Ciência e Natura
ISSN: 0100-8307
cienciaenaturarevista@gmail.com
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

de Oliveira Bastos, Débora; Andrade Poffal, Cristiana; Schneider Meneghetti, Cinthya
Estudo da Circunferência no Ensino Médio: Sugestões de Atividades com a Utilização do Software GeoGebra
Ciência e Natura, vol. 37, núm. 3, 2015, pp. 123-142
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil

Artigo Original *DOI:10.5902/2179460X14252*

Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 123– 142
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIA e NATURA 35 anos

Estudo da Circunferência no Ensino Médio: Sugestões de Atividades com a Utilização do Software GeoGebra

Study of circumference in High School: suggestions for activities using the software Geogebra

Débora de Oliveira Bastos*[1] , Cristiana Andrade Poffal [2] e
Cinthya Schneider Meneghetti [3]

[1,] Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul Campus Rio Grande

[2,3] Universidade Federal do Rio Grande, Brasil

Resumo

Este artigo propõe três atividades que podem ser desenvolvidas ao estudar o círculo no Ensino Médio. Todas as atividades propostas utilizam o software gratuito de geometria dinâmica GeoGebra como ferramenta de aprendizagem. As atividades sugeridas têm como objetivo lecionar, através de roteiros de instruções, os conteúdos: equações do círculo (reduzida e geral), a posição relativa entre ponto e círculo e a posição relativa entre reta e círculo. Mostraremos também uma análise das atividades que embasaram a proposta desse trabalho quando aplicadas em três turmas de terceiro ano do Ensino Técnico integrado ao Médio. Concluímos a validade das atividades pelo desempenho dos alunos nas avaliações, mostrando um melhor conhecimento sobre o assunto em relação aos alunos das turmas nas quais o GeoGebra não foi utilizado.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Circunferência. Círculo. Ensino Médio. GeoGebra

Abstract

This article proposes three activities that can be developed to study the circle for High School students. All proposed activities use the free software of the dynamic geometry Geogebra as learning tool. The suggested activities have as goal to teach, through instruction scripts, the following content: circle equations (reduced and general), relative position between point and circle and relative position between line and circle. In addition, we will portray an analysis of the activities that based the proposal of our task when these were executed in three Technical Learning Integrated to High School's third year junior groups. We conclude the validity of the activities by student performance on assessments, showing a better knowledge of the subject in relation to students in classes in which there GeoGebra was not used.

Keywords: Analytical Geometry. Circumference. Circle. High School. GeoGebra

Recebido: 05/06/2014 Aceito: 10/08/2014

*dob_bastos@hotmail.com

1 Introdução

Muitos são os trabalhos e livros que discutem sobre como a Matemática é considerada difícil pelos alunos[1] e quanto a discrepância entre as tecnologias que usamos no cotidiano e as empregadas em sala de aula. O presente trabalho, por isso, tem como objetivo principal oferecer uma alternativa para o professor de Ensino Médio lecionar a Geometria Analítica e o estudo do círculo de forma a aproximar da tecnologia digital professores e alunos em sala de aula.

Nossos alunos relatam que não sentiam dificuldade em Matemática no Ensino Fundamental. Como trabalhamos com Ensino Médio, os alunos descrevem que passaram a achar difícil, como se a Matemática houvesse mudado. O que nos faz pensar se realmente oferecemos Matemática aos alunos ou simplesmente reproduzimos resultados. Por exemplo, mostramos como aplicar a fórmula de Bhaskara ou o Teorema de Pitágoras em vez de oferecer subsídios para os alunos entendê-los, evitando a memorização imediata. O uso de ferramentas computacionais propiciam o aprendizado de Matemática? O que é o saber matemático, ou pensar Matemática?

Por nossa experiência sabemos, que mesmo com boa vontade, muitos professores não conseguem utilizar as tecnologias em sala de aula como gostariam. Neste trabalho propomos atividades acerca do estudo do círculo para alunos do Ensino Médio utilizando o *software* gratuito de geometria dinâmica GeoGebra.

2 A construção do saber matemático e as tecnologias

Micotti (1999) defende que o saber matemático é diferente dos outros saberes, envolvendo método dedutivo, demonstrações, relações conceituais lógicas, singularidades das representações simbólicas e significados rigorosos:

> Nas situações voltadas para a construção do saber matemático, o aluno é solicitado a pensar - fazer inferências sobre o que observa, a formular hipóteses - não, necessariamente, a encontrar uma resposta certa. A efetiva participação dos alunos neste processo depende dos significados das situações propostas, dos vínculos entre elas e os conceitos que já dominam.

Esse conceito de construção do saber matemático norteou o presente trabalho e acreditamos que o uso de tecnologia digital, especificamente *softwares* de geometria dinâmica levam o aluno a pensar e a vincular o que ele já sabe com o novo conhecimento a adquirir. Observamos, segundo Ponte et al. (2003), que esse tipo de intervenção pode ser chamado de investigação matemática, pois o objetivo é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos e desconhecidos, procurando identificar propriedades. Uma investigação é dividida em quatro partes: exploração e formulação de questões, formulação de conjecturas, realização de testes e reformulação dos mesmos, se for o caso, e a demonstração dos resultados. Os autores ainda afirmam que vários estudos em educação mostraram que a investigação é uma poderosa forma de construir conhecimento.

Follador (2007) atesta que mesmo havendo enorme discrepância entre a tecnologia existente e a presente nas escolas, essa diferença não poderá ser resolvida de maneira rápida. Dessa forma, o professor não deve esperar os meios propícios ideais para só então utilizar as ferramentas computacionais em sala de aula. Deve, por exemplo, no caso do professor de Matemática, usar a calculadora, pois é de custo acessível, já inserida normalmente no cotidiano da maioria, não está relacionada com as lacunas deixadas na formação acadêmica do professor em relação às tecnologias, pode tornar as aulas interessantes e ser uma poderosa aliada no processo de ensino-aprendizagem. A calculadora simples comparada a outras tecnologias parece totalmente ultrapassada, assim como hoje um lápis, um livro não nos parecem avanços tecnológicos. De qualquer forma, se Follador (2007) indica o uso da calculadora como uma alternativa para inserção de tecnologia para as escolas em que ela não é atualizada, que diremos daquelas que disponibilizam recursos avançados? A escola, através do professor, deve empregá-los com potencialidades muito maiores que a simples calculadora. Devemos ultrapassar as resistências e utilizar as tecnologias disponíveis.

Antes do simples uso da tecnologia, devemos repensar nossa postura e o que realmente queremos dos alunos. Temos, por isso, como objetivos gerais[2] incentivar a autonomia do aluno e vinculá-la à postura diferenciada do professor, além da inserção da tecnologia digital em sala de aula, conforme BRASIL (2000). A tecnologia pode e deve ser usada como recurso ou metodologia, embora acreditamos ser de maior relevância a atitude do aluno em relação ao aprendizado. E essa atitude depende do professor. O professor propõe a ele ser ativo ou passivo diante da aprendizagem.

É necessário desenvolver um novo perfil de profissional da educação, pertinente ao mundo em constante atualização. Segundo BRASIL (1998) mediante ao aluno ser protagonista da construção de sua aprendizagem, o professor deve passar a ser organizador da aprendiza-

[1] Empregamos a palavra aluno no sentido do dicionário Houaiss: lat. Alumnus, i "criança de peito, lactente, menino, aluno, discípulo", der. do verbo alére "fazer aumentar, crescer, desenvolver, nutrir, alimentar, criar, sustentar, produzir, fortalecer etc."e não na interpretação errônea "sem luz".

[2] Para maiores detalhes veja Objetivos.

gem, preparando as atividades que levem à construção de conceitos e procedimentos; facilitador da aprendizagem, interferindo nas informações que o aluno não poderia obter sozinho; mediador da aprendizagem promovendo a análise e o debate das propostas dos alunos; orientador de reformulações e da valorização das soluções mais adequadas. Na nossa proposta o professor deve assumir esses variados aspectos, por isso argumentamos que o envolvimento com esse tipo de atividade é muito maior que numa aula expositiva. Ponte et al. (2003) afirmam que mesmo na investigação matemática não podemos pensar que o aluno deve trabalhar totalmente isolado. O papel do professor é indispensável em aulas de investigação, atribuindo-lhe a função de ajudar o aluno a compreender o significado de investigar e a aprender a fazê-lo. Com o acesso às tecnologias digitais no nosso cotidiano de maneira tão intensa, o uso dessas tecnologias em sala de aula deveriam ser naturais. Estamos vivenciando uma época em que a maioria dos professores são nascidos antes de 82. Pela teoria de Prensky (2001) estes professores são chamados imigrantes digitais entrando em conflito com os alunos nascidos após 82 chamados de nativos digitais. Prensky (2001) ainda ressalta as qualidades naturais dos nativos digitais, as quais os imigrantes digitais esforçam-se muito para adquirir: assimilam informação rapidamente, estão acostumados com processos paralelos e multi-tarefa, observam gráficos antes de ler os textos, preferem uma leitura aleatória a uma leitura do início ao fim de um texto e estão sempre conectados. Prensky (2001) também comenta que os professores por serem imigrantes digitais falam uma outra linguagem em relação ao aluno, nativo digital e por isso não se entendem, o que vem a ser um entrave ao aprendizado. O TIC Educação 2012[3], pesquisa feita pelo CETIC BR[4] aponta que em 2012, no Brasil, apenas 17% dos professores pesquisados tinham menos de 31 anos[5] CETIC (2013). Talvez a teoria de Prensky explique o porquê da resistência de alguns professores ao uso de tecnologias no ensino e o desinteresse dos alunos por aulas expositivas.

Sabemos dos incentivos do Governo Federal para o professor utilizar as TIC no ensino de modo geral. Em 2007 o projeto Proinfo[6] passou a ser Programa Nacional de Tecnologia Educacional e variadas ações foram implementadas, não apenas para fornecer os instrumentos, mas também a formação dos professores das redes públicas da Educação Básica. Vinculados ao Proinfo estão os projetos Um Computador por Aluno (UCA), o programa Banda Larga nas Escolas (PBLE), a distribuição de *tablets* para os professores de Ensino Médio e a distribuição de laboratórios de informática nas escolas da rede pública. Borba e Penteado (2010) alertam que, sendo o Brasil um país de dimensões continentais e com culturas tão diversificadas, os programas nacionais podem não adaptar-se a todas as escolas, então o sucesso da implementação da informática na sala de aula também depende de ações localizadas articuladas às ações em larga escala.

Devemos tomar cuidado para o emprego da tecnologia na educação não passar de mera troca de ferramentas: lápis e papel por computador. A pura inserção de tecnologia não significa a quebra da metodologia tradicional. Follador (2007) argumenta que se a tecnologia está na sociedade, a escola faz parte da sociedade e alerta que sua simples introdução nada garante e, antes, é preciso traçar objetivos claros de ensino e aprendizagem para essa inserção. Ainda argumenta que embora aprender as funcionalidades técnicas das tecnologias sejam necessárias, não podemos ficar limitados a esse simples manuseio. Questionamos, por isso, se há mudança essencial no professor que passava toda matéria no quadro, passar a disponibilizar o conteúdo pela internet, ou em apresentações com *slides* num projetor multimídia. Se houve o uso da tecnologia, não significa a mudança na capacidade do aluno aprender, embora admitamos que essas práticas são facilitadoras tanto para professores quanto para alunos.

