



Ciência e Natura

ISSN: 0100-8307

cienciaenaturarevista@gmail.com

Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

Fonseca, Julio Marinho; Wagner Pinto, Alfredo
Números Perplexos: Uma Abordagem para o Ensino Médio
Ciência e Natura, vol. 37, núm. 3, 2015, pp. 376-389
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467547643031>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica
Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

Números Perplexos: Uma Abordagem para o Ensino Médio

Perplexed numbers: An Approach for the Medium Teaching

Julio Marinho Fonseca ¹ e Alfredo Wagner Pinto ²

¹ Universidade do Estado do Amazonas, Brasil
Mestre pelo PROFMAT, polo UFAM, 2013, professor da Universidade do Estado do Amazonas,
Departamento de Matemática

² Universidade Federal do Amazonas, Brasil
Professor Doutor, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas
jcmf.pem@hotmail.com

Resumo

Na busca por disseminar o assunto entre estudantes de matemática, este artigo, recorte de uma dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT apresenta o conjunto dos números perplexos (P), tomado por analogia com os números complexos. Serão definidas as operações de adição e multiplicação dos números perplexos, no decorrer da apresentação faz-se necessário admitirmos resultados provenientes das funções hiperbólicas a fim de apresentarmos os números perplexos em sua forma exponencial. Será feita a discussão acerca da geometria do plano perplexo, incluindo a descrição dos divisores de zero deste conjunto. A forma polar de um número Perplexo será estudada situando-os nos 4 quadrantes do plano perplexo. Por fim será apresentado um quadro comparativo entre os perplexos e os complexos.

Palavras-chave: Números complexos. Números perplexos. Unidade perplexa

Abstract

In the search for disseminating the subject among mathematics students, in this article, adapted of a dissertation of Professional Master's degree in Mathematics - does PROFMAT come the group of the perplexed numbers (P), done take by analogy with the complex numbers, will the addition operations and multiplication of the perplexed numbers be defined, in elapsing of the presentation it is done necessary we admit coming results of the hyperbolic functions in order to we present the perplexed numbers in his/her exponential form. It will be made the discussion concerning the geometry of the perplexed plan, including the description of the divisors of zero of this group.. The polar form of a Perplexed number will be studied placing them in the 4 quadrants of the perplexed plan. Finally a comparative picture will be presented between the perplexed ones and the compounds.

Keywords: Complex numbers. Perplexed numbers. Perplexed unit

1 Introdução

No Ensino Médio, os alunos têm o primeiro contato formal com o corpo dos números complexos, passam a saber que $i^2 = -1$, aprendem a escrevê-los em sua forma trigonométrica. A principal justificativa para a utilização deste números neste nível está na resolução de equações polinomiais. Sabendo que os alunos do ensino médio são conhecedores da álgebra que envolve os números complexos e sabendo que o conjunto dos números perplexos possui uma álgebra análoga quanto às operações é que propomos uma abordagem do anel dos números perplexos para discentes do Ensino Médio, de maneira análoga a dos números complexos, conceituando-os como par ordenado e definindo a soma e a multiplicação neste conjunto. Outro ponto relevante neste trabalho é apresentar a unidade perplexa p . Os números perplexos foram apresentados pela primeira vez em 1919, por L. E. Dickson, e ao longo do tempo está sendo utilizado com lucrativos fins para resolver problemas físicos especialmente na teoria da relatividade. Apesar de não ser um conjunto divulgado em livros textos do nível médio, o conjunto dos números perplexos não é novo Fjelstad (1986, p. 420) apresentou um aplicação dos números perplexos para interpretar o fenômeno superluminal. Deste modo, estendeu a relatividade especial para o caso $\|v\| > c$. É importante mencionar que na literatura, os números perplexos recebem diversas nomenclaturas Ersoy (2009, p. 2) os denomina de números hiperbólicos, números espaço-tempo, split-complex numbers ou double numbers, em alguns artigos a unidade

perplexa é também chamada de unidade alucinada ou **fantasmagórica**. Este trabalho visa não só apresentar o conjunto dos números perplexos no nível médio, como também divulgar os avanços matemáticos realizados na matemática moderna, fazer conhecimento "novos" chegar ao conhecimento de futuros matemáticos.

Para fazer a abordagem dos números perplexos devemos ver a estrutura que será tomada na analogia, assim faz-se necessário descrevermos o conjunto dos números complexos, o que será feito na 1 parte do artigo. Enunciaremos as propriedades e principais resultados deste conjunto, Outro ponto, discutido nos complexos é sobre a quantidade de raízes n -ésimas da expressão $z^n = w$, bem como suas mais variadas formas de apresentação. No corpo dos complexos existe a escrita sob a forma trigonométrica, de maneira análoga buscaremos uma escrita para os números perplexos. Devidamente apresentados os números complexos passamos a discutir a estrutura dos números perplexos, o que foi feito na segunda parte, escrita especialmente para tomar o conjunto dos números perplexos análogo ao conjunto dos complexos, definindo com precisão o que tratamos por número perplexo, as operações de adição e multiplicação realizadas neste conjunto, bem como, a interpretação geométrica dessas operações. Buscamos por meio de exemplos explorarmos a escrita polar destes números. Ao final será feito uma tabela comparativa entre as duas estruturas algébricas, onde apontamos a presença de características no conjunto dos números perplexos que não

aparecem no conjunto dos complexos, nem nos reais,

2 O Corpo dos Números Complexos

A história aponta como fato crucial para a iniciativa da abordagem acerca dos números complexos, o estudo das equações do 3º grau.

