Ciência e Natura
ISSN: 0100-8307
cienciaenaturarevista@gmail.com
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

Gomes de Melo Viol Martins, Patricia Rose
Matemática sem números: uma introdução ao estudo da Lógica
Ciência e Natura, vol. 37, núm. 3, 2015, pp. 463-473
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil

Artigo Original *DOI:10.5902/2179460X14634*

Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 463–473
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

Matemática sem números: uma introdução ao estudo da Lógica

Mathematics without Numbers: an introduction to the study of Logic

Patricia Rose Gomes de Melo Viol Martins

Universidade Estadual de Maringá"
" pattyviolmartins@hotmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta para o ensino de Lógica para o primeiro ano do ensino médio. Considerando as diversidades dos alunos, este trabalho foi elaborado por meio de uma sequência de atividades que buscam suprir as deficiências de interpretação, argumentação e raciocínio lógico provenientes de uma falsa ideia de que a Matemática só trabalha com números e contas. A proposta das atividades é tornar a aprendizagem mais significativa e ampla para alunos, na qual o papel do professor é o de mediador e o do aluno de construtor do conhecimento. Os alunos são convidados a agir, buscar e expressar suas opiniões dando sentido a sua aprendizagem e aos professores é sugerida uma reflexão sobre a sua vivência em sala de aula, incentivando e estimulando a busca por atividades diversificadas. Concluímos o trabalho apresentando quais as habilidades e competências que serão desenvolvidas e como elas poderão auxiliar no desenvolvimento de novos conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: *Raciocínio Lógico. Argumentação. Diversas Linguagens. Aprendizagem Significativa.*

Abstract

This paper presents a proposal for teaching Logic for the first year of high school. Considering the diversity of students, this study was developed through a sequence of activities to address the weaknesses of interpretation, reasoning and logical reasoning from a false idea that mathematics works only with numbers and accounts. The proposal is to make the activities more meaningful and comprehensive learning for students in which the teacher's role is that of a facilitator and the student constructor of knowledge. Students are invited to take action, seek and express their opinion by giving meaning to their learning, and teachers are suggested to reflect on their experience in the classroom, encouraging and stimulating the search for diversified activities. We conclude by presenting what skills and competencies that will be developed and how they can assist in the development of new mathematical content.

Keywords: *Logical Reasoning. Argument. Several languages. Meaningful Learning.*

submissão: 2014-06-30 Aceito: 2014-12-10

1 Introdução

No cotidiano dos professores do Ensino Médio da rede pública é natural deparar-se com problemas de raciocínio lógico e com a fragilidade da argumentação e da interpretação dos alunos. Assim também é natural ouvirmos os alunos se referindo à Matemática como sendo uma matéria sem utilização prática, que é difícil, que basta decorar, e o senso comum confere-lhe este aval.

É fato que os alunos apresentam um déficit grande em relação à Matemática, e a comunidade escolar aceita sem contestações. Isso nos faz refletir sobre a importância da disciplina e a que se deve o fracasso destes alunos.

Pensando sobre isto é que se deu a escolha deste tema, acreditando que o estudo da Lógica por meio de atividades diversas pode auxiliar o desenvolvimento dos alunos na compreensão da Matemática e da realidade que os cerca sempre visando despertar o interesse pela disciplina, de forma que ele se envolva com o seu estudo de maneira agradável.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais algumas das características da Matemática são: resolver situações-problema; desenvolver formas de raciocínio, como dedução, indução, intuição; saber argumentar sobre suas conjecturas que são importantes para que o estudante ao término do Ensino Médio possa dar continuidade aos seus estudos ou entrar no mercado de trabalho.

Para SILVEIRA(2002), o professor de matemática quer ensinar os conteúdos, avaliar e promover o aluno à série seguinte mas elaboram provas difíceis, há reprovações e os alunos se tornam inimigos da Matemática. O caráter ideal da Matemática aparece claramente com Platão que supõe a existência do mundo das ideias, ou seja, a Matemática não descobre seus objetos por observação ou experimentação, ela utiliza o pensamento.

Assim, nosso trabalho tem por finalidade desenvolver nesses estudantes uma reflexão sobre o seu pensar, levando-os ao hábito de argumentar, interpretar e socializar seus pensares. Para isso, contextualizamos os conteúdos explorando o contexto pessoal e social vivenciado pelo alunado. Por meio de um processo de reflexão, conduzido pelo professor, o aluno vai perceber que o conhecimento desenvolvido pode ser aplicado em muitas situações de seu cotidiano. Progressivamente, esse aluno vai transformando suas respostas, conclusões e saberes.

Inicialmente relatamos alguns fatos importantes da histórica da Lógica que inicia-se com Platão. Aristóteles dá continuidade sendo o responsável por escrever os primeiros grandes trabalhos de lógica, Gottfried Wilhelm Leibniz propõe o uso de símbolos para mecanizar o processo de raciocínio dedutivo, e, por fim, George Boole e Augustus De Morgan propõem as bases da lógica simbólica moderna usando as ideias de Leibniz.