A tecnologia não é um remédio milagroso para a educação, muito menos para o ensino da Matemática. Follador (2007) ressalta a importância de termos em mente que os *softwares* educacionais não resolvem os problemas de aprendizagem, eles são um incremento às possibilidades já existentes. Nessa linha de pensamento

> [...] o *software* a ser utilizado nas escolas não deve substituir as atividades educacionais já existentes - ele não deve ser simplesmente uma versão computadorizada dos atuais métodos de ensino. Isto se faz necessário pela própria mudança na nossa condição de vida e pelo fato de que a natureza do conhecimento mudou. Valente (1989)

Acreditamos que o foco principal do uso das tecnologias digitais seja transformar a informação em conhecimento, basta saber tirar das tecnologias as suas potencialidades didáticas.

Segundo Santaló (1996) o problema está em como educar o homem informático, aproveitando-se de suas potencialidades e baseados no fato dele já estar inserido num mundo informático, ou seja, adaptado a uma tecnologia que possibilita eficazes e diversificadas maneiras

[3]Pesquisa sobre o uso das Tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras feito anualmente desde 2011, em que 2012 foi o mais recente relatório divulgado.

[4]Centro de Estudos sobre as Tecnologias da Informação e da Comunicação do Brasil.

[5]Observamos o fato de Prensky relatar a realidade de seu país em que o avanço tecnológico é anterior ao nosso, mesmo hoje em dia. Isso quer dizer que a geração de nativos digitais do Brasil pode ter faixa etária menor, o que diminuiria ainda mais a porcentagem de professores nativos digitais da nossa realidade.

[6]Retirado de *http : //www.fnde.gov.br/programas/programa − nacional − de − tecnologia − educacional − proinfo*

de agir. Ao mesmo tempo que a tecnologia permite essas atribuições às exige, por isso a escola deve evoluir para preparar indivíduos com os perfis necessários a este mundo complexo e diversificado. Sobre o que ensinar Santaló (1996) argumenta que o melhor é saber pouco e bem, embora com os mecanismos computacionais é possível saber muito e bem.

BRASIL (2000) deixam bem claro o papel do uso das tecnologias para a formação do perfil do profissional exigido no mercado atual de trabalho:

> O trabalho ganha então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos. Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

Devemos conciliar, por isso, os vários aspectos da tecnologias digitais para o emprego em sala de aula.

O resultado mais recente, divulgado na imprensa, em relação ao desempenho do alunos diz que apenas 10% dos alunos do Ensino Médio saem com os conhecimentos que deveriam em Matemática[7]. Questionamos, por isso, as metodologias atuais implantadas.

Borba e Penteado (2010) falam sobre a postura de alguns professores quanto a mudança:

> Alguns professores procuram caminhar numa zona de conforto onde quase tudo é conhecido, previsível e controlável. Conforto aqui está sendo utilizado no sentido de pouco movimento. Mesmo insatisfeitos, e em geral os professores se sentem assim, eles não se movimentam em direção a um território desconhecido. Muitos reconhecem que a forma como estão atuando não favorece a aprendizagem dos alunos e possuem um discurso que indica que gostariam que fosse diferente. Porém, no nível de sua prática, não conseguem se movimentar para mudar aquilo que não os agrada. Acabam cristalizando sua prática numa zona dessa natureza e nunca buscam caminhos que podem gerar as incertezas e imprevisibilidade.

[7] *http://g1.globo.com/educacao/noticia/2013/03/apenas-10-dos-alunos-aprendem-o-ideal-em-matematica-no-ensino-medio.html* Notícia baseada na Prova Brasil/ SAEB 2011.

Muitas dissertações e trabalhos de conclusão de curso focam o uso das TIC em sala de aula. Isso sinaliza estarmos vivendo uma época de transição em que teremos o uso de tecnologia digital concomitante a outros fazeres na escola. Se até mesmo o uso de canetas esferográficas teve certa resistência, o que diremos de tecnologias avançadas, cuja manipulação não é tão fácil. Acreditamos que as TIC serem adotadas como ferramentas de aprendizagem em sua total potencialidade em sala de aula é apenas uma questão de tempo.

Pesquisamos na Biblioteca Digital do PROFMAT para analisar os trabalhos de conclusão de curso e outras publicações e verificar o que está sendo oferecido ao professor em relação a Geometria Analítica, círculo e sobre o uso do programa GeoGebra. Verificamos que Geometria Analítica está no título de pelo menos quinze resultados, Geometria Analítica e GeoGebra são assuntos de pelo menos oito trabalhos e apenas de um, o foco do trabalho abrange o círculo inserido na Geometria Analítica com o uso do *software* GeoGebra. Embora pelo menos outros três trabalhos contenham atividades relativas ao círculo sem ser o assunto principal do trabalho. Para construir as atividades propostas neste trabalho, analisamos quatro autores, cujos assuntos são afins com o nosso: Guedes (2013), Silva (2013), Paula (2013) e Werneck (2013). A análise destes trabalhos poderá ser encontrada com detalhes na versão completa deste trabalho no Banco Indutor de Trabalhos do PROFMAT.

A partir da análise destas dissertações percebemos que o assunto Geometria Analítica, círculo e o uso do *software* GeoGebra não são inéditos, embora acreditamos que nosso trabalho é diferenciado por: apresentar atividades detalhadas a fim de propiciar a execução com o mínimo de interferência do professor e por isso podem ser utilizadas no ensino a distância, oferecer atividades sobre os conteúdos presentes nos livros didáticos de forma independente, ou seja, de maneira que o professor possa escolher o tópico o qual utilizará em sua sala de aula, oportunizar aos alunos a formar conjecturas e testá-las, ressaltar a importância e validade das ferramentas puramente algébricas e oferecer soluções comentadas ao professor. A maioria das atividades do GeoGebra é pensada para explorar a potencialidade dos *softwares* de geometria dinâmica, pois mover objetos possibilita maior observação, a fim de que o aluno não analise situações estáticas, percebe que se sua conjectura estiver certa não importa o movimento que faça, ela continua válida. Outro aspecto importante a considerar é o foco nos conteúdos propriamente ditos, ou seja, não são atividades para fixação ou introdução do conteúdo, visam à compreensão dos tópicos ministrados, normalmente introduzidos como pura informação. Por exemplo, não informamos o que significam os parâmetros na equação reduzida do círculo, através das atividades o aluno pode conjecturar sobre os seus significados e testar a veracidade das suas hipóteses.

3 Caracterização

Nessa seção comentamos alguns recursos materiais necessários ao desenvolvimento das atividades propostas assim como os objetivos e os pré-requisitos.

3.1 Objetivos

Os objetivos das atividades sobre círculo propostas deste trabalho foram norteados pelas discussões presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) 9.394/96 promulgada em 1996. Foi a partir dessa lei que a estrutura do Ensino Médio foi alterada, dividindo o Ensino Médio em três grandes áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Nota-se o termo tecnologia como algo inerente a cada uma delas, termo inserido nessa lei.

Temos como objetivos gerais consolidar a inserção da tecnologia no ensino de Matemática, o desenvolvimento da autonomia do aluno vinculado ao desempenho de um novo papel do professor e o trabalho em grupo.

Nossos objetivos específicos são a identificação de regularidades que possibilitam ao aluno conjecturar sobre o assunto abordado, a compreensão dos conteúdos sobre círculo, o desenvolvimento da relação entre os significados e as abordagens distintas de um mesmo ente matemático e a resolução de problemas a partir dos conhecimentos adquiridos. Os objetivos específicos são melhor detalhados antes de cada atividade proposta.

3.2 Público alvo

Esse trabalho é voltado para alunos de Ensino Médio. O estudo do círculo na Geometria Analítica, geralmente é inserido no 3º ano do Ensino Médio, por isso focamos nosso trabalho para os alunos dessa série. A faixa-etária é importante, como estão para concluir o Ensino Básico, acreditamos terem maturidade suficiente para desenvolver as atividades propostas.

3.3 Pré-requisitos

Para aplicar nossa proposta por completo o professor deve ter disponível para a implementação do trabalho computadores em número maior ou igual à metade dos alunos de cada turma, pois propomos que os alunos agrupem-se em duplas. Nos computadores deve estar instalado o programa GeoGebra que não terá qualquer custo à escola, pois ele é livre. Se a escola disponibilizar de internet o professor ou técnico do laboratório de informática pode baixar o programa pelo *site* $http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/$. Se a escola não possuir internet, há uma versão de instalação em computadores sem conexão. O programa GeoGebra também tem versões para *tablets* e sistema *LINUX*.

Além dos materiais já citados, necessitamos alguns conhecimentos prévios em relação ao círculo e geometria do Ensino Fundamental. Se o professor acreditar que os alunos possam não se lembrar desses assuntos, sugerimos compor nas turmas um glossário ou resumos dos conteúdos necessários como pré-requisitos.

Antes de cada atividade, disponibilizamos os pré-requisitos em tópicos para melhor esclarecer o professor que desejar implementar o nosso trabalho.

3.4 Recomendações metodológicas

Depois de cada atividade, inserimos dicas ao professor, relativas às atividades específicas que são recomendações para o bom andamento do trabalho. A seguir colocamos recomendações gerais para a implementação de qualquer uma das atividades propostas nesse trabalho.

★ Se os alunos possuírem domínio do GeoGebra, as atividades podem ser realizadas em menor tempo que o estipulado.

★ Recomendamos que as atividades sejam executadas pelos estudantes em dupla. Assim, o número de computadores necessários diminui e as funções de cada um da dupla podem ser específicas. Um aluno pode ficar responsável pela manipulação no GeoGebra e o outro encarregado de ler as instruções e fazer os registros requisitados. O importante é que ambos discutam sobre as perguntas e consigam chegar a um acordo quanto à conclusão.

★ Cada atividade é dividida em partes. Também recomendamos que o professor as entregue separadamente. Por exemplo, só entregue a segunda parte após a primeira estar concluída. Diversas vezes, isso será absolutamente necessário, pois a parte seguinte pode conter as respostas da parte anterior.

★ O professor deve acompanhar todo o tempo o trabalho dos alunos, mesmo que eles não tenham dúvidas, nem peçam ajuda. O professor é extremamente responsável pelo ritmo da execução das atividades.

★ Recomendamos aos alunos com mais habilidades no GeoGebra ajudar os demais. A escolha das duplas pode influenciar o resultado do trabalho.

★ A geometria dinâmica do GeoGebra embasou nossa proposta. Os alunos, quase todo tempo, devem mover os objetos construídos e observar as relações entre eles. O professor deve recomendar aos alunos basearem suas conclusões após vários movimentos, não apenas em um ou dois.