De certo que equações do segundo grau com discriminante negativo não tinham solução em \mathbb{R} , e nesse ponto se encerravam as discussões, mas quando Tartaglia descobriu uma fórmula que resolvia as equações do 3º grau, e Bombelli considerou a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, e utilizou a fórmula de Tartaglia para encontrar a solução, é que os matemáticos se propuseram a fundamentar o conjunto com números onde se pudesse ter raiz quadrada de número negativo. (ROQUE, 2012, p. 172)

Leonhard Euler (1707-1783) introduziu a notação $i = \sqrt{-1}$ e identificou as raízes da equação $z^n = 1$ como os vértices de um polígono regular de n lados. Além de definir a função exponencial no conjunto dos números complexos, pela fórmula: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi quem introduziu a denominação número complexo. Em sua tese de doutorado provou o Teorema Fundamental da Álgebra, onde afirma que toda equação algébrica definida sobre \mathbb{C} admite pelo menos uma raiz. Deve-se também a Gauss a representação geométrica dos números complexos, associando as suas partes real e imaginária, respectivamente, à abscissa e à ordenada de pontos do \mathbb{R}^2 .

2.1 O corpo dos Números Complexos

Definimos o corpo dos números complexos como sendo o conjunto:

$$\mathbb{C} = \{(x, y); x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

munido das seguintes operações de adição e multiplicação: Dados $z = (x, y)$ e $w = (a, b) \in \mathbb{C}$ então: $z + w = (x + a, y + b)$ (2)

$$zw = (xa - yb, xb + ya) \quad (3)$$

Observa-se que a adição acima é simplesmente a adição de vetores em \mathbb{R}^2 enquanto que a multiplicação tem uma interpretação geométrica mais elaborada que veremos posteriormente.

O conjunto \mathbb{R}^2 com as operações acima definidas será denotado por \mathbb{C} , e seus elementos serão chamados de números complexos. O número complexo $(0,0)$ será denotado simplesmente por 0 e o número complexo $(1,0)$ por 1.

Para cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, define-se o oposto de o inverso do número complexo z :

$$-z = (-x, -y)$$

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right); z \neq 0$$

As seguintes propriedades se verificam para quaisquer z, w e $t \in \mathbb{C}$.

$$A1 \quad z + (w + t) = (z + w) + t$$

$$A2 \quad z + w = w + z$$

$$A3 \quad 0 + z = z = z + 0$$

$$A4 \quad z + (-z) = 0$$

$$M1 \quad z(wt) = (zw)t$$

$$M2 \quad zw = wz$$

$$M3 \quad z \cdot 1 = z$$

$$M4 \quad z \cdot z^{-1} = 1 \quad \forall z \neq 0$$

$$AM \quad z(w + t) = zw + zt$$

Em Iezzi, (1993, p.3) encontram-se as demonstrações das propriedades da adição e multiplicação. Dadas as operações de adição e multiplicação em

\mathbb{C} , definem-se as operações de subtração e divisão.

$$z - w = z + (-w) \quad (4)$$

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}; \forall w \neq 0 \quad (5)$$

Além disso, a potenciação também é definida de maneira usual:

$$z^0 = 1; z^n = \underbrace{z \dots z}_n \text{ e } z^{-n} = \underbrace{z^{-1} \dots z^{-1}}_n \text{ se } z \neq 0 \quad (n \geq 1) \quad (6)$$

Decorre que todas as propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para números complexos. Um conjunto no qual estão definidas uma operação de adição e uma operação de multiplicação satisfazendo as propriedades mencionadas é chamado de corpo. O número complexo $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$ será simplesmente representado por x . Note que isto está de pleno acordo com o que já fizemos com o elemento neutro $(0, 0)$ e a unidade $(1, 0)$. Assim $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, ou seja, o número -1 possui uma raiz quadrada em \mathbb{C} . O número complexo $(0, 1)$ é denominado por i e é chamado de número imaginário. Logo:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi \quad (7)$$

Esta expressão recebe o nome de forma algébrica de z . Com a forma algébrica não é necessário memorizar as definições de $z + w$ e zw dadas em (2) e (3), basta usarmos algumas propriedades da adição e da multiplicação em \mathbb{C} já apresentadas.

$$z + w = x + iy + a + bi = x + a + (y + b)i \quad (8)$$

$$zw = (x + yi)(a + bi) = xa - yb + (xb + ya)i \quad (9)$$

A forma algébrica é uma importante representação para os números complexos. Tendo a interpretação geométrica descrita abaixo:

Fixando um sistema de coordenadas no plano o complexo $z = x + yi$ é representado pelo ponto $P = (x, y)$. O ponto P é chamado de imagem do complexo z . Como a correspondência entre os complexos e suas imagens é uma bijeção, identificamos os números complexos e suas imagens por $(x, y) = x + yi$. O plano no qual representamos os complexos é chamado de plano e Argand - Gauss. (LIMA, 2010, p.161)

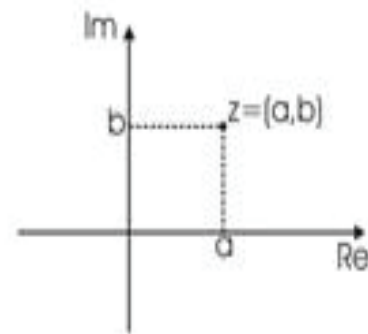


Figura 1- Plano Complexo

Da interpretação do número complexo, como par ordenado segue que dois complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$ são iguais se, e somente se, $x = a$ e $y = b$. Em particular $x + yi = 0$ então $x = y = 0$. As potências de i apresentam um comportamento na qual as potências se repetem em ciclos de período 4. De fato, $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1...$

2.2 Conjugado e Valor Absoluto

Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos a parte real e a parte imaginária de z por $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$, respectivamente. Quando $Re(z) = 0$, dizemos que z é imaginário puro.

Iezzi (1993, p. 30) faz interpretações gráficas da adição e subtração de

números complexos, definidas em (2) e (4).

Sejam, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois complexos cujas imagens geométricas são P_1 e P_2 , respectivamente. O complexo $z = z_1 + z_2$ tem afixo P tal que, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ onde \overrightarrow{OP} , $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ são vetores. Já $w = z_2 - z_1$, tem afixo Q , cujo vetor é paralelo a diagonal e possui o mesmo módulo de $\overrightarrow{P_1P_2}$.

