 2012, nível 1, 2 e 3) Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na Figura 3, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

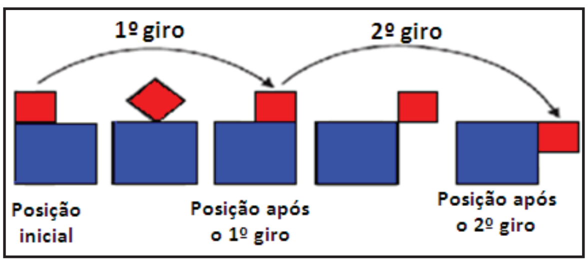
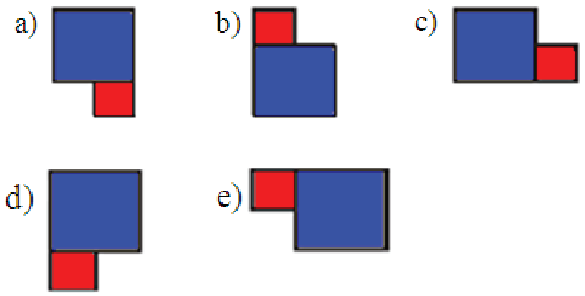


Figura 3

Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?



Solução. Observamos que o quadrado de lado $1cm$ completa um giro quando realiza uma rotação de medida $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e, portanto, o mesmo pode ocupar oito posições diferentes ao redor do quadrado de lado $2cm$. Sendo assim, associamos o movimento do quadrado pequeno, de lado $1cm$, aos pontos A, B, C, D, E, F, G e H que são, respectivamente, extremidades dos vetores $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_8} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v_4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v_6} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ e $\overrightarrow{v_7} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, conforme a Figura 4.

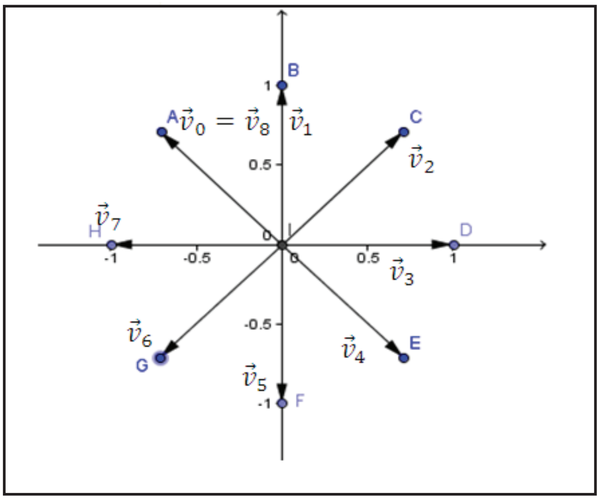


Figura 4

Cada rotação de $\theta = \frac{\pi}{4}$ do vetor $\vec{v}_n$ representa um giro de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ do quadrado menor sobre o quadrado de lado $2cm$. Assim, a posição inicial do quadrado de lado 1cm corresponde ao ponto A, após um giro a posição do quadrado menor corresponderá ao ponto B, e assim sucessivamente até retornar a configuração inicial.

Seja $M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ a matriz que representa uma rotação de θ radianos de um vetor $\vec{v}$ no sentido horário. Por multiplicação de matrizes, segue que:

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0}.$$

Após duas rotações obtemos

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_1}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) & sen(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\, sen(\theta) \\ -[sen(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\, sen(\theta)] & \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0}.$$

Pelas relações do cosseno e do seno da soma de dois arcos, temos

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & sen(2\theta) \\ -sen(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0}.$$

$$\overrightarrow{v_3} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_2}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & sen(2\theta) \\ -sen(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + 2\theta) & sen(\theta + 2\theta) \\ -sen(\theta + 2\theta) & \cos(\theta + 2\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0}.$$

Conjectura-se após n rotações, que as coordenadas do vetor $\vec{v}_n$ satisfazem

$$\vec{v}_n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & sen(n\theta) \\ -sen(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{v_0} \qquad (3)$$

Será que a igualdade (3) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$?