★ Recomendamos, ainda, oferecer aos estudantes uma fonte de pesquisa sobre Geometria, especialmente sobre círculo, do Ensino Fundamental. Mesmo se a escola não possuir internet, o professor pode disponibilizar livros, ou sugerir que cada turma construa um glossário de termos geométricos básicos. Dessa forma, estamos incentivando e ensinando aos alunos que em Matemática também há pesquisa.

★ Toda vez que as instruções pedirem ao aluno para abrir um novo arquivo, peça para ele salvar o que foi feito anteriormente.

★ Devido às duplas trabalharem independentes umas das outras e cada uma ter ritmos distintos, assim como, nem todos chegarem às conclusões devidas, faz-se necessário uma conclusão dos conteúdos e seus respectivos objetivos. O professor pode propôr uma discussão com a turma inteira, indicar uma leitura ou um vídeo, ou ainda que façam seus próprios vídeos relacionando as atividades com a teoria do assunto baseada também em pesquisa. Isso pode constituir um meio de avaliar os alunos e ainda empregar outros recursos tecnológicos que tanto lhes são familiares.

★ Se os estudantes trabalharem com seus próprios computadores, *tablets*, ou celulares é indicado que o GeoGebra já esteja instalado.

3.5 Dificuldades previstas

Comentamos na Introdução que nossa proposta requer muito mais envolvimento, tanto dos professores, quanto dos alunos, devido ao domínio do *software* GeoGebra, além do conteúdo propriamente dito. O professor deve conhecê-los profundamente e ainda relacioná-los. Acreditamos que em pouco tempo o professor esteja plenamente capacitado para isso. Em relação aos alunos, na implementação pode haver certa dificuldade se os alunos gostarem de aulas expositivas, a ponto de resistirem à mudança. Como o público alvo são jovens, esperamos que essas dificuldades não ocorram. Mesmo que haja algum desconforto inicial, esse é inevitável, pois nenhum paradigma é quebrado, relacionamos às aulas expositivas, sem pelo menos um pouco de suor, mesmo que no sentido figurado.

4 Atividades Propostas e Sugestões de Soluções

Apresentamos as atividades sugeridas para o estudo do círculo para alunos de Ensino Médio. Dividimos os conteúdos normalmente trabalhados em sala de aula em três atividades, as quais podem ser ministradas separadamente, conforme a necessidade do professor e da ementa da disciplina em sua escola. Lembramos que ao invés de usar o termo circunferência usaremos o termo círculo com o mesmo significado, pois é o termo utilizado pelo GeoGebra. As atividades abordam os assuntos: a definição do círculo e sua equação reduzida; a posição relativa entre ponto e círculo e a posição relativa entre reta e círculo.

Parece inacreditável que após décadas do desenvolvimento tecnológico computacional estejamos ainda tentando implementar de modo efetivo ferramentas computacionais na escola e a quebra do paradigma tradicional de ministrar aulas. Segundo Miskulin e Junior (2007):

> Com o avanço da ciência e tecnologia, por meio de pesquisas no campo da inteligência artificial produzindo robôs interativos e pesquisas sobre realidade virtual, torna-se inconcebível que a Educação seja tratada de forma tradicional. Sabe-se que o desenvolvimento tecnológico proporciona uma nova dimensão que transcende os paradigmas ultrapassados do ensino tradicional,[...]. Essa nova dimensão prioriza um novo conhecimento, um conhecimento que considera o desenvolvimento do pensamento reflexivo e criativo como aspecto fundamental da cognição humana.

Tentamos, com as atividades aqui propostas, fugir dos meios tradicionais de ensino, buscando propiciar aos alunos a construção do conhecimento reflexivo. Propomos atividades que abordam o conteúdo mencionado propriamente dito e sugerem como trabalhar esses conteúdos de maneira diferenciada, sem apenas expor os conceitos. Não tratamos de problemas geradores, exercícios para introduzir, fixar ou revisar os conceitos. Visamos os conceitos principalmente, todavia propomos, por vezes, alguns exercícios de fixação. A nossa abordagem procura que o aluno chegue às conclusões devidas de maneira autônoma, embora sob supervisão e orientação fundamentais do professor. O objetivo diferencial da proposta é desenvolver a autonomia do aluno, tornando-o corresponsável pelo processo pedagógico. Os alunos devem seguir o roteiro descrito nestas atividades de maneira independente. Os roteiros são instruções, formando uma lista de procedimentos para o aluno executar e chegar ao objetivo desejado, seja manipulando o GeoGebra ou esboçando seu raciocínio na própria folha de papel.

O professor que acreditar no potencial dos alunos, que eles devem deixar de aprender por processos passivos, que quer desenvolver capacidades necessárias ao perfil de profissionais no mercado de trabalho atual, já argumentadas neste trabalho, pode acreditar na presente proposta.

Existe a necessidade de o professor estar dispostos, muito mais do que se fosse ministrar uma aula expositiva. Também porque, segundo Borba e Penteado (2010) o professor que utiliza tecnologias digitais deve estar apto para o imprevisível, então devemos nos preparar no sentido de uma maior familiaridade com o *software*, além do conhecimento matemático-teórico relacionado ao programa. O professor ainda necessita, neste contexto, de constante atualização e aceitar as experiências e contribuições que os alunos têm a dar.

Para cada tópico trabalhado, expomos a atividade juntamente com a sua resolução. Cada atividade possui um quadro de dicas para que o professor evite as respostas diretas dos alunos, possibilitando aos mesmos chegar às próprias descobertas.

4.1 Atividade - Definição e equação reduzida do círculo

Objetivos:
► Compreensão da equação reduzida do círculo e significado dos parâmetros desta equação.
► Obtenção da equação reduzida do círculo.
► Resolução de problemas a partir das atividades.
Pré-requisitos:
► Definição de círculo.
► As ferramentas básicas do GeoGebra.
Material necessário:
► Equipamento que tenha instalado o *software GeoGebra*.
► Folha de atividades para o aluno.
► Livros de Geometria para pesquisa que contenham a definição de círculo ou o glossário feito pelos alunos.
Tempo necessário: Uma hora-aula.

Parte 1 - Definição de círculo

1. Inicialize o programa GeoGebra.
2. Habilite a malha.
3. Marque um ponto A, no primeiro quadrante. Prefira coordenadas inteiras.
4. Deixe o ponto A fixo.
5. Faça pelo ponto A um segmento de comprimento fixo. Escolha o comprimento. O outro extremo do segmento será o ponto B.
6. Mude a cor do ponto B.
7. Habilite o rastro do ponto B.
8. Mova o segmento AB ou a extremidade B. Ou ainda, anime o ponto B. Para animar o ponto B clique com o botão direito do *mouse* no ponto e na caixa auxiliar selecione Animar.
9. Qual curva é traçada pelo rastro? Solução: Círculo. A Figura 1 mostra como seria a animação antes de completar uma volta.

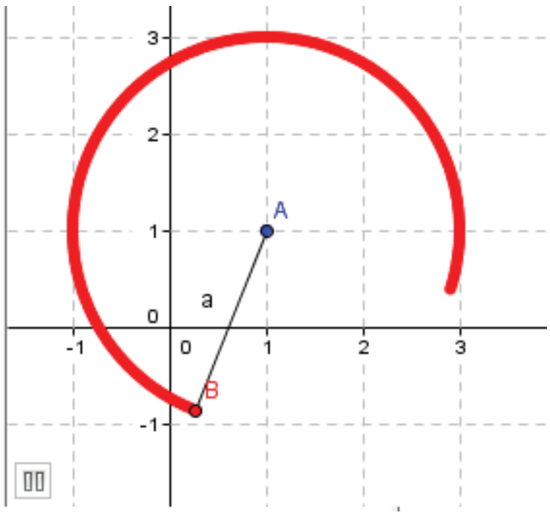

Figura 1: Rastro animado do ponto B

10. Faça um círculo com a ferramenta Círculo dados Centro e um de seus Pontos. Centro em A e um de seus pontos B.
11. Amplie a figura aproximando uma parte do círculo.
12. Mova novamente o ponto B.
13. O rastro do ponto B coincide com o círculo?
(X) Sim ( ) Não
14. Por quê? Solução: Sim, porque o comprimento do segmento é fixo, logo cada ponto do rastro tem a mesma distância ao ponto A, ou seja, cada ponto do rastro pertence ao círculo.
15. No item 13: Se sua resposta foi negativa, pesquise a definição de círculo ou circunferência e verifique se o comprimento do segmento realmente está fixo, voltando a este item. Se foi afirmativa, responda as questões abaixo:

(a) O que representa o ponto A para o círculo? Solução: O seu centro.

(b) O que representa o segmento AB para o círculo? Solução: O seu raio.

Parte 2 - Equação reduzida do círculo

1. Abra um novo arquivo ou apague tudo o que está na Janela de Visualização.

2. Habilite a malha.

3. Faça um círculo usando a ferramenta Círculo dados Centro e Um de Seus Pontos, de forma que ele esteja contido no 1º quadrante do plano cartesiano.

4. Faça um segmento de extremidades em A e B.

5. Observe a equação gerada pelo GeoGebra na Janela de Álgebra relativa a esse círculo.

6. Copie a equação aqui. Solução: Um exemplo, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$.
   Observação
   (a) Chamamos esse tipo de equação de equação reduzida do círculo.
   (b) Nesta equação, além das variáveis x e y e dos expoentes, aparecem três números, os chamaremos de parâmetros. A equação reduzida do círculo pode ser escrita na forma: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$.

7. Mova o ponto A, passando por todos os quadrantes. Também mova o ponto B até conseguir responder:
   (a) O parâmetro c pode ser negativo?
   ( ) Sim (X) Não
   (b) Os parâmetros a e b:
      i. São sempre negativos? ( ) Sim (X) Não
      ii. Podem ter sinais contrários?
      (X) Sim ( ) Não

8. Mova o ponto B para apenas o raio do círculo mudar. Faça vários movimentos.
   (a) Quais parâmetros na equação se alteram?
      i. Parâmetro a: ( ) Sim (X) Não
      ii. Parâmetro b: ( ) Sim (X) Não
      iii. Parâmetro c: (X) Sim ( ) Não
   (b) Observe o parâmetro c e a medida do segmento AB na Janela de Álgebra. Responda:
      i. O parâmetro c é o raio do círculo?
      ( ) Sim (X) Não
      ii. O parâmetro c é o diâmetro do círculo?
      ( ) Sim (X) Não
      iii. Caso sua resposta tenha sido afirmativa a algum dos dois itens anteriores, mova o ponto B de maneira que o raio assuma valores diferentes de 1 e diferentes de 2 e observe o parâmetro c. Escolha pelo menos dois valores para o raio.
      Solução: Na Figura 2 usamos o raio 5.