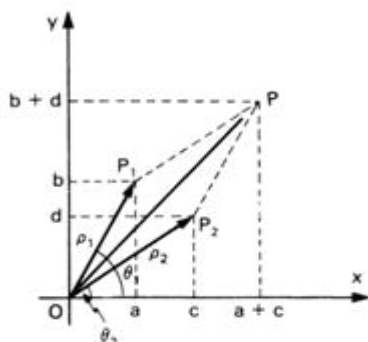


Figura 2 - soma e subtração

Dados dois números complexos w e z , a distância entre w e z é definida por $|w - z|$. Definimos o conjugado de um número complexo $z = x + yi$ como sendo o número complexo $\bar{z} = x - yi$. Graficamente, \bar{z} é o ponto do plano complexo obtido através de uma reflexão de z em torno do eixo real.

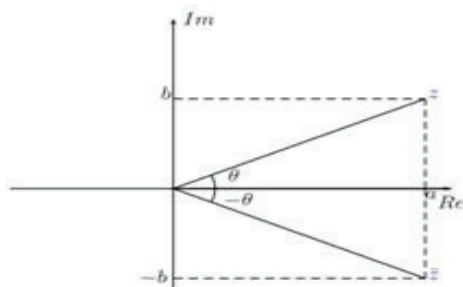


Figura 3: Conjugado de z

As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$

- $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ e $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ se $w \neq 0$
- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

d. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

e. z é imaginário puro $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

f. $\bar{z}^n = \overline{z^n}$

O valor absoluto de um número complexo $z = x + yi$ é definido por $\sqrt{x^2 + y^2}$ (10)

As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.

- $\text{Re}(z) \leq |\text{Re}(z)| \leq |z|$, $\text{Im}z \leq |\text{Im}z| \leq |z|$
- $|z|^2 = z\bar{z}$ e $|z| = |\bar{z}|$ e $|zw| = |z||w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, se $w \neq 0$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $|z + w| \geq ||z| - |w||$

Note que a desigualdade (d.) é conhecida como desigualdade triangular.

Se $z \neq 0$, da propriedade do item (b) segue que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, em particular $z^{-1} = \bar{z}$, se $|z| = 1$. A identidade mostra que z e z^{-1} se comparam graficamente: z^{-1} aponta na direção de z e tem valor absoluto $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$.

2.3 A Forma Polar

Dado o número complexo $z = x + yi \neq 0$. Seja θ_0 o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário. Temos que:

$$\cos \theta_0 = \frac{x}{|z|} \text{ e } \sin \theta_0 = \frac{y}{|z|}, \text{ logo:}$$

$$z = |z|(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0) \quad (11)$$

Portanto, é sempre possível representar z na forma $z = |z|(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ onde $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Tal representação é chamada representação polar de z . Se $\theta \in \mathbb{R}$ e satisfaz (11). Dizemos que θ é um

argumento de z . Assim θ_0 é um argumento de z , entretanto qualquer θ da forma $\theta_0 + 2k\pi$, com k inteiro, também satisfaz a forma polar, em particular z possui infinitos argumentos. Por outro lado, se θ satisfaz a forma polar então $\cos\theta_0 = \cos\theta$ e $\sin\theta_0 = \sin\theta$ o que implica $\theta_0 + 2k\pi$ para algum k inteiro. Assim o conjunto de todos os argumentos de z é dado por $\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Denotemos o único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$, como argumento principal e escrevemos $\text{Arg}(z)$. Assim temos a seguinte identidade

$$z = |z|(\cos \text{Arg} z + i \sin \text{Arg} z).$$

Sejam $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ e $w = |w|(\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$ representações polares de dois números complexos não nulos z e w . Vamos agora as representações polares para z^{-1} e zw :

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \quad (12)$$

$$z.w = |z||w|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \quad (13)$$

Esta igualdade nos dá a interpretação gráfica do produto de dois números complexos: zw tem valor absoluto $|z||w|$ e tem $\theta + \theta'$ como argumento. Sabemos também que

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

No caso em que $|z| = 1$, temos a conhecida fórmula de Moivre.

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (15)$$

De posse da estrutura dos números complexos passaremos a apresentar os números perplexos por analogia aos complexos.

3 CONJUNTO DOS NÚMEROS PERPLEXOS

No ensino médio os alunos tem conhecimento do plano cartesiano e dos números complexos, estamos propondo a apresentação do conjunto dos números perplexos que também é um conjunto do \mathbb{R}^2 com operações análogas aos complexos e que possui profundas aplicações na física moderna, para tanto definiremos as seguintes operações em \mathbb{R}^2 , onde $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$.

Adição:

$+$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada par $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ao par ordenado $u + v = (a + c, b + d) \in \mathbb{R}^2$.

Multiplicação:

\odot : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada par $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ao par ordenado $u \odot v = (ac + bd, ad + bc) \in \mathbb{R}^2$.

Igualdade:

$$u = v \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d \quad (16)$$

Note que a soma é a mesma soma para os números complexos e que o produto difere **apenas no sinal da primeira coordenada**. Ao terno $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ chamaremos de **conjunto dos números perplexos** e denotaremos por \mathbb{P} . Assim, sejam $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$ em \mathbb{P} .

Proposição 1. As seguintes propriedades da adição e multiplicação se verificam para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{P}$

$$(A1) \quad z + (w + t) = (z + w) + t$$

$$(A2) \quad z + w = w + z$$

$$(A3) \quad 0 + z = z = z + 0$$

$$(A4) \quad z + (-z) = 0$$

$$(M1) \quad z \odot (w \odot t) = (z \odot w) \odot t$$

$$(M2) \quad z \odot w = w \odot z$$

$$(M3) \quad z \odot 1 = 1 \odot z = z \text{ com } 0 \neq 1$$

$$(M4) \quad \forall z = (a_1, a_2) \in \mathbb{P}, \text{ com } a_1 \neq \pm a_2 \text{ se } z^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 - a_2^2} \right) \text{ então } z \odot z^{-1} = 1$$

$$MA \quad z \odot (w + t) = z \odot w + z \odot t$$

Para demonstração vide a dissertação Números perplexos: Uma abordagem para o ensino médio.