Para verificarmos a validade desta equação, aplicamos o Princípio de Indução Matemática.

Quando $n = 1$ a relação é claramente válida, pois

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

ou seja, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Supondo que a igualdade

$$\vec{v}_k = \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & sen(k\theta) \\ -sen(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_0$$

seja válida para $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, provemos que a fórmula é válida para $k + 1$. Como

$$\vec{v}_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_k$$

temos

$$\vec{v}_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\mathrm{k}\theta) & sen(\mathrm{k}\theta) \\ -sen(\mathrm{k}\theta) & \cos(\mathrm{k}\theta) \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_0$$

Novamente, efetuando o produto das matrizes e usando as relações do cosseno e seno da soma de dois arcos, obtemos

$$\vec{v}_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos[(k+1)\theta] & sen[(k+1)\theta] \\ -sen[(k+1)\theta] & \cos[(k+1)\theta] \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_{0,}$$

conforme queríamos demonstrar.

Como $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\overrightarrow{v_0} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, segue, da equação (3), que

$$\vec{v}_n = \begin{bmatrix} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) & sen\left(n\frac{\pi}{4}\right) \\ -sen\left(n\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Nesse caso desejamos descobrir em qual posição estará o quadrado de lado 1cm após 2012 giros, portanto substituindo $n = 2012$ na equação (4), obtemos:

$$\overrightarrow{v}_{2012} = \begin{bmatrix} \cos\left(2012\frac{\pi}{4}\right) & sen\left(2012\frac{\pi}{4}\right) \\ -sen\left(2012\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(2012\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(503\pi) & sen(503\pi) \\ -sen(503\pi) & \cos(503\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\pi) & sen(\pi) \\ -sen(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Logo, a figura que corresponde a $\overrightarrow{v}_{2012} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ é apresentada no item (a).

4 Considerações Finais

No presente trabalho salientamos por meio da perspectiva de diferentes autores a presença das equações recursivas em diferentes áreas, bem como a utilização de recorrências para facilitar a resolução de determinados problemas combinatórios. Acreditamos ser necessária uma metodologia diferenciada para abordar e resolver questões matemáticas priorizando o uso da criatividade na construção de modelos e deixando de lado a aplicação sistemática de fórmulas prontas.

O estudo de recorrências matemáticas serve como uma oportunidade para que os estudantes desenvolvam seu raciocínio, percebendo padrões, fazendo conjecturas e com isso aprendam a organizar ideias e construir seus próprios modelos. Sendo que ao professor caberá o papel de coadjuvante na criação destas, tornando-se um agente mediador entre o aluno e o objeto de estudo que, neste caso, é a Matemática.

Referências

GRAHAM, R. J., KNUTH, D. E., PATASHNIK, O. Concrete Mathematics: a foundation for computer science . 2th ed. Addison-Wesley. Disponível em: <http://www.matematica.net/ portal/ e-books>. Acesso em 14/12/2012.

HEFEZ, A. Indução matemática. Programa de iniciação científica -OBMEP. Rio de Janeiro, [s.n], 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/prog_ic_2010 /apostila2010. html>. Acesso em 05/12/2012

HEFEZ, A. Elementos de aritmética. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

JESUS, E. A. de; SILVA, E. F. S. Relações de recorrência. Monografia (proposta de apresentação de trabalho nas Jornadas de Iniciação Científca) – Universidade federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

LIMA, E.L. et al. A Matemática do ensino médio - volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OBMEP-Banco de questões 2010. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

SANTOS, J.Plínio O., MELLO, Margarida P., MURARI, Idani T.C. Introdução à Análise Combinatória. 2 ed. Campinas,São Paulo: UNICAMP, 1998.

LIMA, E.L. et al. A Matemática do ensino médio - volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OBMEP-Banco de questões 2010. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

SANTOS, J.Plínio O., MELLO, Margarida P., MURARI, Idani T.C. Introdução à Análise Combinatória. 2 ed. Campinas,São Paulo: UNICAMP, 1998.