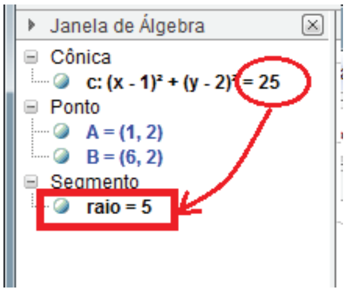

Figura 2: Um exemplo relacionando o raio do círculo e o parâmetro c

   (c) O que é o parâmetro c, que relação ele tem com o raio? Solução: O parâmetro c é o raio ao quadrado.

9. Mova o círculo de maneira que o raio **NÃO** mude. Arraste o centro do círculo ou a linha do mesmo. Faça vários movimentos, comece com o centro do círculo pertencente ao 1º quadrante e vá alternando os quadrantes.
   (a) Quais parâmetros na equação se alteram?
      i. Parâmetro a: (X) Sim ( ) Não
      ii. Parâmetro b: (X) Sim ( ) Não
      iii. Parâmetro c: ( ) Sim (X) Não
   (b) Observe as coordenadas do ponto A e os parâmetros a e b, ao mesmo tempo em que move o círculo (sem alterar o raio). Preste atenção ao quadrante a que pertence o ponto A e o sinal de suas coordenadas. Uma solução: Na Figura 3 destacamos a abscissa do centro e o parâmetro a em vermelho e a ordenada do centro e o parâmetro b em verde.

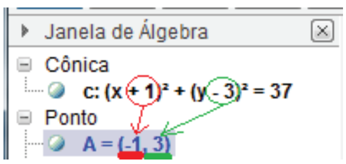

Figura 3: Um exemplo relacionando o centro do círculo A e os parâmetros a e b

i. Quando o parâmetro a é positivo? Solução: Abscissa do A pertence ao 1º ou 4º quadrante. Ou: Quando a abscissa do A é positiva.

ii. Quando o parâmetro a é negativo? Solução: Abscissa do A pertence ao 2º ou 3º quadrante. Ou: Quando a abscissa do A é negativa.

iii. Quando o parâmetro b é positivo? Solução: Ordenada do A pertence ao 1º ou 2º quadrante. Ou: Quando a ordenada do A é positiva.

iv. Quando o parâmetro b é negativo? Solução: Ordenada do A pertence ao 3º ou 4º quadrante. Ou: Quando a ordenada do A é negativa.

(c) O que representa o parâmetro a da equação do círculo? Solução: A abscissa do A, centro do círculo.

(d) O que representa o parâmetro b da equação do círculo? Solução: A ordenada do A, centro do círculo.

10. O que significam as variáveis x e y na equação do círculo? Dica: lembre do significado das variáveis na equação de uma reta. Solução: Representam todos os infinitos pontos $P(x,y)$ do plano que pertencem ao círculo.

11. Escreva a equação reduzida do círculo de centro $C(x_c,y_c)$ e de raio r:
Solução: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$.

Parte 3 - Exercícios

Resolva os exercícios a seguir no caderno. No desenvolvimento dos exercícios os argumentos devem ser algébricos e não baseados somente nas construções do GeoGebra.

Exercício 1. Responda as perguntas abaixo, em relação ao círculo de centro em $C(1,-2)$ e raio $r=3$:

(a) Qual a equação reduzida desse círculo? $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

(b) O ponto $A(4,-2)$ pertence ao círculo? E o ponto $B(-2,-4)$?
Solução: A: $(4-1)^2+(-2+2)^2=9+0=9$. Verifica a equação, logo A pertence ao círculo.
B: $(-2-1)^2+(-4+2)^2=9+4=13\neq 9$
Não verifica a equação, logo B não pertence ao círculo.

Exercício 2. Dentre as equações abaixo, indique quais representam círculos. Em caso afirmativo, determine o centro e o raio do mesmo, caso contrário, justifique.

(a) $(x+3)^2+(y-1)^2=1$ Solução: Sim, $C(-3,1)$ e $r=1$.

(b) $(x-1)^2-(y+5)^2=16$ Solução: Não, os "quadrados" estão subtraindo um do outro e não somando. Se o aluno inserir esta equação no GeoGebra ele identificará a curva como uma hipérbole.

(c) $(x-1)^2+(y+4)^2=6$ Solução: Sim, $C(1,-4)$ e $r=\sqrt{6}$.

(d) $(x-3)^2+(y-1)^2+5=0$ Solução: Não, subtraindo 5 unidades de ambos os membros da equação, obtém-se $(x-3)^2+(y-1)^2=-5$. Assim, pela equação reduzida do círculo teríamos $r^2=-5$ e nenhum número real r satisfaz essa equação. Ou seja, não existe raio e sem raio não existe círculo. Se o aluno inserir esta equação no GeoGebra ele identificará a representação gráfica da equação como o conjunto vazio.

Sugestão Insira as equações no GeoGebra e confira os resultados.

Exercício 3. (ENEM - 2013) Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x,y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos I, II, III, IV e V, como se segue:

I – é a circunferência de equação $x^2+y^2=9$;

II – é a parábola de equação $y=-x^2-1$, com x variando de -1 a 1;

III – é o quadrado formado pelos vértices $(-2,1)$, $(-1,1)$, $(-1,2)$ e $(-2,2)$;

IV – é o quadrado formado pelos vértices (1,1), (2,1), (2,2) e (1,2);

V – é o ponto (0,0).

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento cada, obtendo uma Figura. Qual das alternativa na Figura 4 foi desenhada pelo professor?
Solução: Os conjuntos III, IV e V não se alteram nas figuras, então o que determina a resposta certa são os conjuntos I e II. O conjunto I é o círculo centrado na origem de raio 3. Logo, ficamos entre as alternativas c), d) e e). O conjunto II é uma parábola com a concavidade para baixo, logo, ficamos entre as alternativas d) e e). Agora, a interseção da parábola com o eixo y é o ponto $(0,-1)$. Portanto, a resposta correta é a letra e).

Exercício 4. (Desafio) Podemos utilizar os recursos da Geometria Analítica para resolver problemas puramente geométricos. Para isso devemos satisfazer as condições do problema numa disposição conveniente do plano cartesiano. Por exemplo, para verificar: Se um triângulo está inscrito num círculo e o maior lado do triângulo é

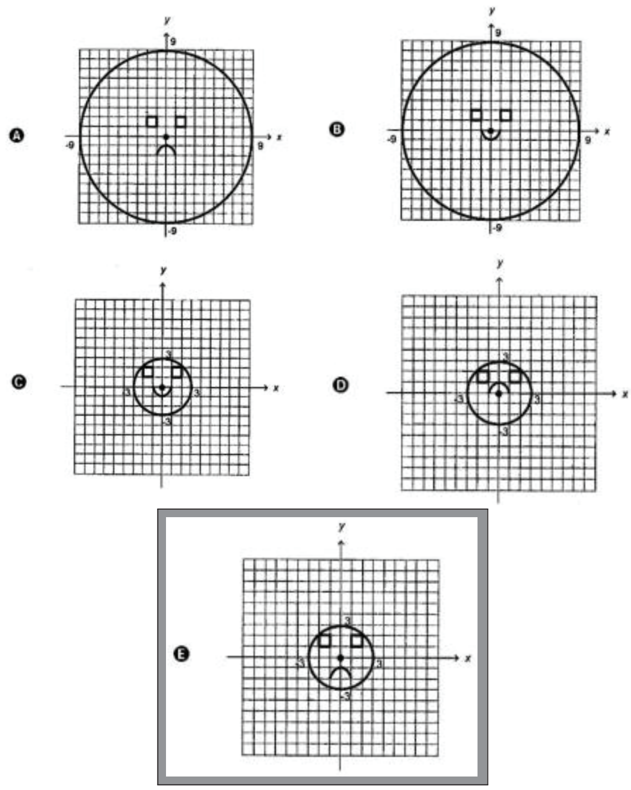

Figura 4: Alternativas da questão do ENEM

um diâmetro do círculo, então esse triângulo é retângulo, podemos pensar num círculo que esteja centrado na origem do plano cartesiano, de raio r e diâmetro contido no eixo ox. AB é o diâmetro do círculo, C é um ponto qualquer do círculo, como na Figura 5. Responda:

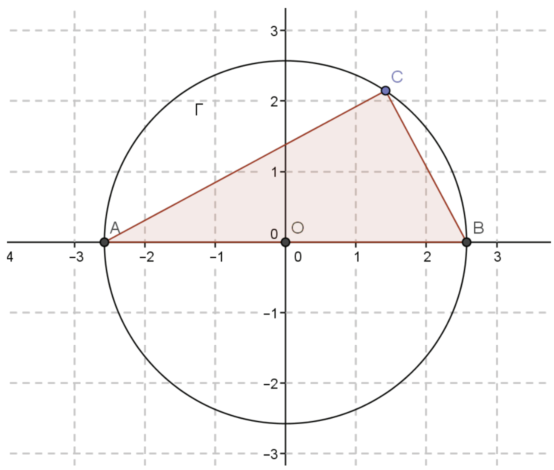

Figura 5: Desafio - Exercício 4

(a) Qual famoso teorema conhecemos da Geometria está relacionado aos triângulos retângulos? Solução: Teorema de Pitágoras. Um triângulo é retângulo se, e somente se a soma dos quadrados da medida dos catetos é igual a medida da hipotenusa ao quadrado.

(b) Na Geometria Analítica, como calculamos a medida dos lados de um triângulo? Solução: Calculando a distância entre dois pontos, no caso os vértices do triângulo.

(c) Se um ponto pertence ao círculo que sentença ele deve satisfazer? Solução: A equação do círculo, substituindo as variáveis pelas coordenadas dos pontos.

(d) Agora com a Figura 5 e as respostas das perguntas anteriores, prove: Se um triângulo está inscrito num círculo e o maior lado do triângulo é um diâmetro do círculo, então esse triângulo é retângulo. Solução: Considere os pontos $A(-r,0)$, $B(r,0)$ e $C(x,y)$. Como o ponto C pertence ao círculo sabemos que $x^2+y^2=r^2$, que é a equação do círculo de centro em $O(0,0)$ e raio r. Por sua vez, queremos mostrar que ABC é retângulo em B, para isso vamos verificar se ABC satisfaz o Teorema de Pitágoras, que diz, usando a notação de distâncias[8], que $d^2(A,B)=d^2(C,A)+d^2(C,B)$. Sabemos calcular distâncias e consequentemente seus quadrados: $d^2(A,B)=(2r)^2=4r^2$, pois sabemos que AB é um diâmetro do círculo.
Usando a fórmula da distância entre dois pontos: $d^2(C,A)=(x+r)^2+y^2$ e $d^2(C,B)=(x-r)^2+y^2$. Vamos mostrar que $d^2(C,A)+d^2(C,B)=d^2(A,B)$, de fato:

$$\begin{aligned}
&d^2(C,A)+d^2(C,B)=\\
&=[(x+r)^2+y^2]+[(x-r)^2+y^2]\\
&=(x^2+2xr+r^2+y^2)+(x^2-2xr+r^2+y^2)\\
&=2x^2+2y^2+2r^2=2(x^2+y^2)+2r^2\\
&=2(r^2)+2r^2=4r^2=d^2(A,B).
\end{aligned}$$

[8] $d(A,B)$ é a distância entre os pontos A e B

Dicas para o professor
✓ Pergunte aos alunos se a equação do círculo lhes lembra alguma fórmula estudada na Geometria Analítica. Essa resposta facilitará a compreensão da demonstração da equação reduzida no fechamento dos conteúdos.
✓ Ressalte a importância do significado das variáveis na equação do círculo. Se esse significado foi construído para as equações das retas, o aluno realizará as atividades no tempo previsto.
✓ Possivelmente as duplas não consigam completar o desafio. Nesse caso, recomende aos alunos resolvê-lo em casa. Se algum aluno conseguir, este pode explicar seus argumentos aos demais.
✓ Incentive o aluno a entender como a mediatriz pode ajudar nos problemas envolvendo círculos. Isso pode ser feito durante o estudo das retas.