No segundo capítulo apresentamos as definições e teoremas sobre lógica proposicional, que é conhecida por sua formalidade, apesar de utilizar uma linguagem simples e, tem como base o princípio do terceiro excluído, que considera que cada sentença pode receber apenas um destes valores: verdade ou falsidade.

A fim de relacionar a Lógica com situações da realidade do aluno do ensino médio, no terceiro capitulo, propomos algumas atividades em grupos, utilizando uma metodologia onde a postura do aluno é de construtor do conhecimento e do professor como mediador.

E, por fim, perante uma proposta tão desafiadora, finalizamos o trabalho explanando algumas habilidades e competências que serão desenvolvidas e que poderão auxiliar enormemente no desenvolvimento de novos conteúdos matemáticos. Portanto, acreditamos que este pode ser mais um recurso a ser explorado por professores e alunos, visando um melhor desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem.

2 Por que estudar lógica?

Seria possível aprender a pensar corretamente? O que torna o raciocínio certo ou errado? Para responder tais inquietações é que surge a Lógica, também chamada arte do raciocínio ou arte de pensar.

Atualmente quando se fala da Matemática com alunos é perceptível a dificuldade e o medo do fracasso pois, a própria sociedade já criou um preconceito e um distanciamento denominando-a de complexa e para poucos. Isso gera uma resistência nos alunos que não se preocupam em compreender a disciplina; eles perdem o interesse, a curiosidade e a confiança que são os pontos chaves para um bom desempenho.

Frente a essas dificuldades é necessária uma atitude, uma mudança de postura, tanto de professor como de aluno, para que o aprendizado se dê de forma significativa.

Aos professores compete o desenvolvimento de atividades coerentes com a capacidade dos alunos, metodologias diversificadas que despertem o interesse e a curiosidade possibilitando assim, a construção de uma ponte entre o aluno e a Matemática que os façam sentirem-se capazes de enfrentar situações problema.

SILVEIRA (2002) expõe que para Piaget existem três tipos de conhecimento: o físico, o social e o lógico-matemático. Para o desenvolvimento lógico-matemático o aluno utiliza-se da abstração reflexiva, que é a construção de relações entre os objetos que ocorre a nível mental.

Percebe-se, então, que não basta passar o conteúdo: é preciso criar discussões, esclarecer dúvidas, provocar reflexões, mostrar as facilidades, levá-los a persistência nas resoluções, transformar as aulas em uma viagem ao conhecimento motivada pela busca do saber.

Segundo o Parâmetros Curriculares Nacionais no Ensino Médio (PCNEM) – BRASIL(2000) aprender Matemática deve ser mais do que memorizar resultados desta ciência e a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.

As atividades aqui propostas têm o intuito de desenvolver nos alunos esta busca pelo aprendizado por acreditar que o desenvolvimento da argumentação e do raciocínio lógico são fundamentais para que o aluno seja construtor do seu saber e reaprenda a pensar.

3 Objetivos

Devido a globalização e informatização do mundo os objetivos de aprendizagem passaram por mudanças significativas. O cidadão deve ser capaz de interpretar, analisar criticamente, tomar decisões, resolver problemas, desenvolver conhecimentos e valores.

Segundo BRASIL(2000),, no mundo atual as exigências mudaram, é possível perceber que qualquer área requer alguma competência em Matemática e que para se tornar um cidadão critico, atuante e prudente é preciso compreender conceitos e procedimentos matemáticos.

A Matemática tem duas finalidades: formativa, pois auxilia no desenvolvimento de pensamento e aquisição de atitudes; e instrumental, pois é composta por um conjunto de técnicas e estratégias que podem auxiliar outras áreas do conhecimento.

4 Ensino por Competência

O ensino por competência, ainda é algo novo e passa por estudos mas, é um modelo de ensino que combina conhecimentos, habilidades e atitudes. Nele o aluno se torna ativo, enfrenta os problemas e aprende a superá-los. Pode-se dizer que competência não é o que se ensina e sim o que se aprende, e esta aprendizagem é continua.

O trabalho por competência se dá em projetos didáticos, situações reais que envolvam várias disciplinas, trabalhar as diversas linguagens, compreender os fenômenos, tomar decisões, construir argumentos, intervir na realidade.

Para que sejam desenvolvidas as competências é preciso considerar diversos fatores ligados ao planejamento, entre eles a escolha de temas relativos ao conteúdo específico da disciplina, a análise dos recursos de ensino e os métodos de abordagem e o cuidado com os tempos de ensino e aprendizagem.

De acordo com BRASIL(2000), os PCNEM há três conjuntos de competências: comunicar e representar; investigar e compreender; e contextualizar social ou historicamente. De forma semelhante, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) aponta cinco competências gerais: dominar diferentes linguagens, desde idiomas até representações matemáticas e artísticas; compreender processos, sejam eles sociais, naturais, culturais ou tecnológicos; diagnosticar e enfrentar problemas reais; construir argumentações; e elaborar proposições solidárias.

Desta forma, esta proposta foi desenvolvida no modelo de ensino por competências, trabalhando-se com as diversas linguagens, tomadas de decisões e construção de argumentos.