Chamamos de perplexo real ao número $z = (a, 0)$, para todo $a \in \mathbb{R}$. A representação afirma que todo número real é considerado um número perplexo. Seja a operação $z + (-w)$ e a representemos por $z - w$, está operação recebe o nome de subtração em \mathbb{P} .

De (M4) resulta que dado $u = (a, b)$, tal que $|a| \neq |b|$, então o inverso do número perplexo u é o número perplexo $u^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2} \right)$, deste modo consideremos um perplexo $v = (c, d)$ que possua inverso multiplicativo, e façamos $u \odot v^{-1}$ e a representemos por $\frac{u}{v}$, está operação recebe o nome de divisão em \mathbb{P} .

$$u \odot v^{-1} = \frac{u}{v} = \left(\frac{ac - bd}{c^2 - d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 - d^2} \right) \quad (17)$$

Definimos também as potências em \mathbb{P} : $\forall n \in \mathbb{N}$, façamos $u^0 = 1$ e $u^n = u \odot u^{n-1}$. Sem prejuízos para o entendimento da operação a ser utilizada, mudaremos o símbolo representativo da multiplicação, ou seja:

$$u \odot v = u \cdot v$$

3.1 Forma Algébrica de um Número Perplexo

Para os números complexos, a forma algébrica é dada por $z = x + yi$, onde $i^2 = -1$, De forma análoga denotamos por **unidade perplexa** o número $p = (0, 1)$.

Sejam a e b , números reais, então:

$$a + b = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) \quad \text{e} \\ a \cdot b = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0). \quad \text{Deste modo}$$

$$p^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1 \rightarrow p^2 = 1. \\ \text{Além de } c \cdot (a, b) = (c, 0) \cdot (a, b) = (ca, cb) = c(a, b).$$

Assim como os números complexos cada número perplexo u pode ser representado no plano cartesiano, onde no eixo das abcissas representaremos a primeira coordenada que será chamada parte real de u , e no eixo das ordenadas representaremos a segunda coordenada de u que será chamada de parte perplexa. Temos assim o plano perplexo.

Proposição 2. Todo $u = (a, b) \in \mathbb{P}$ pode ser escrito na forma $u = a + bp$.

Demonstração. Seja $u = (a, b) \in \mathbb{P}$, segue das observações acima, as quais mostram que as definições da adição e multiplicação em \mathbb{P} para números reais coincidem com a adição e multiplicação definidas em \mathbb{R} , desde modo, o número perplexo escrito como par ordenado $u = (a, b)$ pode ser escrito como:

$$u = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1) = a + bp. \quad (18)$$

De posse desta forma não precisamos memorizar as definições da adição e multiplicação. De fato, basta usar algumas propriedades da adição e da multiplicação em \mathbb{P} já apresentadas:

Se $u = a + bp$ e $v = c + dp$ são números perplexos, então:

$$u + v = (a + bp) + (c + dp) \\ = (a + c) + (b + d)p \\ u \odot v = (a + bp) \odot (c + dp) \\ = (ac + bd) + (bc + ad)p$$

Exemplo 1. Podemos observar que $p^n = 1$ para n par ou $p^n = p$, quando n é ímpar.

Exemplo 2. Dados dois números perplejos, $u = 3 + 5p$ e $v = -5 + 7p$. Vamos efetuar as seguintes operações

$$(a) u + v = (3 + 5p) + (-5 + 7p) = (3 - 5) + (5 + 7)p = -2 + 12p$$

$$(b) u \odot v = (3 + 5p)(-5 + 7p) = -15 + 21p - 25p + 35p^2 = -15 + 35 + (21 - 25)p = 20 - 4$$

$$(c) \frac{u}{v} = \frac{3(-5) - 5 \cdot 7}{(-5)^2 - 7^2} + \frac{5(-5) - 3 \cdot 7}{(-5)^2 - 7^2} p = \frac{25}{12} + \frac{23}{12} p$$

$$(d) \text{ A soma } 1 + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 1 + 1 + p + 1 + p = 3 + 2p$$

3.2 Conjugado de um Número Perplejo e o Simétrico em relação à Bissetriz dos quadrantes ímpares.

Dado um número perplejo $u = (a, b) = a + bp$, definimos a parte real e a parte perpleja de u por $Re(u) = a$ e $Per(u) = b$, respectivamente. Quando $Re(u) = 0$, dizemos que u é perplejo puro. Como um número perplejo $u = (a, b) = a + bp$ é o par ordenado (a, b) , podemos representá-lo graficamente como o ponto do plano cartesiano de abscissa a e ordenada b , ou como o vetor que liga a origem a este ponto.

Definimos $\bar{u} = (a, -b) = a - bp$ (19) como o conjugado do número perplejo u , graficamente o conjugado é obtido por uma reflexão sobre o eixo real.

Definimos o perplejo simétrico de u e denotemos por $u^* = (b, a) = b + ap$ (20), graficamente o perplejo simétrico é obtido pela reflexão de u em torno da bissetriz dos quadrantes ímpares.