4.2 Atividade - Posição relativa entre ponto e círculo

Esta atividade pode ser realizada em bem menos que uma hora aula. Dessa forma pode ser dividida com outra atividade para encerrar o tempo de um período. Os exercícios recomendados nos mostram como o assunto pode ser relacionado com a realidade e com os interesses dos alunos.

Objetivos:
▶ Dedução do critério para determinar posição relativa entre ponto e círculo.
▶ Resolução de problemas relacionados.
Pré-requisitos:
▶ Definição de círculo.
▶ Ferramentas básicas do GeoGebra.
Material necessário:
▶ Equipamento que tenha instalado o *software GeoGebra*, um por dupla.
▶ Folha de atividades para o aluno, uma por dupla.
Tempo necessário: 25 minutos.

Parte 1 - Critério para posição relativa entre ponto e círculo

Observação: O círculo divide o plano em duas partes, assim podemos dizer que o círculo é a fronteira entre a região interior e exterior. Dessa forma, um ponto pode estar:

i) No círculo - Um ponto pertencente a curva (linha).

ii) Na região interna - Um ponto interior ao círculo.

iii) Na região externa - Um ponto exterior ao círculo.

Para determinar um meio de como descobrir se um ponto pertence ao círculo, a sua região interior ou exterior, execute as seguintes instruções no GeoGebra:

1. Defina um círculo usando Centro e Um de Seus Pontos. Procure valores inteiros para as coordenadas dos pontos e medida do raio.

2. Renomeie o centro do círculo para C.

3. Faça um segmento que liga o centro do círculo e o ponto B, que pertence a ele. Será o segmento CB.

4. Observe a medida do segmento CB na Janela de Álgebra.

5. A medida do segmento CB representa o que para o círculo? Solução: Representa o raio do círculo.

6. Que conteúdo de Geometria Analítica se relaciona com o cálculo da medida de um segmento? Solução: Cálculo da distância entre dois pontos.

7. Calcule a distância do ponto C ao ponto B.

   Observação: A equação reduzida do círculo nos informa o centro C e o raio r do círculo diretamente.

8. Lembre-se da definição de círculo e complete: Um ponto P, do plano, pertence a um círculo se, e só se: Solução: $d(C,P) = r$.

9. Agora insira um ponto A, que esteja na região externa do círculo.

10. Faça um segmento ligando o ponto A ao centro C do círculo: segmento CA. Calcule a distância entre A e C.

11. Mova o ponto A, sem deixar de pertencer à região exterior do círculo. Observe o valor da distância $\overline{CA}$[9] e compare com o valor da distância $\overline{CB}$. Solução: Fizemos uma simulação, exibida na Figura 6. Inserimos nela os valores que devemos comparar.

12. Pelo resultado do item anterior, complete: Um ponto P, do plano, é exterior ao círculo se, e só se: $d(C,P) > r$

13. Mova o ponto A para que esteja na região interna do círculo. Mova o ponto A, sem deixar de pertencer à região interior do círculo. Observe o valor

[9] A notação usada pelo GeoGebra difere da utilizada nos livros didáticos, em que $\overline{CA}$ seria escrito como $d(C,A)$. Para distância entre ponto e reta a notação também difere. O GeoGebra mostraria $\overline{Pr}$ para distância do ponto P à reta r e nos livros didáticos apareceria $d(P,r)$.

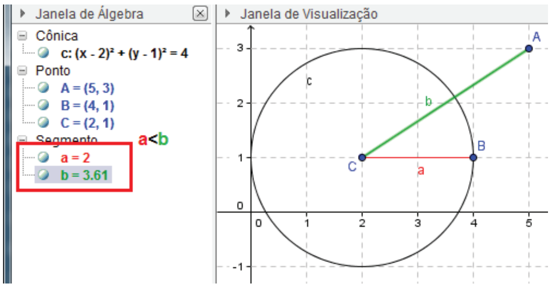

Figura 6: Um exemplo de construção para o item 11

da distância $\overline{CA}$ compare com o valor da distância $\overline{CB}$. Solução: Fizemos uma simulação, exibida na Figura 7. Inserimos nela os valores que devemos comparar.

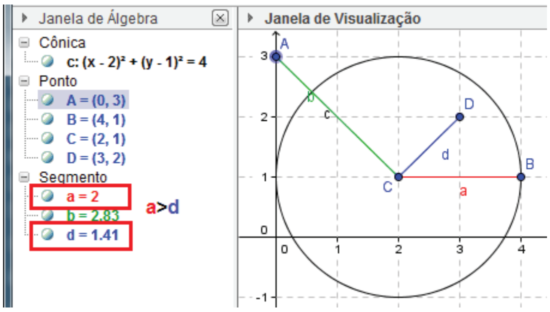

Figura 7: Um exemplo de construção para o item 13

14. Pelo resultado do item anterior, complete: Um ponto P, do plano, é interior ao círculo se, e só se: $d(C,P) < r$.

Parte 2 - Resumo dos critérios da posição relativa entre ponto e círculo

1. Preencha o Quadro 1 com os resultados da parte 1.

Quadro 1: Critérios para determinar a posição relativa entre ponto e círculo

Posição relativa	Critério adotado
P pertence ao círculo	$d(C,P) = r$
P exterior ao círculo	$d(C,P) > r$
P interior ao círculo	$d(C,P) < r$

2. Qual sequência de procedimentos deve ser adotada para determinar a posição relativa de um ponto $P(x_p,y_p)$ e um círculo de equação $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$? Listamos os procedimentos necessários para responder a esta pergunta, contudo embaralhados. São eles:

Comparar a distância $d(C,P)$ com o raio r.
Determinar o centro C e o raio r do círculo.
Concluir qual a posição relativa.
Calcular a distância do ponto ao centro: $d(P,C)$.

Organize na ordem adequada, determinando os passos a seguir:

Passo 1 Solução: Determinar o centro C e o raio r do círculo.

Passo 2 Solução: Calcular a distância do ponto ao centro: $d(P,C)$.

Passo 3 Solução: Comparar a distância $d(C,P)$ com o raio r.

Passo 4 Solução: Concluir qual a posição relativa.

Parte 3 - Exercícios

1. Desenvolva no seu caderno. Determine algebricamente a que região do plano determinado pelo círculo $\Gamma : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$ estão os pontos $A(0,0)$, $B(0,2)$, $D(4,3)$ e $E(6,-3)$. Solução: $C(3,-1)$ e $r = \sqrt{13}$
Sabendo como calcular a distância entre dois pontos $A(x_a,y_a)$ e $B(x_b,y_b)$:
$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$, façamos:
$d(A,C) = \sqrt{(0-3)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{10} < r \leftrightarrow A$ é interior a Γ
$d(B,C) = \sqrt{(0-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{18} > r \leftrightarrow B$ é exterior a Γ
$d(D,C) = \sqrt{(4-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17} > r \leftrightarrow D$ é exterior a Γ
$d(E,C) = \sqrt{(6-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{13} = r \leftrightarrow B \in \Gamma$

Observação: Os exercícios podem ser conferidos com a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro do GeoGebra, embora algebricamente tenhamos o resultado exato e no GeoGebra o resultado com apenas duas casas decimais após a vírgula.

2. O círculo central da Figura 8, construída no GeoGebra, possui equação $\Gamma : x^2 + y^2 = 81$ em que a linha de meio de campo relaciona-se com o eixo oy e a bola no momento inicial do jogo fica na origem do plano cartesiano. Neste contexto, os jogadores Jonelson e Wanderson do time Esporte Clube Várzea Seca foram designados para ocupar a posição em cima da linha do círculo. Verifique se eles realmente ocuparam a posição correta. Em caso contrário, determine a posição dos jogadores em relação ao círculo central, assim como a posição do árbitro. Considere que os pontos $J(-7,6)$, $W(-8,-4)$ e $A(4,6)$ representam, respectivamente, as posições de Jonelson, Wanderson e o árbitro no começo do jogo.

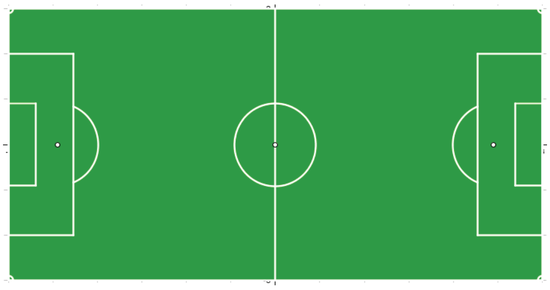

Figura 8: Campo de Futebol

Solução: $C(0,0)$ e $r = 9$
$d(J,C) = \sqrt{(-7-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{85} > r \leftrightarrow J$ é exterior a Γ
Ou seja, Jonelson não está na posição correta, está na região exterior do círculo.
$d(W,C) = \sqrt{(-8-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{80} < r \leftrightarrow W$ é interior a Γ
Ou seja, Wanderson não está na posição correta, está na região interior do círculo.
$d(A,C) = \sqrt{(4-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{52} < r \leftrightarrow A$ é interior a Γ
Ou seja, o árbitro está na região interior do círculo.

3. Um controlador de tráfego aéreo militar vê em seu radar dois aviões não identificados. A tela do radar é formada por quatro círculos concêntricos, inseridos num plano cartesiano, em que o centro dos círculos é a posição da torre de controle. As equações destes círculos são: $\Gamma_1 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 100$, $\Gamma_2 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 144$, $\Gamma_3 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 196$ e $\Gamma_4 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 256$, como mostra a Figura 9. Os procedimentos de defesa adotados são:

   (a) Se um avião entrar na região da coroa circular formada por Γ_3 e Γ_4 é pedida sua identificação.

   (b) Se um avião, ainda não identificado, entrar na região da coroa circular formada por Γ_2 e Γ_3 é avisado dos procedimentos de interceptação e abate.

   (c) Se um avião, ainda não identificado, entrar na região da coroa circular formada por Γ_1 e Γ_2 é acompanhado por dois caças enviados pela base militar.

   (d) Se um avião, ainda não identificado, entrar na região interna do círculo Γ_1 ele é abatido.

   (e) Se um avião, ainda não identificado, estiver exatamente sobre um dos círculos o procedimento mais brando entre as regiões fronteiriças é adotado.