Conhecimento do latim *cognoscere* que significa ato de conhecer, é a informação ou noção adquirida pelo estudo ou experiência. Nele dois elementos são importantes: o sujeito que é o indivíduo capaz de adquirir conhecimento ou que possui a capacidade de conhecer; e o objeto é o que se pode conhecer.

Pode-se dizer que o conhecimento inclui, mas não está limitado a, descrições, hipóteses, conceitos, teorias, princípios e procedimentos que são úteis ou verdadeiros.

Ele pode ser aprendido como um processo, quando se refere a uma acumulação de teorias, ideias e conceitos onde surge como resultado desta aprendizagem; ou como um produto, que é uma atividade intelectual através da qual é feita a apreensão de algo exterior à pessoa.

A definição clássica de conhecimento, originada de Platão, diz que ele consiste de crença verdadeira e justificada. Aristóteles divide o conhecimento em três áreas: cientifica, pratica e técnica. Geralmente consideramos o conhecimento como um ato da razão, pela qual encadeamos ideias e juízos, para chegar a uma conclusão, essas etapas compõe nosso raciocínio.

Neste trabalho visamos desenvolver alguns conhecimentos, são eles: argumentação, proposição, análise de imagem, implicação, equivalência, axioma e demonstração, silogismo, dedução e indução.

Habilidade é o grau de competência de um sujeito concreto frente a um determinado objetivo, seria um indicativo de capacidade, particularmente na produção de soluções para um problema especifico.

Na área da educação, habilidade é saber fazer; é a capacidade que o indivíduo tem de realizar algo como classificar, montar, calcular, ler, observar e interpretar.

Desta forma, as habilidades que devem ser desenvolvidas por esta proposta, de acordo com os PCNEM, são:

- Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais;
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos;
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas e qualitativas;
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos;
- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional;
- Utilizar conhecimentos geométricos em espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano;
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

Ainda, há algumas habilidades especificas de cada atividade que são:

- Compreender e utilizar variáveis;
- Inter-relacionar linguagens, arte e literatura;
- Compreender a diversidade da vida;
- Compreender os diferentes pontos de vista.

Atitude é uma norma de procedimentos que leva a um determinado comportamento, é a concretização de uma intenção ou propósito. Pode-se entender como o comportamento habitual que se verifica em circunstâncias diferentes.

A proposta é a construção do conhecimento com base em diferentes estratégias, tais como situações-problema, interpretação de gravuras, análises de textos e exercícios contextualizados.

Sendo assim, pretende-se que os alunos expressem suas ideias por meio da escrita ou do diálogo, desenvolva a organização do seu raciocínio com professor e colegas.

Optou-se pelo trabalho em pequenos grupos pois, a interação com os colegas desenvolve atitudes essenciais para a formação do indivíduo e favorece uma maior participação.

O professor deve dialogar com os alunos sobre o que é trabalhar em grupo; como ele espera que eles trabalhem como podem ser as escolhas dos grupos, quais serão as normas para que o trabalho em grupo aconteça, durante as atividades como os grupos devem se portar. Deve permitir que eles questionem os pontos que os preocupam e manter uma postura confiante na capacidade dos alunos.

É importante que se planeje cada atividade e auxilie os alunos quando necessário, orientando-os a registrarem as conclusões a que chegarem e que se trabalhe com contextos práticos e com situações que não ofereçam apenas uma solução.

Tudo isso deve contribuir para que os alunos deixem de serem espectadores e tornem-se agentes no processo de aprendizagem. E o professor passa a ser um mediador e um avaliador deste processo.

Sendo assim, o professor deve assumir os seguintes papeis:

- Provedor: fornecendo as informações necessárias que os alunos não têm maturidade para desenvolver sozinhos;
- Orientador: conduz e orienta os trabalhos em sala buscando a autonomia dos alunos;
- Incentivador: estimulando, motivando-os a refletir, investigar, trocar ideias.

Diante desta nova perspectiva é importante que o professor conheça o contexto social dos alunos, para poder selecionar situações-problema do cotidiano da turma.

Por fim, o professor deve se preocupar com a formação do aluno como cidadão.

O **contrato didático** é um acordo entre aluno e professor de maneira que ambos tenham direitos e deveres, deve estar pautada por um conjunto de regras explicitas e clara onde é possível verificar as responsabilidades de cada um.

Se há a quebra das regras é necessário que haja mudanças na relação e novas configurações que surgem da ação e da reflexão do professor.

Pode-se entender, o contrato didático, como um instrumento de análise da relação professor, aluno e saber onde o saber se desenvolve se o professor estiver disposto a ensinar e o aluno a aprender.

Esta comunicação didática busca descobrir o que favorece ou impede o aluno de se desenvolver no processo de aprendizagem.

5 Atividades

Essas atividades são voltadas para os alunos do 1° ano do Ensino Médio: é proposto como primeiro conteúdo a ser ministrado pois, é preciso desmistificar que a Matemática só trabalha com números e contas. Os alunos precisam entender que a Matemática está além disso, e essas atividades vão "quebrar o gelo".