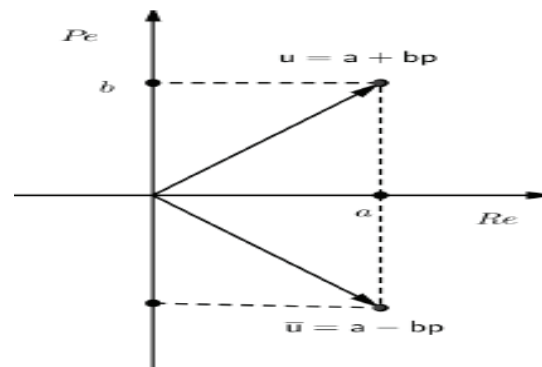


Figura 4: Imagem de \bar{u}

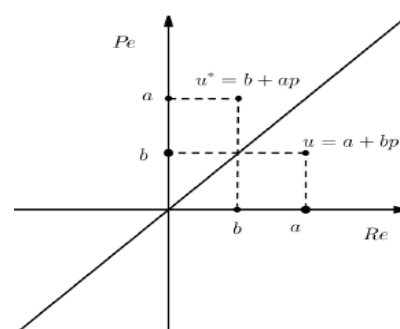


Figura 5: Imagem de u^*

Proposição 2. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer $u, v \in \mathbb{P}$.

$$a) \bar{\bar{u}} = u, \overline{a'u} = \overline{a'}\bar{u}, \overline{u \pm v} = \bar{u} \pm \bar{v} \text{ e } \overline{u \odot v} = \bar{u} \odot \bar{v}$$

$$b) \overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \text{ desde que } v \text{ admita inverso.}$$

$$c) u + \bar{u} = 2Re(u) \quad \text{e} \quad u - \bar{u} = 2pPer(u)$$

$$d) u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u = \bar{u}$$

$$e) u \text{ é um perplejo puro se, e somente se } \bar{u} = -u.$$

$$f) u \cdot \bar{u} = a^2 - b^2$$

$$g) p \cdot u = u^*$$

$$h) (u^*)^* = u, (a'u)^* = a'u^*, (u \pm v)^* = u^* \pm v^*, (u \cdot v)^* = u^* \cdot v = u \cdot v^*$$

$$i) \overline{u^*} = -\bar{u}^*$$

Exemplo 3. Para encontrarmos o simétrico do ponto $(3, 4)$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, basta tomarmos o ponto $(3, 4) = 3 + 4p$, logo

o simétrico é $(3,4)p = 3p + 4 = 4 + 3p = (4,3)$.

Exemplo 4. Dados dois números perplexos, $u = 3 + 5p$ e $v = -5 + 7p$, então $\bar{u} = 3 - 5p$ e $\bar{v} = -5 - 7p$.

$$(a) \bar{u} + u = (3 - 5p) + (3 + 5p) = 6$$

$$(b) \overline{u \odot v} = (3 - 5p)(-5 - 7p) = 20 + 4p$$

$$(c) u \odot \bar{u} = (3 + 5p)(3 - 5p) = 3^2 - 5^2 = -16$$

3.3 Divisores de zero em \mathbb{P} .

Vimos que $u \odot \bar{u} = a^2 - b^2$, logo se $|a| = |b|$ então $u \odot \bar{u} = 0$, com $u \neq 0$. Isso mostra que existem números perplexos não nulos cujo produto é igual a zero, esses números serão chamados divisores de zero.

Sejam $B_1 = \{(x, y); y = x\}$ e $B_2 = \{(x, y); y = -x\}$ as bissetrizes do plano perplexo. O Teorema a seguir mostra uma condição necessária e suficiente para um número perplexo ser divisor de zero.

Teorema 1. Dados u e v números perplexos **não nulos**, então $u \cdot v = 0$ se, e somente se, $(u, v) \in B_1 \times B_2$ ou $(u, v) \in B_2 \times B_1$.

Demonstração. Sabendo que

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (ac + bd) + (ad + bc)p = 0 + 0p \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ac + bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases} &\text{onde } \{(a, b); a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0\} \text{ e } \{(c, d); c \neq 0 \text{ ou } d \neq 0\}, \\ \text{sem perda de generalidade} & \\ \text{consideremos } a, c \neq 0, & \text{ segue que } a = \frac{-bd}{c} \text{ substituindo no sistema de} \\ \text{equações temos: } \frac{-bd^2}{c} + \frac{bc^2}{c} = 0 &\Leftrightarrow b(c^2 - d^2) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } c^2 = d^2. \text{ Se } b = 0 \text{ então } a = 0, \text{ absurdo. Portanto, } c^2 = d^2 \Leftrightarrow c = \pm d. \text{ Assim } v \in B_1 \text{ ou } B_2, \text{ e} \end{aligned}$$

$a = \mp b$ assim $u \in B_2$ ou B_1 , portanto $(u, v) \in B_1 \times B_2$ ou $(u, v) \in B_2 \times B_1$.

Por outro lado, se $(u, v) \in B_1 \times B_2$, então $a = b$ e $c = -d$, da multiplicação de números perplexos segue que $u \cdot v = (-ad + ad) + (ad - ad)p = 0 + 0p = 0$, de maneira análoga mostra-se para $(u, v) \in B_2 \times B_1$.

Proposição 4. Dado um número u perplexo qualquer, então $u \in B_1 \cup B_2$ se, e somente se, $u \cdot \bar{u} = 0$.

A partir deste momento quando $u \in B_1 \cup B_2$ diremos que **u é singular**. Decorre do teorema 1 que \mathbb{P} não é corpo, pois um perplexo singular não possui inverso, da proposição 1 concluímos que \mathbb{P} é um anel comutativo com unidade.

Exemplo 5. Dados $u = 5 + 5p$ e $v = 1 - p$ então $u \odot v = (5 + 5p) \cdot (1 - p) = (5 - 5) + (5 - 5)p = 0$.

Exemplo 6. Dados o número perplexo, $u = 3 + 3p$. Temos que $u \cdot \bar{u} = (3 - 3p)(3 + 3p) = 3^2 - 3^2 = 0$, logo u é singular.

3.4 Forma Polar

Para encontrarmos a “norma” do número perplexo u primeiramente, tomemos o produto $u \cdot \bar{u} = a^2 - b^2$, seguindo a definição dos complexos e façamos:

$$\eta(u) = u \cdot \bar{u} = a^2 - b^2 \quad (21)$$

Algumas observações são pertinentes:

$$1) \eta(p) = 0^2 - 1^2 = -1.$$

2) Aos conjuntos $\{u \in \mathbb{P}; \eta(u) = 1\}$, conjunto $\{u \in \mathbb{P}; \eta(u) = -1\}$ e conjunto $\{u \in \mathbb{P}; \eta(u) = \text{sgn}(r)r^2\}$ damos os nomes de Esferas de raio 1, de raio -1 e de raio r , respectivamente.