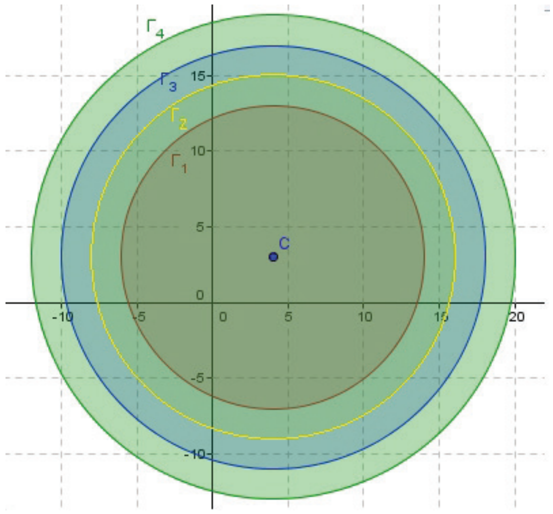

Figura 9: Radar

Neste momento os aviões não identificados estão nas coordenadas $A(10,-5)$ e $B(-7,-4)$. Quais procedimentos de defesa devem ser adotados? Justifique sua resposta.
Solução: $C(4,3)$, $r_1 = 10$, $r_2 = 12$, $r_3 = 14$ e $r_4 = 16$
$d(A,C) = \sqrt{(10-4)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{100} = 10 = r_1 \leftrightarrow A \in \Gamma_1$ O avião A é acompanhado pelos caças, pois é região fronteiriça e este é o procedimento mais brando. $d(B,C) = \sqrt{170} \leftrightarrow r_2 < d(B,C) < r_3 \leftrightarrow B$ pertence a coroa circular formada por Γ_2 e Γ_3, então é apenas avisado dos procedimentos de interceptação e abate.

Dicas para o professor
✓ Para o item 6 da parte 1 liste no quadro todos os conteúdos de Geometria Analítica vistos até o momento com a ajuda dos alunos.
✓ Reforce a definição de círculo no início da aula, se puder, com textos alternativos equivalentes a definição trabalhada.
✓ O item 6 da parte 1 parece nada ter a ver com os objetivos da atividade, porém relacionam-se com os itens 8, 12 e 14. Já que anteriormente viu-se a fórmula da distância entre dois pontos, tornando o critério de posição relativa entre ponto e círculo muito prático.

4.3 Atividade - Posição relativa entre reta e círculo

Através desta atividade, pretendemos que os alunos obtenham os critérios para determinação da posição relativa entre uma reta e um círculo.

Objetivos:
▶ Dedução do critério para determinar posição relativa entre reta e círculo.
▶ Resolução de problemas relacionados.
Pré-requisitos:
▶ Definição de círculo.
▶ Definição de distância entre dois objetos.
▶ Definição e fórmula da distância entre ponto e reta.
▶ Ferramentas básicas do GeoGebra.
Material necessário:
▶ Equipamento que tenha instalado o *software GeoGebra*, um por dupla.
▶ Folha de atividades para o aluno, uma por dupla.
Tempo necessário: 25 minutos.

Parte 1 - Posição relativa entre reta e círculo

1. No caderno, desenhe as três possibilidades de posição entre círculo e reta. Solução: Na Figura 10 encontra-se o esboço das três posições relativas: reta secante ao círculo, reta azul; reta tangente ao círculo, reta verde e reta exterior ao círculo, reta laranja.

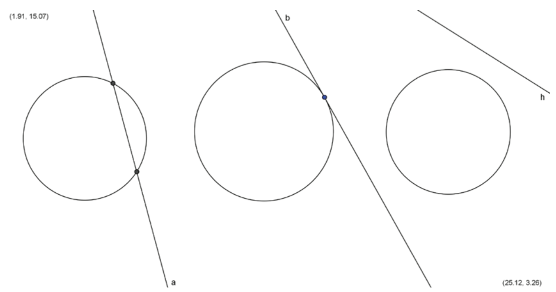

Figura 10: Posições Relativas entre reta e círculo

2. O número de interseções das retas com o círculo definiria um critério para determinar qual posição relativa existe entre uma reta e um círculo?
(X) Sim ( ) Não. Justifique. Solução: Porque é uma relação biunívoca, só há um número de pontos de interseção para cada posição relativa.

3. Para determinar os pontos comuns ao círculo e a reta, algebricamente, o que teria que ser resolvido? Solução: Sistema de equações.

4. Obtenha a posição relativa entre a reta s e o círculo Γ, cujas equações são : $s : 2x - 3y + 8 = 0$ e $\Gamma : (x-5)^2 + (y-9)^2 = 5$.
Solução: Como o sistema não é linear só podemos resolvê-lo por substituição.

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-9)^2 = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$$

Substituímos $x = \dfrac{3y-8}{2}$ na equação do círculo, ficamos com a expressão:
$13y^2 - 180y + 628 = 0$, cujo $\Delta = -256$, logo a equação não tem solução real. Dessa forma, o sistema não possui solução real, ou seja, a reta e o círculo não se interseccionam, portanto s é exterior à Γ.

Observação: Podemos verificar a posição relativa no GeoGebra fazendo a interseção entre a reta e o círculo.

Parte 2 - Outro critério para determinar a posição entre reta e círculo

No GeoGebra:

1. Faça um círculo usando a ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos.
2. Renomeie o centro do círculo para C.
3. Determine o segmento CB e calcule a distância entre C e B.
4. O que a medida do segmento CB representa para o círculo? Solução: A medida do seu raio.
5. Faça uma reta a, qualquer por dois pontos A e D, desde que a reta não passe pelo centro do círculo.
6. Obtenha a reta b, perpendicular a reta a, passando pelo centro do Círculo.
7. Obtenha o ponto E, de intersecção entre as retas a e b.
8. Obtenha o segmento CE, de extremos no centro do círculo e na interseção das retas.
9. Esconda a reta b.
10. Por construção, fizemos o segmento CE perpendicular à reta a. O segmento CE é o menor caminho que liga o centro à reta a? Solução: Sim. O menor caminho entre um ponto e uma reta é o segmento de reta que liga o ponto à reta e é perpendicular a ele. Queremos chegar no conceito de distância entre ponto e reta.
11. Então, o que a medida do segmento CE representa em relação ao ponto C e à reta a? Solução: Representa a distância do ponto C à reta a.
12. Calcule a distância entre o ponto C e a reta a.
13. Mova a reta a comparando as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$.
14. Mova a reta a de maneira que ela seja EXTERIOR ao círculo. Observe e compare as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$. Solução: Apresentamos uma simulação na Figura 11. Observe na Janela de Álgebra o destaque para os segmentos que pedimos para comparar.

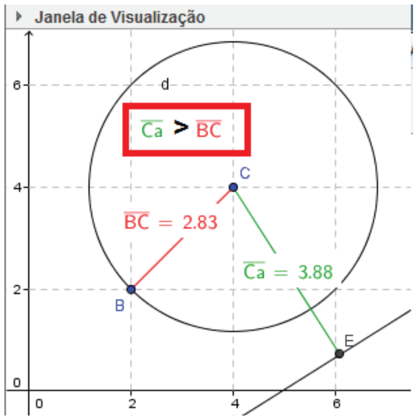

Figura 11: Um exemplo de construção para o item 14

15. Para generalizar os resultados: Considere os itens 4, 11 e 14 e complete: Uma reta s é exterior ao círculo Γ de centro C e raio r se, e somente se: $d(C,s) > r$.

16. Mova a reta a de maneira que ela seja TANGENTE ao círculo. Observe e compare as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$. Solução: Apresentamos uma simulação na Figura 12. Observe na Janela de Álgebra o destaque para as distâncias que pedimos para comparar.

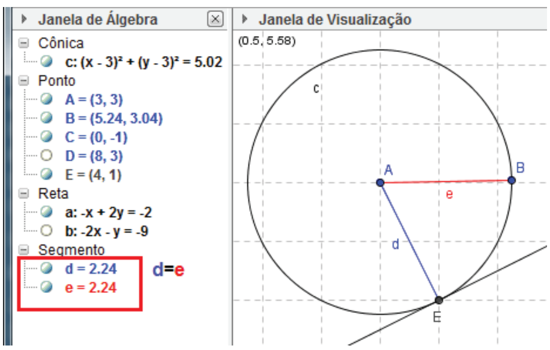

Figura 12: Um exemplo de construção para o item 16

17. Para generalizar os resultados: Considere os itens 4, 11 e 16 e complete: A reta s é tangente ao círculo Γ de centro C e raio r se, e somente se: $d(C,s) = r$.

18. Mova a reta a de maneira que ela seja SECANTE ao círculo. Observe e compare as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$. Solução: Apresentamos uma simulação na Figura 13. Observe na Janela de Álgebra o destaque para distâncias que pedimos para comparar.

19. Para generalizar os resultados: Considere os itens 4, 11 e 18 e complete: A reta s é secante ao círculo Γ de centro C e raio r se, e somente se: $d(C,s) < r$.

Parte 3 - Conclusão e Exercícios

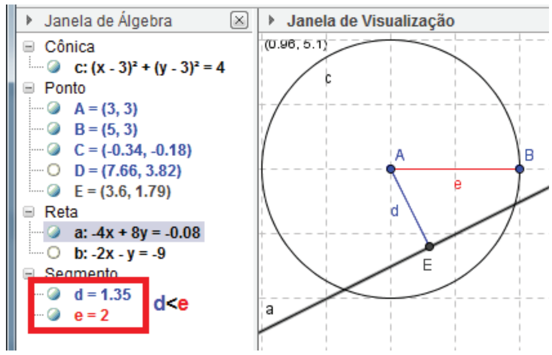

Figura 13: Um exemplo de construção para o item 18

1. Preencha o Quadro 2 com os resultados da parte 2.

Quadro 2: Critérios para determinar a posição relativa entre reta e círculo

Posição Relativa	Critério adotado
s exterior ao círculo	$d(C,s) > r$
s tangente ao círculo	$d(C,s) = r$
s secante ao círculo	$d(C,s) < r$

2. **Exercício:** Considere o círculo Γ de equação: $\Gamma : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ e as retas de equação $a : x - 15y + 105 = 0$, $b : x + y - 4 = 0$, $s : 3x - 4y - 20 = 0$ e $h : 6x + 5y + 28 = 0$. Determine a posição relativa entre as retas a, b, s e h em relação ao círculo. Solução: $C(1,2)$ e $r = 5$ Usaremos a fórmula da distância entre o ponto $P(x_p,y_p)$ e a reta $s : mx + ny + k = 0$
$d(s,P) = \dfrac{|mx_p + ny_p + k|}{\sqrt{m^2+n^2}}$
$d(a,C) = \dfrac{|1 - 15 \times 2 + 105|}{\sqrt{1^2 + (-15)^2}} = \dfrac{76}{\sqrt{226}} > r \leftrightarrow$ A reta a é exterior à Γ.
A $d(a,C)$ é um valor muito próximo do raio $r = 5$. O aluno que fizer a construção no GeoGebra pode pensar que a reta é tangente ao círculo. Isso é proposital, pois não podemos basear nossas conclusões em um esboço, mesmo que bem feito pelo GeoGebra.
$d(b,C) = \dfrac{|1+2-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} < r \leftrightarrow$ A reta b é secante à Γ.
$d(s,C) = \dfrac{|3 \times 1 - 4 \times 2 - 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{25}{\sqrt{25}} = 5 = r \leftrightarrow$ A reta s é tangente à Γ.
$d(h,C) = \dfrac{|6 \times 1 + 5 \times 2 + 28|}{\sqrt{6^2+5^2}} = \dfrac{44}{\sqrt{61}} > r \leftrightarrow$ A reta h é exterior à Γ.