São nove atividades que da forma como foram organizadas levam o aluno, progressivamente, a construir/desenvolver os conceitos lógicos e a argumentação.

Cada atividade tem um cabeçalho com o conteúdo a ser desenvolvido, as competências, as habilidades que se pretende desenvolver e o desenvolvimento de cada uma delas.

Nas duas primeiras aulas propõe-se que seja estabelecido com os alunos um contrato de convivência. O contrato deve conter as normas de desenvolvimento dos trabalhos, as saídas dos alunos da sala, as formas de avaliação, as horas de descanso, entre outros itens. A participação dos alunos na construção do contrato de convivência é importante para que eles realmente cumpram as normas.

É proposta a construção de um portfólio de cada grupo, para que ao final eles possam analisar o seu próprio desenvolvimento ao longo das atividades e possam socializar suas aprendizagens.

<u>Atividade 1: ARGUMENTAÇÃO</u>

A proposta desta atividade é familiarizar os alunos com a lógica e mostrar que ela está presente no nosso dia-a-dia. Seu tempo de duração estimado é de 150 minutos (3 aulas).

Inicialmente é proposto que o professor simule com os alunos algumas situações em que eles utilizam a expressão "É lógico!". Por exemplo: "Se chover, não precisamos regar a horta."; "Se o filme não fosse chato, eu não teria dormido no cinema"; "Se coloca primeiro a meia e depois o sapato".

Em seguida divide-se a sala em grupos de dois a três integrantes e distribua a cada grupo a atividade. A Lógica do Cotidiano e a Lógica Matemática.

A Lógica do Cotidiano e a Lógica Matemática

MÚSICA:

"Trem das Onze"

ANDONIRAN BARBOSA

Não posso ficar
Nem mais um minutos com você
Sinto muito, amor,
Mas não pode ser
Moro em Jaçanã
Se eu perder esse trem
Que sai agora, às 11 horas,
Só amanhã de manhã
E além disso, mulher,
Tem outra coisa:
Minha mãe não dorme
Enquanto eu não chegar!
Sou filho único,
Tenho minha casa para olhar.
Não posso ficar!

QUESTIONAMENTOS:

- Você conhece essa música?
- Sabe quem foi Andoniran Barbosa?
- Quais são os motivos que justificam a afirmação: "Não posso ficar!" ?

Ao término da atividade, proponha que cada grupo apresente para a sala as suas respostas e explique a eles que:

- A argumentação na letra da música é lógica, pois relacionam de modo coerente as causas e as consequências;
- Argumentar é criar uma sequência de proposições que pretende levar a uma determinada conclusão;
- Podemos usar a lógica para verificar se uma argumentação é válida, coerente ou não;
- Mostre a eles que a lógica faz parte do seu cotidiano;
- A Lógica trata das formas de argumentação, das maneiras de encadear nosso raciocínio para justificar a partir de fatos básicos, nossas conclusões;
- A Lógica se preocupa com o que se pode ou não concluir a partir de certas informações.

Para finalizar, entregue para cada grupo uma cópia da problemática. Onde está a lógica?

ONDE ESTÁ A LÓGICA?

(ENEM/98) LEIA E RESPONDA OS TESTES ABAIXO OBSERVANDO O QUE JÁ APRENDEMOS SOBRE ARGUMENTAÇÃO

Depoimento 1:

A minha propriedade foi conseguida com muito sacrifício pelos meus antepassados. Não admito invasão. Essa gente não sabe de nada. Estão sendo manipulados pelos comunistas. Minha resposta será à bala. Esse povo tem de saber que a Constituição do Brasil garante a propriedade privada. Além disso, se esse governo quiser as minhas terras para a Reforma Agrária, terá de pagar, em dinheiro, o valor que eu quero. (Proprietário de uma Fazenda no Mato Grosso do Sul).

Depoimento 2:

Sempre lutei muito. Minha família veio para a cidade porque fui despedido quando as máquinas chegaram lá na usina. Seu moço, acontece que eu sou um homem da terra. Olho pro céu, sei quando é tempo de plantar e colher. Na cidade não fico mais. Eu quero um pedaço de terra, custe o que custar. Hoje eu sei que não estou sozinho. Aprendi que a terra tem um valor social. Ela é feita para produzir alimento. O que o homem come vem da terra. O que é duro é ver que aqueles que possuem muita terra e não depende dela para sobreviver pouco se preocupam em produzir nela. (Integrante do Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem-Terra, de Corumbá – MS)

1. A partir da leitura do Depoimento 1, os argumentos utilizados para defender a posição do proprietário de terras são:

I – A constituição do país garante o direito à propriedade privada; portanto, invadir terras é crime.

II – O MST é um movimento político controlado por partidos políticos.

III – As terras são o fruto do árduo trabalho das famílias que as possuem.

IV – Este é um problema político e depende unicamente da decisão da Justiça.

Estão corretas as proposições:

(a) I, apenas.
(b) I e IV, apenas.
(c) II e IV, apenas.
(d) I, II e III, apenas.
(e) I, III e IV, apenas

2. A partir da leitura do Depoimento 2, quais os argumentos utilizados para defender a posição de um trabalhador rural sem-terra?

