Ciência e Natura
ISSN: 0100-8307
cienciaenaturarevista@gmail.com
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

Vieira da silva, Márcio; Campos Pereira, Andre Gustavo
Equacões do Segundo Grau e Mudança de Variáveis
Ciência e Natura, vol. 37, núm. 3, 2015, pp. 567-577
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil

Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 567–577
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

Equacões do Segundo Grau e Mudança de Variáveis

Quadratic equations and Change of Variables

Márcio Vieira da silva [1] e Andre Gustavo Campos Pereira[2]

[1]Mestrando em Matemática ,Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
vierimarcio@gmail.com

[2]Professor, Doutor, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
andre.gustavo.campos.pereira@gmail.com

Resumo

Esse artigo apresentará parte de uma Dissertação de Mestrado (Profmat, 2014), que buscou auxiliar na melhoria da prática pedagógica do professor de matemática, pratica essa que nos últimos anos deixou de ser também investigativa e passou a ser bastante mecânica, isso fica evidente a partir do estudo de Álgebra do Ensino Fundamental, sobretudo no tema equações do segundo grau.
Tema este que na maioria dos livros didáticos brasileiros, é abordado sem nenhum contexto histórico, apresentam duas ou três técnicas de resolução além de que o aluno que não consegui com desenvoltura aprender radiciação e potenciação ficará fadado a nunca conseguir determinar as raízes de tais equações, sendo assim este artigo apresentará uma mudança de variável que facilita a determinação das raízes de equações do segundo grau.

Equações do Segundo Grau: *mudança de variáveis.*

Abstract

This article will present part of a Master Thesis (Profmat, 2014), which sought to assist in improving teaching practice math teacher, this practice in recent years ceased to be investigative and also became quite mechanical, it is evident from the study of algebra of elementary school, especially the theme quadratic equations.
This theme in most Brazilian textbooks, is approached without any historical context, have two or three solving techniques as well as the student who was unable to learn with ease root extraction and enhancement will be doomed to never be able to determine the roots of such equations, therefore this paper will introduce a change of variable that facilitates the determination of the roots of quadratic equations.

Equation of Second Degree: *change of variables.*

submissão: 2014-06-30 Aceito: 2015-01-20

1 Introdução

As equações do segundo grau, são estudadas por matemáticos desde a época dos babilônios, egipcios, gregos, hindus e chineses. Cada um desses povos abordavam o assunto de um modo diferente, atualmente os livros didáticos brasileiros ao abordarem esse assunto apresentam uma fórmula prática atribuída ao matemático hindiano Bhaskara.
Historicamente sabemos que existiram diversos matemáticos que contribuiram para o desenvolvimento de formas práticas para investigar as raizes destas equações.
O presente trabalho apresenta uma substituição de variável que auxilia na investigação das raízes de uma equação do segundo grau.

1

2 Abordagem histórica

Escritos datados de 4.000 anos antes de Cristo, mostram um singular interesse dos babilônios pelas equações do segundo grau, é bem verdade que nesse período ainda não havia surgido a Álgebra e por esse motivo os babilônios não usavam símbolos para representar números. De acordo com *Carl Benjamin Boyer*[1] (1906 - 1976), os babilônios foram os primeiros a resolver equações quadráticas. Como eles não tinham o conhecimento sobre álgebra, eles usavam um método engenhoso para conseguir tal façanha.

Esse método citado por muitos historiadores, fornece somente uma raiz positiva, pelo fato de que os valores envolvidos representavam as dimensões de objetos concretos. Sendo assim os babilônios conseguiam, sem símbolos nem fórmulas determinar dois números cuja soma e o produto eram dados.

Atualmente escrevemos uma equações quadráticas da seguinte forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são chamados de coeficientes. No entanto os babilônios por não conhecerem a álgebra usavam apenas manipulações de grandezas. Para melhor entendimento do que estamos dizendo, vamos analisar dois casos concretos de problemas babilônicos, recuperados de tabletes de argila. Para isso é necessário saber como funcionava o sistema de numeração babilônico, o qual era posicional e na base 60.

[1]Carl Benjamin Boyer, Carl B. Boyer, ou apenas Carl Boyer foi um matemático e historiador da matemática norte americano. É autor da obra máxima História da Matemática, editada na década de 1960.