Observação: O aluno pode verificar este exercício digitando as equações da reta e do círculo na barra de Entrada do GeoGebra. Retificando em seguida o centro do círculo: usando a ferramenta Ponto Médio ou Centro, ou inserindo o ponto conhecido já que temos a equação reduzida do círculo. Em seguida podemos calcular a distância do centro à reta e verificar o critério da posição relativa.

3. **Desafio** Na Figura 14 a reta t é tangente ao círculo Γ, de centro C, pertencente ao eixo ox, e raio 7. A equação da reta é $t: \ y = -\frac{7}{24}x + \frac{7}{2}$. P é o ponto de interseção da reta t e o eixo ox e A é ponto de interseção de Γ e t. Nessas condições, determine a equação do círculo Γ. Solução: A reta

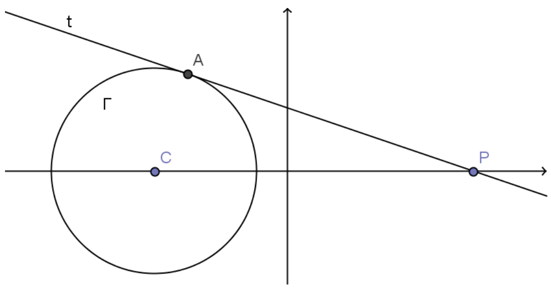

Figura 14: Desafio - item 3

t, sendo tangente a Γ, acarreta: $d(A,C) = r$ e que o segmento AC é perpendicular à reta t. Consequentemente, o triângulo PAC é retângulo, reto em A. A tangente do ângulo $\angle CPA$ só difere do coeficiente angular da reta t pelo sinal, pois são suplementares. Assim $tan(\angle CPA) = \frac{7}{24} = \frac{7}{AP}$. Obtemos $AP = d(A,P) = 24$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo PAC, encontramos $\overline{CP} = d(C,P) = 25$. Sabemos também as coordenadas do ponto P, pois é raiz da reta. $P(12,0)$ e assim $\overline{OP} = d(O,P) = 12$. Como $d(C,P) = d(C,O) + d(O,P)$, temos $d(C,O) = 13$. Como a figura indica que o centro está à esquerda da origem do plano cartesiano, encontramos $C(-13,0)$ e finalmente a equação de Γ: $(x+13)^2 + y^2 = 49$.
Observação: O aluno pode verificar este desafio no GeoGebra.

(a) Digitar a equação da reta t na barra de Entrada.

(b) Em seguida inserir um ponto que pertença ao eixo x e que esteja à esquerda da origem, como na Figura 14.

(c) Renomear este ponto para C, será o centro do círculo.

(d) Obter um círculo com centro C e raio $r = 7$.

(e) Determinar a interseção da reta com o círculo e calcular a distância de C à reta.

(f) A princípio o círculo não está na posição certa. Mover o centro C até a distância $\overline{Ct}$ ser coerente com as condições do enunciado.

Dicas para o professor
✓ Provavelmente os alunos conheçam a posição da reta tangente pelo seu nome. Os nomes não estão indicados juntamente com a atividade para não induzir os alunos. Recomende que eles anotem o nome das outras posições: reta secante e reta exterior ao círculo.
✓ No item 4 da parte 1, se o professor já trabalhou com interpretação geométrica de sistemas de equações ou foi assunto de anos anteriores na sua escola, cite como dica: o assunto já foi visto.
✓ No Ensino Médio não ensinamos o aluno a resolver sistemas não lineares, eles podem ser resolvidos por substituição. O que importa, no caso é saber o número de soluções e não a solução em si.
✓ O segmento CE do item 10 da parte 2 representa a distância entre ponto e reta, assim é fundamental que na introdução da Geometria Analítica tenha definido-se distância para responder à pergunta deste item: Distância entre dois objetos é a medida do menor caminho que os une. Relacione a construção com a definição de distância entre ponto e reta.
✓ Se o aluno não conseguir resolver o desafio do item 3 da parte 3 em aula, indique-o como tarefa para casa.

5 Relato da aplicação das atividades

O IFRS - Campus Rio Grande na modalidade Integrado possui seis cursos no seu quadro dos quais somos responsáveis por cinco de suas turmas de 3º ano, que são Refrigeração e Climatização, Informática para Internet, Geoprocessamento, Automação Industrial e Fabricação Mecânica. As turmas são definidas por curso. Escolhemos, porém, apenas três das cinco turmas para aplicar as atividades, a fim de comparar o rendimento dos estudantes. O 4º bimestre é reservado ao estudo de Geometria Analítica. No IFRS - Campus Rio Grande a carga horária semanal de Matemática consta de um encontro de 120 minutos. Situação atípica em relação a maioria dos estabelecimentos de ensino. Devido a problemas de calendário durante o ano, destinamos apenas três encontros para o estudo do círculo. Os conteúdos ministrados costumam ser: equações do círculo, método de completar quadrados para transformar a equação geral em reduzida, reconhecimento de um círculo dada a equação completa de 2º grau a duas variáveis, posições relativas entre: ponto e círculo, reta e círculo e entre dois círculos. Devido ao tempo e ainda a necessidade de introduzir o GeoGebra teríamos que excluir algo da lista. Optamos por inserir todos os conteúdos nos três dias de atividades e distribuir o que é essencial no início de cada atividade, prevendo o estudante que não tivesse tempo de fazer tudo, ao menos teria feito a parte essencial. Neste trabalho, mostramos três das sete atividades aplicadas.

5.1 Pesquisa prévia com os alunos

Investigamos diversos aspectos sobre o trabalho antes de ser aplicado com os alunos, pois tínhamos dúvidas sobre, principalmente, o conhecimento prévio do aluno sobre Geometria e círculo do Ensino Fundamental. Investigamos da mesma forma a opinião dos estudantes sobre o emprego de ferramentas computacionais em aulas de disciplinas de formação geral, porque sabemos da resistência de alguns cursos que trabalham constantemente em laboratórios de informática e ficam exauridos com esse tipo de atividade. Outro fator pesquisado foi o nível de conhecimento dos discentes sobre o GeoGebra, mesmo empregando o *software* ao longo do ano e sabidamente aplicado por outros professores de Matemática nos anos anteriores. A investigação foi feita na forma de questionário, aplicado em todas as turmas. Conseguimos a partir dos resultados, decidir em quais turmas seria implementado o trabalho com o GeoGebra e consequentemente àquelas que assumiram o papel de turmas controle.

5.2 Aplicação das atividades propostas

Organizamos os alunos em duplas e cada um da dupla ficou responsável por levar um computador. Instruímos a eles trazerem computador com o GeoGebra instalado e também já terem o primeiro contato com o programa em casa. Indicamos alguns *links* de vídeos tutoriais, para isso. Recomendamos, que durante as aulas, um dos integrantes da dupla ficasse responsável pela manipulação no GeoGebra, quando fosse utilizado e o outro, responsável pela leitura das instruções e anotações devidas.

No início da primeira atividade discutimos sobre o uso dos termos circunferência e círculo. Seriam usados indistintamente com a tendência do emprego mais frequente do termo círculo. Explicamos que muitos autores não fazem a distinção habitual usada pelos alunos e que o próprio GeoGebra adota o termo círculo. Entregamos as atividades de cada dia na sua íntegra.

Descreveremos as atividades aplicadas comentando-as de modo geral. Elas se assemelham ao que foi proposto na seção anterior, por isso não as transcreveremos nesta análise. É importante ressaltar que as atividades foram executadas e a partir da análise dos resultados foram reformuladas para a proposta didática sobre o estudo do círculo, objetivo deste trabalho. Os comentários visam esclarecer o que motivou as alterações feitas.

5.2.1 Exploração do GeoGebra e suas funções principais

Em sala de aula, fizemos uma pequena explanação no início da atividade usando o projetor multimídia. Acrescentamos a explicação das ferramentas Mover e Mover Janela de Visualização e também a relação entre a Janela de Visualização e a Janela de Álgebra. Em seguida, em forma de instruções sequenciais, instruímos os alunos a utilizarem várias ferramentas do GeoGebra. As mais simples: Ponto, Reta, digitar coordenadas e equações na caixa de Entrada, Círculos dados Centro e Um de seus Pontos, dados Centro e Raio, dados Três Pontos, obter Interseção de Dois Objetos, calcular Ângulos, definir Polígono, alterar a aparência de objetos, entre outros itens, sem finalidade específica. Destinamos a esta etapa não mais que 10 minutos.

5.2.2 Definição de círculo

Orientamos uma construção extremamente simples: criar um segmento de comprimento fixo em que uma das extremidades também é fixa e a outra com cor diferenciada e rastro habilitado. Ao mover a extremidade possível, o rastro traça um círculo. Perguntamos aos alunos se esse traço realmente era um círculo.

Como atividade inicial, todas as duplas a executaram com êxito. Analisando os resultados, dezessete duplas responderam sim e justificaram pela distância do ponto A ao ponto B não mudar, ou pelo comprimento do segmento ser fixo, como bem explicado por uma dupla: "Sim, porque todos os pontos têm a mesma distância de A."

5.2.3 Equação do círculo

Pedimos aos alunos construírem um círculo e observar sua equação na Janela de Álgebra. Com os movimentos permitidos pelo GeoGebra, orientamos a fazer modificações no raio, nas coordenadas do centro e perceber o que ocorria com a equação. Esta etapa tem por objetivo reconhecer os parâmetros presentes na equação do círculo. O termo independente da equação foi o primeiro a ser descoberto. Muito rapidamente associaram ao raio, embora não perceberam a relação indireta, pois usando raio $r = 1$ o aluno poderia pensar que o parâmetro era o próprio raio e usando raio $r = 2$ poderia pensar em diâmetro. Neste caso, instruímos a usar outros raios, de preferência, com números inteiros e a confusão se desfez. Já a associação das coordenadas do centro não foi tão rápida. Orientamos, então, o aluno a observar as coordenadas do centro na Janela de Álgebra e observar os dois primeiros parâmetros. A dica foi bastante válida, todavia a relação do sinal não ficou tão evidente.