I – A distribuição mais justa da terra no país está sendo resolvida, apesar de muitos ainda não terem acesso a ela.

II – A terra é para quem trabalha nela e não para quem acumula como bem material.

III – É necessário que se suprima o valor social da terra.

IV – A mecanização do campo acarreta a dispensa de mão-de-obra rural.

Estão corretas as proposições:

(a) I, apenas.
(b) II, apenas.
(c) II e IV, apenas.
(d) I, II e III, apenas.
(e) I, III e IV, apenas

Desta forma, os alunos perceberão que entre a lógica da linguagem natural (dia-a-dia) e a lógica matemática existe uma forte relação. Na Matemática afirmações das mais simples às mais complexas são provadas com afirmações verdadeiras e que os símbolos matemáticos podem ser substituídos por palavras.

Pode-se propor como tarefa que os alunos pesquisem e montem um cartaz sobre "A Lógica de Aristóteles", focando em quem foi Aristóteles e quais foram suas contribuições para a Lógica.

Atividade 2: PROPOSIÇÕES

Na atividade anterior foi sugerida a confecção de cartazes, se foram elaborados devem ser mostrados a sala explicando um pouco sobre a pesquisa que cada grupo fez e, se possível, fazer uma exposição na escola.

A proposta desta atividade é apresentar ou complementar a pesquisa sobre quem foi Aristóteles, quais foram as suas contribuições para a Lógica Matemática. Nela explica-se o que é uma proposição trabalhando a questão de verdade e falsidade, possibilitando o esclarecimento/desenvolvimento da integridade e do senso crítico.

É proposto fazer um breve relato sobre a história de Aristóteles além de explicar o conceito de proposição.

O tempo estimado é 200 minutos (4 aulas).

Uma boa metodologia de correção é a oralidade onde os alunos podem participar assiduamente e o professor media o diálogo, conduzindo-os as respostas corretas.

Para complementar esta atividade pode-se trabalhar com uma notícia e pedir aos alunos que verifiquem quais são os pontos questionáveis, criando um debate e até uma releitura da notícia. Ou ainda, sugerir a leitura do romance. As aventuras de Huckleberry Finn do escritor norte-americano Mark Twain (pseudônimo de Samuel Langhorne Clemens), nele o protagonista, amigo de Tom Sawyer, vive inúmeras aventuras pelo rio Mississippi em uma balsa, é um livro que pode entreter os alunos além de contribuir para o hábito da leitura.

Atividade 3: IMAGEM LÓGICA

Diferente das outras, a atividade Imagem Lógica tem por objetivo chamar a atenção do aluno para a construção da imagem e sensibilizá-lo para analisar os vários aspectos da figura.

É proposto que os alunos observem a litografia *Relatividade* de M. C. ESCHER e respondam algumas questões.

Cada uma das questões propostas leva a uma outra questão, exigindo do aluno atenção e concentração.

Alguns dos questionamentos que podem ser acrescentados em cada item são:

- Sabe-se onde é piso onde é parede?
- Os seres que estão de ponta cabeça não caem?
- As pessoas descem pelo mesmo lado da escada?
- É possível utilizar a mesma para descer em sentidos diferentes?
- O que são campos gravitacionais?
- É possível visualizar todos os campos gravitacionais propostos?
- O que diz a Teoria da relatividade?
- Como se pode lidar com a indiferença? Há indiferença na sala?
- As regras são diferentes no mundo digital?

O intuito é permitir que eles pesquisem na biblioteca, no computador, enfim que eles busquem as respostas das perguntas e dos questionamentos que eles próprios possam vir a ter. Novamente, o professor tem um papel muito importante de mediador do saber, ele deve conduzir os alunos no caminho correto sem responder as questões. O tempo estimado desta atividade pode variar de acordo com o interesse dos alunos.

Esta atividade trabalha a Sintaxe da Lógica Proposicional e descreve a importância de se escrever de forma clara, tomando cuidado com as ambiguidades.

Atividade 4: IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA

Nesta atividade trabalha-se com a relação de implicação e equivalência, utilizando frases rotineiras mostra-se ao aluno o que é uma implicação e em seguida questiona-o sobre a equivalência. Estima-se um tempo de duração de 150 minutos (3 aulas).

Três partes: na primeira, o professor deve questioná-los se toda vez que a primeira afirmação for verdadeira, a segunda também será; na segunda mostrar que existem várias maneiras de se dizer a mesma informação, formalizando o conceito de equivalência; na terceira conduzir a resolução dos alunos por tentativa e erro.

O intuito nesta atividade é trabalhar a Semântica dos Conectivos Proposicionais explicar, por meio da tabela-verdade, cada um dos conectivos lógicos.

Como complementação é possível fazer uma brincadeira: escolhe-se um tema geral e cada grupo escreve uma frase a respeito do tema, essas frases são colocadas em uma urna em seguida cada grupo retira uma frase e desenvolve um desafio de implicação ou equivalência para os outros grupos. Desta forma os alunos se tornam professores e desafiadores dos próprios colegas, trabalhando o respeito mútuo.