3) Definimos o sinal da norma.

$$\text{sgn}(r) = \begin{cases} 1, & \text{se } r \geq 0 \\ -1, & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

3.5 Função Radial

Seja a aplicação $\rho: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que a cada $u \in \mathbb{P}$ associa $\rho(u) = \sqrt{|u \cdot \bar{u}|}$.

Seja $u \in \mathbb{P}$ a norma de u é o número real $\|u\| = \text{sgn}(u \cdot \bar{u})\rho(u)$ (22)

Seguem alguns exemplos que ilustrarão a definição acima.

Exemplos 7: (a) Seja $u = 5 + 2p$ então:

$$\|u\| = \text{sgn}(5^2 - 2^2)\sqrt{|21|} = \sqrt{21}$$

b) Seja $v = 3 + 5p$ então:

$$\|u\| = \text{sgn}(3^2 - 5^2)\sqrt{|-16|} = (-1) \cdot 4 = -4$$

c) Seja $w = -3 + 2p$ então:

$$\|u\| = \text{sgn}((-3)^2 - 2^2)\sqrt{|5|} = \sqrt{5}$$

A proposição a seguir, apresenta as propriedades da norma de um número perplexo.

Proposição 5. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer u e $v \in \mathbb{P}$.

i. $\rho(u) \geq 0$

ii. $\rho(u) = 0 \Leftrightarrow u \in B_1 \cup B_2$.

iii. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow \rho(u) = 0$.

iv. $\rho(uv) = \rho(u)\rho(v)$.

v. u possui inverso multiplicativo se, e somente se, $\rho(u) > 0$.

vi. Se u possui inverso multiplicativo então $u^{-1} = \frac{\bar{u}}{u \cdot \bar{u}}$.

vii. Se u possui inverso multiplicativo então $\rho(u^{-1}) = [\rho(u)]^{-1}$.

Proposição 6. As seguintes propriedades se verificam para quaisquer u e $v \in \mathbb{P}$.

i. $\|u\| = \|\bar{u}\|$ e $\|u \cdot v\| = \|u\|\|v\|$.

ii. $\|v^{-1}\| = (\|v\|)^{-1}$, se v admite inverso multiplicativo.

iii. $\left\|\frac{u}{v}\right\| = \frac{\|u\|}{\|v\|}$, se v admite inverso multiplicativo.

Observamos que no conjunto dos números perplexos a "norma" definida não satisfaz a desigualdade triangular.

Para melhor exemplificar tomemos $u = 3 + 2p$ e $v = 1 + p$, segue que $u + v = 4 + 3p$, então: $\|u\| = \sqrt{5}$ e $\|v\| = 0$ e $\|u + v\| = \sqrt{7}$, assim $\|u + v\| > \|u\| + \|v\|$. A desigualdade $\|u + v\| \geq \left| \|u\| - \|v\| \right|$ também é falsa quando tomada à definição da "norma" nos perplexos.

3.6 Geometria do Plano Perplexo

No que segue apresentamos o plano perplexo, interpretando o conjunto $U = \{u \in \mathbb{P}; \rho(u) = 1\}$, como um hipérbole equilátera de eixos unitários, em seguida vamos escrever o número perplexo $u = a + bp$ na sua forma polar.

Se $u = a + bp$ e $\rho(u) = c \neq 0$ temos:

$$\frac{a^2}{c} - \frac{b^2}{c} = 1 \quad (23)$$

Ou seja, u está em uma hipérbole equilátera.

Façamos $U = \{u \in \mathbb{P}; \rho(u) = 1\}$, consideremos o conjunto $H_1 = \{(a, b) \in U; \text{com } a > 0 \text{ e } a > |b|\}$. Deste modo $\eta(u) = 1$ ou $\eta(u) = -1$. Se $\eta(u) = 1$, com $a > 0$ e $a > |b|$ temos $a^2 - b^2 = 1$, portanto $u \in H_1$, da trigonometria hiperbólica temos $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, como $\cosh t > 0$ e $\cosh t > |\sinh t|$, para todo t , segue que $a = \cosh t$ e $b = \sinh t$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e assim $u = \cosh t + p \sinh t$.

Tomemos $u \in \mathbb{P}, u = a + bp$. Se $\eta(u) = a^2 - b^2 > 0$ e $\rho(u) \neq 1$, com $a > 0$ e a

$> |b|$, temos $\rho(u) = \sqrt{a^2 - b^2}$, e deste modo $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) \in H_1$, novamente recorrendo a trigonometria hiperbólica $a = \rho(u) \cosh t$ e $b = \rho(u) \sinh t$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e assim $u = \rho(u)(\cosh t + p \sinh t)$ onde $\tanh t = \frac{b}{a}$, ou seja $t = \ln \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, de modo equivalente:

$$t = \ln \frac{a+b}{\rho(u)} \quad (24)$$

Desta Forma definimos a forma polar para os números perplexos u tal que $a > |b|$.

Para $a < -|b|$, definimos a forma polar de u como sendo (-1) vezes a forma polar de $-u$.

Para $b > |a|$ definimos a forma polar de u como sendo a forma polar de pu multiplicado por p

Para $b < -|a|$ definimos a forma polar de u como sendo $-p$ vezes a forma polar de $-pu$.

Exemplo 10. Vamos exemplificarmos tomando a forma polar de $u = 3 + 2\sqrt{2}p$.

Devemos encontrar a função radial $\rho(u) = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$, sabendo que $3 > 0$ e $3 > 2\sqrt{2}$, concluímos que $u \in H_1$. Para encontrar o argumento, utilizamos (23) assim temos que $t = \ln(3 + 2\sqrt{2})$ portanto a forma polar é $u = \cosh \ln(3 + 2\sqrt{2}) + p \sinh \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$H_1 = \{u \in U; a > 0 \text{ e } a > |b|\} \quad (25)$$

$$H_{-1} = \{u \in U; a < 0 \text{ e } -a > |b|\} \quad (26)$$

$$H_p = \{u \in U; b > 0 \text{ e } b > |a|\} \quad (27)$$

$$H_{-p} = \{u \in U; b < 0 \text{ e } -b > |a|\} \quad (28)$$

$$U = H_1 \cup H_{-1} \cup H_p \cup H_{-p} \quad (29)$$

Que representam os quatros ramos de uma hipérbole equilátera de eixos iguais a 1, como mostra a figura 6.