Ao final desta etapa, dezesseis duplas concluíram devidamente a relação de todos os coeficientes, três duplas não se expressaram com clareza, duas duplas confundiram-se apenas ao pensar no diâmetro ao invés de r^2, uma dupla acertou apenas a relação de r^2, outra dupla não conseguiu apenas esta relação e uma dupla não realizou esta etapa da atividade.

5.2.4 Explorando a equação do círculo

Tinha por objetivo exaltar a importância de conhecermos a equação de um círculo e algumas condições necessárias e suficientes para obter a equação de um círculo e seu gráfico. Pedimos aos alunos para obter um círculo usando a ferramenta Círculo definido por Três Pontos e analisar se apenas visualizando seu gráfico era possível determinar as coordenadas do centro. A princípio eles entenderam que sim, pois conseguiam posições específicas em que enxergavam o centro, por exemplo, se dois dos pontos formasse um diâmetro. Mostramos que esse seria um caso particular, mas a resposta deveria ser em qualquer caso. Lembramos o que tínhamos acabado de analisar: a equação e assim perceberam, de modo geral, que bastava observar a Janela de Álgebra e verificar os parâmetros citados na etapa anterior.

A partir do círculo determinado por três de seus pontos dezesseis duplas disseram obter as coordenadas do centro e a medida do raio a partir da equação, duas duplas usaram a ferramenta do GeoGebra Ponto Médio ou Centro, quatro duplas não conseguiram determinar as informações pedidas e duas duplas deixaram a pergunta em branco. Perguntamos a seguir, se por três pontos passa um único círculo. Dezessete duplas alegaram que sim, quatro duplas discordaram e as demais não responderam à pergunta. Questionamos ainda, se havia situação em que três pontos não definiriam um círculo. Doze duplas afirmaram que a condição é ter três pontos alinhados, quatro duplas disseram que é ter dois pontos coincidentes, sete duplas não conseguiram obter uma posição em que os três pontos não definissem um círculo e uma dupla deixou esta pergunta em branco.

Acreditamos, pelas análises feitas, que esta etapa da atividade deveria ser inserida como uma tarefa complementar e priorizar outros aspectos do círculo durante as aulas, por isso não está presente na atividade proposta neste trabalho.

5.2.5 Exercícios complementares

Colocamos alguns exercícios, mas em número excessivo. Os alunos apenas conseguiram resolver a questão 143 do ENEM 2013. Chamou atenção dos alunos, pois eles haviam participado deste exame há pouquíssimo tempo e tiveram oportunidade de analisar a questão profundamente, agora entendendo o que significava a equação do círculo. Catorze duplas conseguiram resolver a questão, duas duplas erraram e as demais deixaram em branco. O segundo exercício apenas três duplas tentaram resolver, mas não conseguiram concluí-lo, os demais deixaram em branco. O terceiro exercício apenas duas duas duplas tentaram resolvê-lo, os demais deixaram em branco. Os demais exercícios foram todos deixados em branco.

5.2.6 Posição relativa entre ponto e círculo

As turmas de Fabricação Mecânica e Geoprocessamento precisaram resolver a atividade completa para a maioria entender as condições para determinar a posição relativa entre ponto e círculo. Já a turma de Informática para a *Internet* chegou à conclusão pedida apenas relacionando a condição de um ponto pertencer ao círculo. Obtiveram de maneira bastante intuitiva a relação da distância entre o ponto e o centro do círculo em comparação com o raio do mesmo, apenas visualizando o círculo com seu centro e o segmento que liga o mesmo ao ponto. Como resolvemos separar tudo o que foi implementado em atividades menores, complementamos esta atividade inserindo um quadro com os critérios analisados e a melhor ordem dos procedimentos a executar para determinar a posição relativa de um ponto em relação a um círculo. Inserimos também exercícios com temas relacionados ao interesse dos alunos, os quais não constavam na versão original implementada aos alunos.

5.2.7 Posição relativa entre reta e círculo

Os alunos não tiveram dificuldades e compreenderam as posições relativas possíveis entre reta e círculo. Eles compreenderam que a solução do sistema com as equações do círculo e da reta, ou melhor, o número de soluções do sistema está relacionado com a posição relativa analisada, pois no bimestre anterior, trabalhamos com os sistemas de equações e a interpretação geométrica. Da mesma forma, concluíram que a distância entre o centro do círculo à reta, comparando-a com o raio é outra forma de determinar a posição relativa. Os estudantes comentaram o fato de que para determinar a posição relativa entre ponto e círculo usamos uma distância, assim como para determinar a posição relativa entre reta e círculo. Isso levou os discentes a questionarem se o critério para determinar a posição relativa entre dois círculos também dependeria de alguma distância.

6 Conclusão

Sabemos que este trabalho não responde a todas as perguntas, nem oferece uma garantia milagrosa de aprendizagem, mas é uma discussão necessária que poderá trazer muitos frutos em relação à quebra do paradigma tradicional tão arraigado nas nossas escolas e incentivar o uso das TIC em nossas salas de aula.

Através da implementação prática das atividades, percebemos o ganho relacionado ao emprego das TIC citado por Miskulin e Junior (2007): a criação de um ambiente de aprendizagem colaborativa e conhecimento compartilhado pela troca de experiências entre professor e alunos. Compartilhar talvez seja o verbo mais usado atualmente devido a diversas redes sociais das quais os jovens participam, e podemos usá-lo a favor do trabalho do professor.

Discutimos e defendemos o uso do GeoGebra, um *software* de geometria dinâmica, que possibilita a investigação matemática, através da nossa proposta. A investigação matemática é um meio em que o aluno pode observar os objetos matemáticos, levantar conjecturas, testá-las e levantar hipóteses que sirvam de argumentação definitiva para a construção do saber. Observamos serem estes alguns dos pontos diferenciais do nosso trabalho e o que o torna inovador. O potencial do uso das TIC é grande sendo limitado apenas pela nossa criatividade.

Cabe ressaltar que uma versão das atividades propostas foram aplicadas com alunos de 3º ano do Ensino Médio. Comentamos algumas das etapas do nosso trabalho, as pesquisas prévias com os alunos, a sugestão de um glossário implementado para diminuir as dificuldades originadas pela pouca habilidade com Geometria do Ensino Fundamental, três atividades propriamente ditas, devidamente resolvidas e comentadas, oferecendo ao professor que quiser implementá-las diversas dicas e orientações e, por fim, os comentários em relação ao andamento das aulas em que ministramos a presente proposta. A partir dos resultados obtidos, já promissores, as atividades foram reformuladas a fim de ultrapassar as dificuldades que ocorreram, oferecendo ao professor uma proposta de aulas diferenciadas testadas, recomendadas e devidamente fundamentadas teoricamente. As quatro atividades propostas são divididas em partes. O *software* GeoGebra cumpre papéis distintos, seja como foco principal da investigação matemática, seja como ferramenta para verificar resultados.

Percebemos a partir da análise dos questionários e dos relatórios após as atividades, como o estudo de Geometria dos nossos alunos no Ensino Fundamental foi apontado muitas vezes como falho e por isso cogitamos ser este um motivo pelo qual os mesmos não conseguem assimilar totalmente o ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio. Acreditamos que o presente trabalho ajudou a alterar concepções errôneas em relação aos fundamentos do estudo do círculo. Em geral, a avaliação dos alunos em relação às atividades propostas foi bastante positiva. Descreveram-nas como inovadoras, dinâmicas, interessantes, importantes, entre outros adjetivos. Ressaltamos que os problemas ocorridos nas primeiras turmas possibilitaram uma readequação para a aplicação das atividades na turma de Informática. Embora não tenhamos feito um estudo estatístico profundo, notamos o melhor desempenho nas notas bimestrais desta turma em relação a todas as outras.

Para o professor que estiver em dúvida sobre a implementação da nossa proposta, o incentivamos transcrevendo a opinião de um aluno sobre as atividades e o GeoGebra: "As atividades me proporcionaram um melhor entendimento da matéria de maneira mais dinâmica e fácil de compreender. Achei também um ótimo método de introduzir o GeoGebra no dia-a-dia do aluno, o auxiliando na matéria.".

Referências

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G., 2010. Informática e Educação Matemática, 4th Edition. Autêntica, Belo Horizonte.

BRASIL, 1998. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria da Educação Fundamental, Brasília. URL http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

BRASIL, 2000. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte III. Secretaria da Educação Média e Tecnológica, Brasília. URL http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/ pdf/ciencian.pdf

CETIC, dezembro 2013. Tic educação 2012 pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras. Tech. rep., Comitê Gestor da Internet no Brasil, São Paulo. URL http://cetic.br/publicacoes/2012/ tic-educacao-2012.pdf

FOLLADOR, D., 2007. Tópicos Especiais no Ensino de Matemática: Tecnologias e Tratamento da Informação. IBPEX, Curitiba.

GUEDES, P. C. C., abril 2013. Algumas aplicações do software geogebra ao ensino da geometria analítica. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática - UFES, Vitória. URL http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/ bitstream/handle/123456789/587/2011_00376_PAULO_CEZAR_CAMARGO_GUEDES.pdf?sequence=1

MICOTTI, M.C.O., 1999. O ensino e as propostas pedagógicas. In: Bicudo, M. A. V. (Ed.), Pesquisa em Educação Matemática: Concepçoes e Perspectivas. Unesp, São Paulo, pp. 153–167.

MISKULIN, R. G. S., JUNIOR, D. P., 2007. A relação entre aprendizagem significativa e aprendizagem colaborativa: um estudo de caso utilizando tic's e mapas concentuais. In: Mendes, J. R., Grando, R. C. (Eds.), Múltiplos Olhares: Matemática e produção de conhecimento. Musa, São Paulo, pp. 136–150.

PAULA, T. O., abril 2013. O ensino de geometria analítica com o uso do geogebra. Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Exatas - UFRRJ, Rio de Janeiro. URL http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/ bitstream/handle/123456789/510/2011_00405_TE% C3%93FILO_OLIVEIRA_DE_PAULA.pdf?sequence=1

PONTE, J. P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H., 2003. Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Autêntica, Belo Horizonte.

PRENSKY, M., outubro 2001. Digital natives, digital immigrants part 1. On the Horizon 9 (5), 1–6. Santaló, L. A., 1996. Matemática para não matemáticos. In: Parra, C., Saiz, I. (Eds.), Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. artmed, Porto Alegre, pp. 17–31.

SILVA, W.M.S., abril 2013. Uma abordagem dinâmica e inovadora para o ensino da geometria analítica no ensino médio. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática - UFAL, Maceió. URL http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/383/2011_00251_WELLINGTON_MANOEL_SANTOS_DA_SILVA.pdf?sequence=1

VALENTE, J. A., 1989. Questão do software: parâmetros para o desenvolvimento de software educativo. Memo (24), 1–13. URL http://www.nied.unicamp.br/ojs/index.php/memos/article/view/79/78

WERNECK, J. S., fevereiro 2013. Uso do geogebra no ensino de matemática com atividades de aplicação em geometria analítica: A circunferência. Dissertação de Mestrado, Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho. URL http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/357/2011_00223_JORGE_DA_SILVA_WERNECK.pdf?sequence=1