SÃO EQUIVALENTES?

LEIA COM ATENÇÃO AS FRASES:

- SE LUIZ É MÉDICO, ENTÃO ELE PODE RECEITAR UM REMÉDIO CONTRA GRIPE.
- SE HOUVER RECESSÃO, ENTÃO TEREMOS DESEMPREGO.
- SE $a = b$, ENTÃO $a + 1 = b + 1$.

OBSERVE QUE EM TODAS ESSAS FRASES TEMOS AS PALAVRAS **SE** E **ENTÃO** COLOCADAS DE FORMA QUE:

SE...
A PRIMEIRA AFIRMAÇÃO FOR VERDADEIRA,
ENTÃO...
A SEGUNDA TAMBÉM SERÁ

A SEGUNDA AFIRMAÇÃO É UMA *CONSEQUÊNCIA* DA PRIMEIRA.
A PRIMEIRA AFIRMAÇÃO *IMPLICA* A SEGUNDA, OU AINDA, A PRIMEIRA AFIRMAÇÃO É UMA *CONDIÇÃO* PARA A SEGUNDA.
VEJA ALGUMAS PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS:

Qualquer a e b, se $a > b$, então $a + 1 > b + 1$ (V)
$\forall\, a, b, \quad a > b \;\Rightarrow\; a + 1 > b + 1$ (V)

O símbolo $\Rightarrow$ indica a IMPLICAÇÃO

EQUIVALÊNCIA ENTRE PROPOSIÇÕES:
Você acha as proposições: “Ana é filha de Paulo” e “Paulo é pai de Ana”, são equivalentes?

O símbolo de equivalência é $\Leftrightarrow$ e lê-se “se e somente se”. A equivalência $A \Leftrightarrow B$ só é verdadeira se forem verdadeiras as duas implicações: $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$.

Por exemplo:

A: O polígono ABCD é um quadrado
B: O polígono ABCD é um quadrilátero
$x = 7 \Rightarrow x^2 = 49$ (V)
são equivalentes? Verifique.

VERIFIQUE SE SÃO VERDADEIRAS AS EQUIVALÊNCIAS:

- $\forall a, b \quad a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$
- $\forall x \quad x > 0 \Leftrightarrow x > 5$
- $\forall x \quad 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$

<u>Atividade 5: AXIOMA</u>

Nesta atividade o tempo estimado é de 100 minutos (2 aulas) e seu objetivo é mostrar para os alunos os axiomas e algumas demonstrações matemáticas são simples.

A proposta é desafiar os alunos a demonstrar algumas propriedades operacionais que eles já conhecem, peça que eles expliquem para a sala, questione se há outras maneiras de se demonstrar. As demonstrações ajudam os alunos a entenderem os processos operatórios e, consequentemente, diminuem o número de erros.

O professor deve propor aos alunos um desafio: explicarem de maneira clara para a sala qual é o significado das palavras demonstração, teorema e axioma. Em seguida, citar alguns axiomas que são utilizados por eles e demonstrar um teorema de maneira simples e gradativamente ir exigindo deles demonstrações bem elaboradas. Este tipo de atividade auxilia muito no desenvolvimento da argumentação e do raciocínio lógico.

AXIOMAS E DEMONSTRAÇÕES

DIZEMOS QUE, NA MATEMÁTICA, PROPOSIÇÕES SÃO LOGICAMENTE DEMONSTRADAS A PARTIR DE ALGUMAS AFIRMAÇÕES INICIAIS CONSIDERADAS VERDADEIRAS, QUE SERÃO O PONTO DE PARTIDA PARA A CONSTRUÇÃO DE UMA TEORIA.
ESSAS AFIRMAÇÕES SÃO CHAMADAS AXIOMAS OU POSTULADOS.
PARA QUE VOCÊ POSSA VER COMO ISSO FUNCIONA, VAMOS ENUNCIAR ALGUNS AXIOMAS RELATIVO AOS NÚMEROS INTEIROS E, A PARTIR DELES, DEMONSTRAR OUTRAS PROPOSIÇÕES.
CONSIDERE QUE $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ E $\boldsymbol{c}$ SÃO NÚMEROS INTEIROS.

1. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA DA ADIÇÃO: $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. ELEMENTO NEUTRO DA ADIÇÃO: $a + 0 = a$
3. EXISTÊNCIA DO ELEMENTO OPOSTO: $a + (-a) = 0$
4. PROPRIEDADE COMUTATIVA DA ADIÇÃO: $a + b = b + a$

A PARTIR DESTES QUATRO AXIOMAS, QUE ACEITAMOS COMO VERDADEIROS SEM DEMONSTRAÇÃO, PODEMOS DEMONSTRAR OUTRAS PROPRIEDADES. VEJA UMA DELAS:

DEPOIS QUE UMA PROPRIEDADE É DEMONSTRADA, ELA PODE SER UTILIZADA PARA DEMONSTRAR OUTRAS PROPRIEDADES.
VOCÊ PODE ESTAR PENSANDO: “*PARA QUE DEMONSTRAR O ÓBVIO?*”. PORQUE ESTRUTURANDO CORRETAMENTE AS BASES, TODA A MATEMÁTICA PODERÁ SER CONSTRUÍDA SOBRE ELA!