Usamos uma notação moderna para representar os números babilônicos, notação está introduzida por Neugebauer[2]

Por exemplo, escrevemos 1,20;12,30 para indicar o número:

$$1.60 + 20.60^0 + 12.60^{-1} + 30.60^{-2} = 60 + 20 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} =$$

$$80 + \frac{7}{10} = \frac{807}{10}$$

Exemplo 1. O tablete de argila BM 13 901, que se encontra no Museu Británico, contém o seguinte problema, que transcrevemos para linguagem atual: Encontrar o lado de um quadrado cuja área, somada com o lado, é igual a 0;45.

Lembrando que os babilônios utilizavam um sistema numérico posicional mas, com base 60, então 0;45 tranformando na base 10 que é a base que utilizamos atualmente fica da seguinte forma.

$$0;45 = 60.0 + 45.60^{-1} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

Sendo assim atualmente esse problema consiste apenas em resolver a equação quadrática:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

Os babilônios apresentaram a seguintes solução para esse problema:

Tome metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, que é 0;15. Some isso a 0;45 para obter 1. Este é o quadrado de 1. Agora subtraia 0;30 de 1. O resultado é 0;30, o lado do quadrado.

Queremos acreditar pelos relatos que lemos dos feitos dos babilônios em relação a áreas que o conhecimento das áreas de retângulos e quadrados era total, ou seja, que a área de um retângulo de lados a e b era $a.b$ e a área de um quadrado de lado x era x^2, também acreditamos que se eles queriam uma área que fosse nominalmente igual a medida de um lado c bastava ele fazer o outro lado do retângulo ser igual a 1, também acreditamos que eles sabiam manusear áreas com desenvoltura e por isso cremos que sabiam que todas as figuras a seguir tinham a mesma área $x^2 + x$.

[2]Otto Eduard Neugebauer (26 de maio de 1899 — 19 de fevereiro de 1990) foi um matemático e historiador da ciência austro-estadunidense.

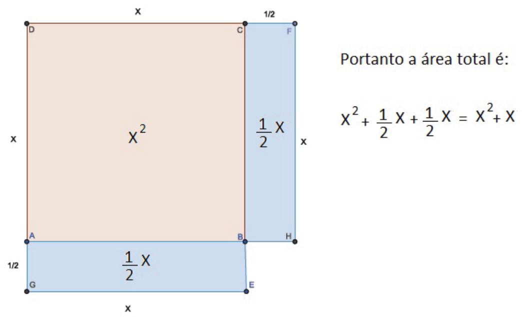


Figura 01

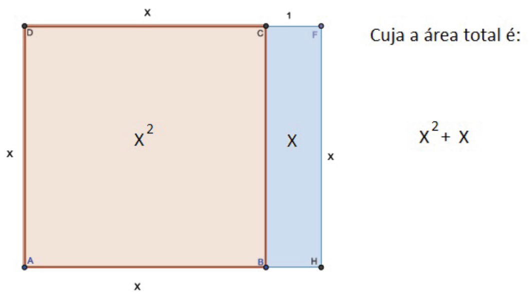


Figura 02

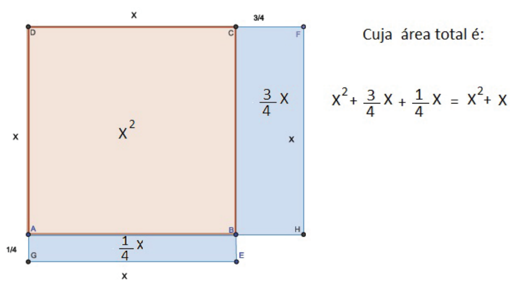
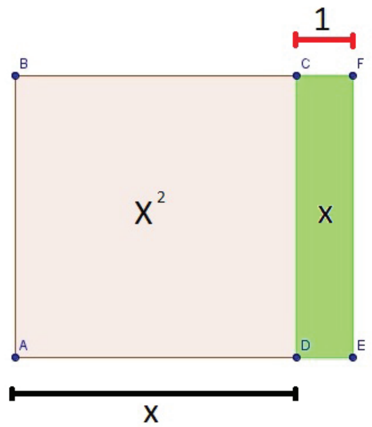