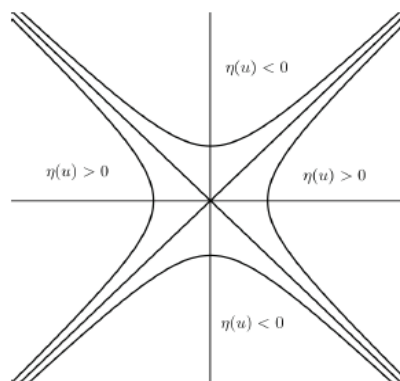


Figura 6: Representação dos possíveis sinais da "norma" no plano perplexo

A proposição 7, mostra que é possível descrever os conjuntos H_{-1}, H_p, H_{-p} , a partir de H_1

Proposição 7. $H_p = pH_1 = \{ph; h \in H_1\}$; $H_{-1} = -1H_1 = \{-h; h \in H_1\}$ e $H_{-p} = -pH_1 = \{-ph; h \in H_1\}$.

Exemplo 11. Vamos localizar os números perplexos $\frac{u}{\rho(u)}$, com $\rho(u) \neq 0$ em relação aos conjuntos H_1, H_{-1}, H_p e H_{-p}, B_1 ou B_2 .

1. $u = 3 - 2p, \eta(u) = 3^2 - (-2)^2 = 9 - 4 = 5 > 0$, logo $\rho(u) = \sqrt{5}$, como $3 > |-2|$, concluímos que $\frac{u}{\rho(u)} \in H_1$.

2. $u = -4 + 7p, \eta(u) = (-4)^2 - 7^2 = 16 - 49 = -33 < 0$, logo $\rho(u) = \sqrt{33}$, como $7 > |-4|$, concluímos que $\frac{u}{\rho(u)} \in H_p$

3. $u = 2 - 2p, \eta(u) = 2^2 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$, logo $u \in B_2$

4. $u = -3 - 3p, \eta(u) = (-3)^2 - (-3)^2 = 9 - 9 = 0$, logo $u \in B_1$

3.7 A Multiplicação na Forma Polar de Números Perplexos

Nos números complexos definimos a multiplicação através da forma polar, nos números perplexos também é possível fazer a multiplicação através da forma polar, no entanto, devemos fazer uma análise cuidadosa quanto os possíveis resultados do produto e sua localização entre os ramos hiperbólicos e as Bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares.

Consideremos os conjuntos H_1, H_{-1}, H_p e H_{-p} , B_1 ou B_2 . Seja $u \in U$, então $u = k(\cosh\theta + p\sinh\theta)$, onde $k \in \{1; -1; p; -p\}$ de acordo com sua localização entre os conjuntos H_1, H_{-1}, H_p e H_{-p} .

Caso $u \in \mathbb{P}$; $\rho(u) = 0$ então $u \in B_1$ ou B_2 e dado $v \in \mathbb{P}$ então $u.v \in B_1 \cup B_2$.

Se $u \in B_1$ então $uv \in B_1$. Se $u \in B_2$ então $u.v \in B_2$.

Sejam u e v elementos de U , escrevemos $u = k(\cosh\theta + p\sinh\theta)$ e $v = k'(\cosh\theta' + p\sinh\theta')$, onde $k, k' \in \{1; -1; p; -p\}$ então:

$$u \odot v = kk' (\cosh(\theta + \theta') + p\sinh(\theta + \theta')) \quad (30)$$

A expressão mostra que se tomarmos u e v pertencentes a H_k ; $k \in \{1; -1; p; -p\}$, o produto $u \odot v \in H_1$. De modo particular $u^{2n} \in H_1$. Para situarmos o produto de dois perplexos em U basta obtermos o produto kk' , visto que $kk' \in \{1; -1; p; -p\}$. Consideremos agora $0 < \rho(u) \neq 1$ e $0 < \rho(v) \neq 1$, pelo que foi visto anteriormente $\frac{u}{\rho(u)}, \frac{v}{\rho(v)} \in U$, com argumentos θ e θ' respectivamente, portanto:

$$u \odot v = kk' \rho(u) \rho(v) (\cosh(\theta + \theta') + p\sinh(\theta + \theta')) \quad (31)$$

Deste modo descrevemos a multiplicação dos números perplexos na forma polar.

3.8 Potenciação e Radiciação nos Perplexos

Do mesmo modo que a fórmula de Moivre é utilizada nos números complexos, utilizaremos uma versão hiperbólica da fórmula de Moivre, encontrada em Wagner (2013, p. 47), para definimos a potência de um número perplexo.

Teorema 2 (Teorema de Moivre versão perplexa). Dado $u \in \mathbb{P}$, com $\rho(u) > 0$ e θ argumento de $\frac{u}{\rho(u)}$, consideremos $n \in \mathbb{Z}$ e $k \in \{1; -1; p; -p\}$ então:

$$u^n = k^n [\rho(u)]^n (\cosh(n\theta) + p\sinh(n\theta)) \quad (32)$$

3.9 Raízes de Números Perplexos

Para motivar estudo das raízes de números perplexos, fazemos a seguinte questão: Como calcular $\sqrt[n]{k\rho(u)(\cosh\theta + p\sinh\theta)}$, ou seja, como determinar o perplexo z , tal que:

$$z^n = k\rho(u)(\cosh\theta + p\sinh\theta).$$

Vamos utilizar a versão da fórmula de Moivre para números perplexos para responder esta pergunta.