- DEMONSTRE USANDO OS AXIOMAS DADOS QUE SE $a + b = 0$, ENTÃO $a = -b$.
- PESQUISE SOBRE GUISEPPE PEANO E A HISTÓRIA DOS NÚMEROS NATURAIS.

<u>Atividade 6: SILOGISMOS</u>

O tempo estimado é de 250 minutos (5 aulas) e espera-se que o aluno desenvolva o senso crítico e já utilize uma argumentação bem elaborada.

Inicialmente o professor deve mostrar aos alunos que a Lógica não se preocupa com a verdade ou a falsidade de uma proposição isolada, ela se preocupa com as formas de apresentar uma proposição como consequência de outras.

Num primeiro momento trabalha-se o conceito de premissa e conclusão além de mostrar sua classificação. Nessa etapa os alunos são convidados a identificar em algumas frases quais são as premissas e as conclusões, já utilizando os símbolos matemáticos.

A segunda etapa, utiliza-se de um poema onde os alunos identificam quais as premissas e as conclusões, pode-se fazer um jogral onde as meninas falam as premissas e os meninos as conclusões. Em seguida é proposto o filme A lista de Schindler, direção de Steven Spielberg, que mostra um paradoxo e tendo como mote "Quem salva uma vida, salva o mundo inteiro".

É importante entender que dialética é uma discussão entre opiniões, onde a conclusão é obtida pelo argumento mais persuasivo. Ou seja, o silogismo dialético é aquele que se refere a coisas prováveis ou possíveis, que podem acontecer ou não acontecer.

Como complementação desta atividade pode-se propor um projeto interdisciplinar com a disciplina de História e Geografia com enfoque na Segunda Guerra e os campos de concentração.

Atividade 7: ARGUMENTOS VÁLIDOS

Com questões do nosso cotidiano é retomado o conceito de argumento explicando sua veracidade e falsidade. O tempo estimado é de 200 minutos (4 aulas).

Inicialmente propõe-se que os alunos analisem textos de jornais e afirmações matemáticas. Pode-se fazer uma pesquisa sobre fatos atuais instiga-los a pesquisarem sobre a veracidade dos fatos.

Em seguida é sugerido que eles usem a imaginação e coloquem-se na posição de um advogado. Neste momento seria interessante que assistissem ou simulassem um júri ou um debate. Deixe a cargo dos alunos a escolha do tema, quem é o advogado de defesa, promotor. O cargo do professor é de juiz intermediando os questionamentos.

É interessante complementar a proposta explicando o conceito de tabela-verdade, dando alguns exemplos e a utilizando para verificar se a conclusão é verdadeira.

Nesta atividade trabalha-se a Valoração e explica-se as inúmeras perspectivas a respeito da verdade, além de explicar a construção da tabela-verdade.

Atividade 8: DEDUÇÃO

Esta atividade trabalha com textos do famoso detetive Sherlock Holmes. Há a necessita de ser planejada com antecedência pois, exige a leitura do romance policial Um estudo em Vermelho escrito por Arthur Conan Dayle que relata a primeira história de Sherlock Holmes.

Inicialmente o professor dialoga com os alunos sobre dedução e propõe as atividades. Neste momento é preciso deixar que os alunos, por si só, percebam a importância de uma boa argumentação bem respaldada. Quando algum dos grupos não justificarem suas respostas, trabalhe individualmente de modo que eles compreendam a importância de uma boa argumentação. O tempo estimado desta atividade é de 100 minutos (2 aulas).

Trabalha-se neste momento as Propriedades Semânticas explanando algumas relações que podemos utilizar para deduzir se um argumento é válido ou não.

Atividade 9: INDUÇÃO

As noções básicas da prova por indução são introduzidas por meio de atividades, partindo de questões do cotidiano e generalizando com o objetivo de dar significado a esse conteúdo.

O objetivo é fazer com que os alunos percebam que podemos provar conceitos matemáticos de forma simples.

É estimado um tempo de 150 minutos (3 aulas). Inicialmente, o professor deve entregar a cada grupo a primeira folha desta atividade e dialogar com eles sobre o tema.

A MATEMÁTICA E O COTIDIANO

INDUÇÃO:

Na indução usamos o caminho inverso da dedução. Partimos de fatos particulares para conclusões gerais.

A indução é muito utilizada pelos cientistas para obter conclusões ou leis a respeito de determinado fenômeno.

Um cientista estuda repetidas vezes um fenômeno: anota dados, faz observações, etc. Depois, a partir dos fatos observados, ele tenta tirar conclusões gerais que possam ser aplicadas a fenômenos semelhantes ao estudado. *Isso é indução*.

Muitas vezes em nosso cotidiano, raciocinamos de modo indutivo. Veja:

Na feira, você experimenta uma uva: ela está azeda.

Experimenta outra, de outro cacho, e também está azeda.

O que esperar?

Que você **generalize** e conclua que as uvas estão azedas e é melhor não compra-las!