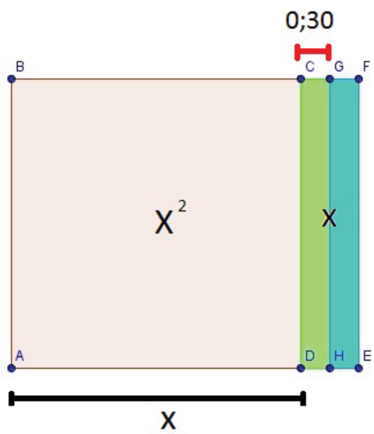
Figura 03

Olhando novamente para o problema do exemplo 1, ele diz exatamente que a área da figura 2 é 0;45. Ora, mas a área da figura 2 é igual a área da figura 1. Note que a frase multiplique 0;30 por 0;30 é 0;15 é exatamente a área do quadradinho que está faltando na figura 1 para completar a área do quadrado maior.
A frase some isso, ou seja some 0;15 a 0;45 para obter 1 significa somar esta área ao quadrado, desta forma temos que: a área do quadrado de lado $x + \frac{1}{2}$ é igual a 0;45+0;15=1, segundo os babilônios.

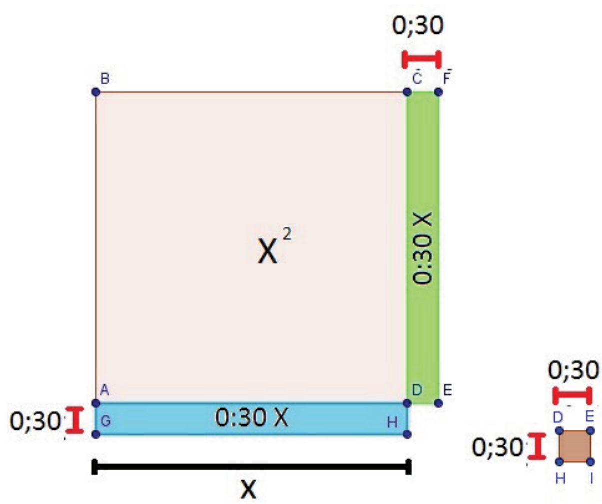
Geometricamente temos que a figura abaixo representa o problema apresentado pelos babilônios:



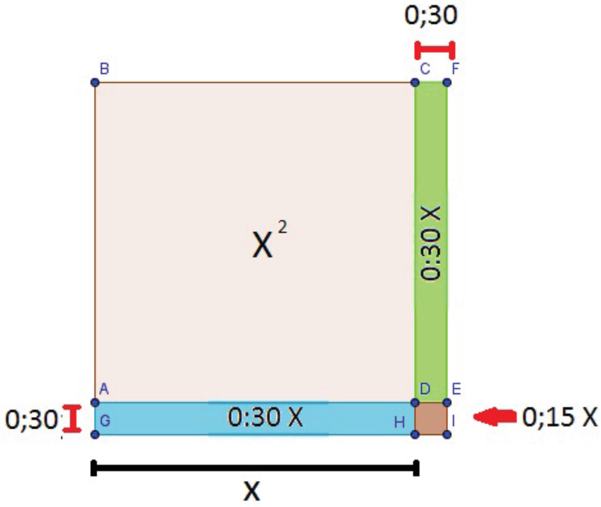
Tome metade de um:



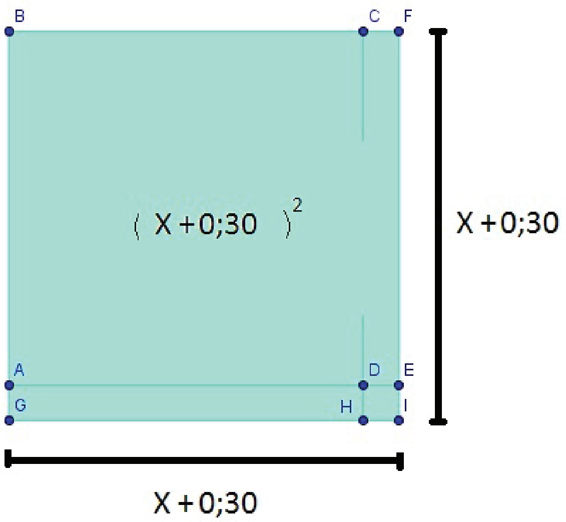
Multiplique 0;30 por 0;30, que é 0;15



Some isso a 0;45 para obter 1



Que é igual a:



Algebricamente teremos:

$$x^2 + x = 0;45$$

$$x^2 + x + 0;15 = 0;45 + 0;15$$

$$(x + 0;30)^2 = 1$$

$$(x + 0;30) = \sqrt{1}$$

$$x + 0;30 = 1$$

$$x = 1 - 0;30$$

$$x = 0;30$$

Exemplo 2:

O tablete de argila YBC 6967, que se encontra na Universidade de Yale, contém o problema que transcrevemos para linguagem atual:
Um recíproco excede seu recíproco em 7. Quais são: o recíproco e seu recíproco?