Assim, seja $z = k' \rho(z)[\cosh\alpha + p\sinh\alpha]$, pelo teorema 5, temos que: $z^n = k\rho(u)[\cosh(\theta) + p\sinh(\theta)]$ e equivalente a;

$$k' [\rho(z)]^n [\cosh n\alpha + p\sinh n\alpha] = k\rho(u)[\cosh\theta + p\sinh\theta] \quad (34)$$

Pela igualdade dos números perplexos, temos: $k'^n = k$ e $[\rho(z)]^n = \rho(u)$ e

$\tanh(\alpha) = \tanh\theta$. Para determinamos z devemos separar dois casos.

1. Se n é par então $k = 1$, assim só é possível responder a raiz se $\frac{u}{\rho(u)} \in H_1$. Neste caso $z^n = u$ terá 4 raízes, visto que $k' \in \{1; -1; p; -p\}$
2. Se n é ímpar então $k' = k$, e deste modo $z^n = u$ tem uma única raiz, onde $\rho(z) = \sqrt[n]{\rho(u)}$ e $\alpha = \frac{\theta}{n}$.

4 Considerações Finais

A segunda parte do artigo tratou os números perplexos de maneira análoga aos complexos, façamos então uma tabela comparativa entre as duas estruturas numéricas, elencando os principais resultados e propriedades apresentadas ao longo do trabalho. Vamos tomar $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ em \mathbb{R}^2 e $r > 0$. Ao tratarmos da "norma" perplexa, verificamos $\|u\|$ não pode ser tratada como uma norma, no que se diz respeito as propriedades, visto existe $u \neq 0$ com $\|u\| = 0$, além de não satisfazer a desigualdade triangular, por outro lado introduzimos a noção relativa a "norma", pois dependendo das coordenadas de um número perplexo teremos: $\|u\| > 0$, $\|u\| = 0$ ou $\|u\| < 0$, aplicações físicas para este fato encontramos em Ersoy (2009, p. 9) e Fjelstad (1982, p.).

	C	P
unidades especiais	i , tal que $i^2 = -1$	p , tal que $p^2 = 1$
Potências	$1, -1, i, -i$	$1, p$
Forma Algebrica	$u = a + bi$ e $v = c + di$	$u = a + bp$ e $v = c + dp$
$u + v$	$(a + c) + (b + d)i$	$(a + c) + (b + d)p$
$u.v$	$ac - bd + (ad + bc)i$	$ac + bd + (ad + bc)p$
$\frac{u}{v}$	$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$; $v \neq 0$	$\frac{ac-bd}{c^2-d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-d^2}p$; $c \neq \pm d$
Estrutura	Corpo	Anel comutativo com unidade
$\ u\ = r$	Círculo	Hipérbole equilátera

Figura 7: Números complexos X Números perplexos

A multiplicação destes números também deve ser prestigiada, já que, existe um aspecto relativo para o resultado da operação: é sempre possível prever a posição do produto entre os ramos hiperbólicos, ou entre as bissetrizes, algo muito semelhante à regra dos sinais em \mathbb{Z} . Mostrar conceitos novos é de fundamental importância para alunos do ensino médio, visto que neste nível a matemática parece estagnada, sem conhecimentos novos, não propomos mudar o currículo, mas sim inserir os números perplexos na forma de projetos que visam desenvolver o conhecimento logico matemático dos alunos.

Por fim, o presente artigo cumpre o papel de apresentar este conjunto chamado de números perplexos, sabendo que há muito a ser pesquisado neste conjunto, entretanto uma semente foi plantada em um campo fértil, e que futuramente o conjunto terá mais adeptos e pesquisadores.

REFERÊNCIAS

ASSIS, A. K. T., *Números Perplexos*. The Gleb Times- Jornal do Centro Acadêmico do Instituto de Física da UNICAMP, ano 1, n_ 2; pp. 11, 1994

BOROTA, N.A., et al. *Spacetime Numbers The Easy Way, Mathematics and Computer Education*, vol. 34, n_. 2, pp. 159-168, 2000.

- DOMINGUEZ, H.H., IEZZI, G., *Álgebra Moderna*, 4º ed. volume único, Atual, São Paulo, 2003.
- ERSOY, S., TOSUN, M., *The Euler-Savary Formula for One-Parameter Planar Hyperbolic Motion*. Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences Sakarya University, arXiv:1001.0138v1[math. DG], 2009.
- FERNADEZ, C.S., Jr BERNADES, N.C., *Introdução às funções de uma variável complexa*. 2º ed., Instituto de Matemática Pura e Aplica, CNPq, Rio de Janeiro, 2008.
- FJELSTAD, P., *Extending relativity via the perplex numbers*. American Journal of Physics, 54:5, pp. 416-422, 1986.
- GONÇALVES, A., FIGUEIREDO, L. M., *Álgebra 1*. vol. 3, FAPERJ, Rio de Janeiro, 2005.
- HEFEZ, A., *Curso de Álgebra*, vol. 1, 2º ed., Instituto de Matemática Pura e Aplica, CNPq, Rio de Janeiro, 1993.
- IEZZI, G., *Fundamentos de Matemática Elementar 6: Complexos, Polinômios Equações*, vol. 6, 6º Ed., Atual, São Paulo, 1993.
- LIMA, E. L., et al. *A matemática do Ensino Médio*, vol. 1, 9º ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- LIMA, E. L., *Análise Real: Função de uma variável*. vol. 1, 10º ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- LIMA, E. L., et al. *A matemática do Ensino Médio*. vol. 3, 6º ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- LIMA, E. L., *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2º ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- LEITHOLD, L., *O Cálculo com Geometria Analítica*, vol. 1, 3º ed. Habra, São Paulo, 1994
- ROQUE, T. M., PITOMBEIRA, J. B., *Tópicos de História da Matemática*, 1º ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- SOBCZYK, G., *The Hyperbolic Number Plane*. The College Mathematics Journal, n_ 26, pp.268-280, 1995.
- WAGNER, A., FONSECA, J .C . M., *O conjunto dos números perplexos: Uma abordagem para o Ensino Médio*, 2013. 73 f. Dissertação – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013.