De fatos particulares você chegou a uma conclusão geral. Na matemática também utilizamos a indução para provar a validade de proposições. No entanto é preciso tomar um pouco de cuidado com as generalizações. ***Verificar a validade de uma afirmação para um grande número de casos não garante que ela sempre seja verdadeira.***

Veja um exemplo:

A expressão $n^2 - n + 41$ fornece números primos para qualquer n natural?

À primeira vista, parece que sim, pois para:

$n = 0$ e $n = 1$, obtemos o valor 41 que é primo.

$n = 2$, obtemos o valor 43 que é primo.

$n = 3$, obtemos o valor 47 que é primo e continuaremos a encontrar números primos até $n = 40$.

Para $n = 41$, a expressão resulta 1681, que *não é primo!*

Poderíamos ser levados a generalizar e tomar como verdadeira uma afirmação que nem sempre é válida.

Então, como generalizar uma afirmação em matemática, se é impossível verificar sua validade para todos os casos particulares?

Vamos mostrar como se faz isso por meio de um exemplo. Tentaremos torna-lo o mais simples possível, evitando muitos rigores matemáticos. Acompanhe:

Queremos provar que a soma dos $\boldsymbol{n}$ primeiros números naturais é igual à metade do produto de $\boldsymbol{n}$ pelo seu sucessor.

Matematicamente, vamos mostrar que:

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, onde n é um número natural qualquer diferente de zero, ou seja, $n = \{1, 2, 3, \cdots\}$

Primeiro verificamos se a igualdade $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ é válida para $n = 1$.

De fato, substituindo n por 1 temos: $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ (V)

Então assumimos que a igualdade também é verdadeira para um número genérico k.

$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$.

Consideramos essa igualdade verdadeira e a denominamos hipótese de indução.

Mostraremos agora que se ela vale para um número genérico k também vale para o seu sucessor, o número $k + 1$.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k+1).$$
$$= \frac{k\cdot(k+1)}{2} + \frac{2\cdot(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

Como k é um número natural qualquer, generalizamos a conclusão para todo número natural. Usamos a indução: do particular para o geral.

DEMONSTRE POR INDUÇÃO:

(A) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

(B) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

As demonstrações propostas trabalham com conceitos matemáticos de potenciação e soma de números racionais, se os alunos apresentarem dúvidas a respeito destes temas uma pausa nas atividades deve ser feita e o conteúdo retomado para que eles não fiquem desmotivados.

Na segunda parte, mostra-se como provar uma expressão matemática utilizando a redução ao absurdo. Propõe-se que os alunos trabalhem este conceito por meio do poema Dificuldade de Governar escrito por Bertolt Brecht, identificando os absurdos do texto e posteriormente são convidados a traduzirem o que o filósofo Nietzsche, crítico notório da ideia de ciência, faz em sua alegoria irônica "A gaia ciência" da forma como a contradição é tratada no reino do conhecimento. Isso proporciona ao aluno uma reflexão, uma construção de argumento e uma conclusão a respeito do assunto.

Fica a critério de o professor propor aos alunos a prova de conceitos matemáticos por absurdo.

6 Conclusões

Os modelos de atividades desenvolvidas nesse trabalho constituem um material de ensino sob uma nova metodologia que não é comum no Ensino Médio, nível de ensino a que foram destinadas.

Tais atividades mostraram-se bastante eficazes em vários aspectos:

- Desenvolvimento da autonomia do aluno e melhoria da capacidade de tomar decisões;
- Sequências didáticas desenvolvidas permitem um crescimento gradual do aluno, indo do mais elementar para o mais difícil, sem saltos;
- Desenvolvimento da autoconfiança;
- Aluno se tornando agente no processo de aprendizagem;
- O ensino da lógica que não é proposto nos livros didáticos e pelo MEC;
- Permite ao professor uma compreensão e reflexão da sua atuação, tendo ampla visão dos pontos de maior dificuldade do aluno;
- Tornar as aulas mais dinâmicas;
- Promover a sociabilidade e o respeito mútuo.

A metodologia utilizada permitirá um melhor planejamento das aulas, possibilitando o remanejamento das atividades de acordo com as dificuldades apresentadas pelos alunos ou, mesmo, pelo interesse deles no assunto.

O cabeçalho presente nas atividades é um eficiente método para esclarecer ao aluno o que está sendo ensinado, o que se espera que ele desenvolva e quais são os critérios de avaliação.

Os objetivos, competência, habilidades e atitudes proposto devem ser atingidos ao final da aplicação das atividades, tornando o aluno próprio construtor do seu saber, além de um cidadão crítico e prudente.

Agradecimentos

A minha amiga de profissão Denise Baptista Mazzini pela ideia do tema e pelas valiosas sugestões. E à CAPES pela concessão da bolsa.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, 2000.

________. Matriz de referência para o ENEM 2009. Disponível em: www.inep.gov.br/download/enem2009/enem2009_matriz.pdf . Acesso em: 12 de janeiro de 2014.

SILVEIRA, Marisa R. S. da. "Matemática é difícil": um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf. Acesso em: 07 de fevereiro de 2014.