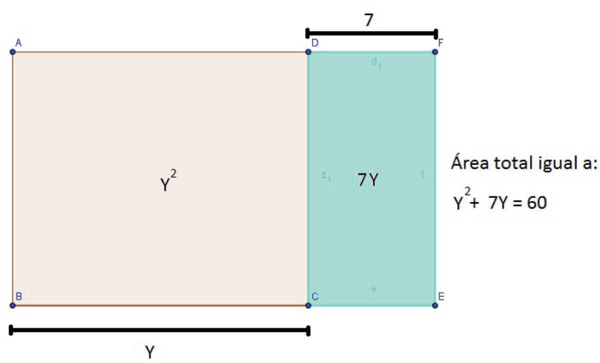
Esse problema é essencialmente numérico, pois os recíprocos são números que multiplicados perfazem 1,0. Entretanto, como o sistema babilônico é de base 60, lembremos que nessa base $1{,}0 = 1 \times 60 + 0 \times 1 = 60$. O problema então consiste em se obter dois números, x e y, cujo produto é 60 e a diferença é 7, isto é:

$$x.y = 60 \text{ e } x - y = 7$$

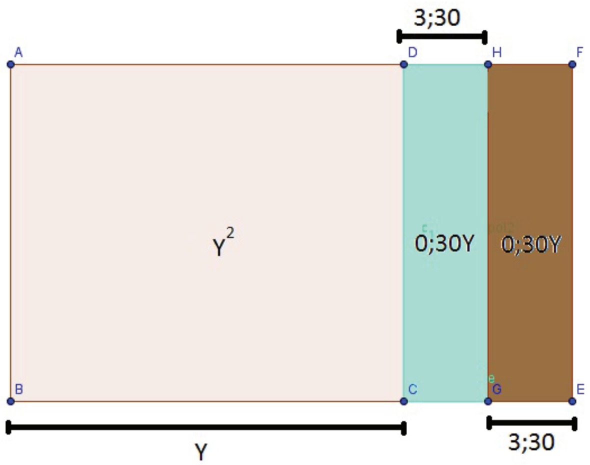
Desse modo, obtemos um sistema de duas equações, que por substituição se reduz à equação quadrática $(y+7).y = 60$, ou seja, $y^2 + 7y = 60$.
A solução apresentada no tablete babilônico para esse sistema é a seguinte:

Tome metade de 7, que é 3;30. Multiplique 3;30 por 3;30, que é 12;15. Some isso ao produto 1,0 e o resultado é 1,12;15. Dado que a raiz quadrada de 1,12;15 é 8;30. Tome 8;30 que você obteve e subtraia 3;30 dele; some 3;30 a 8;30. Um é 12 o outro é 5. O recíproco é 12 e seu recíproco 5.

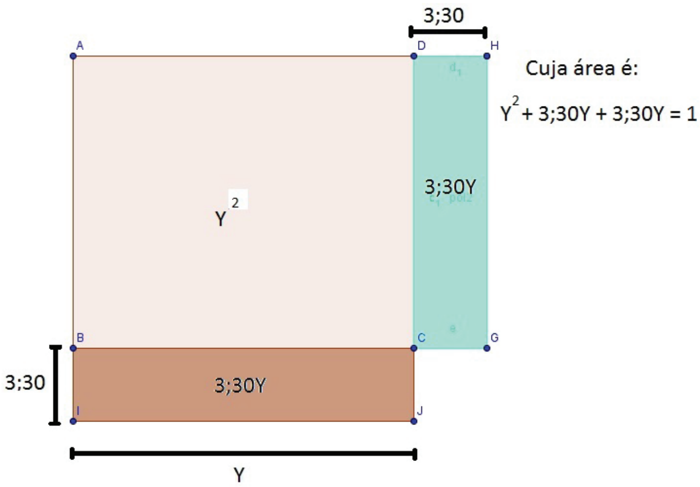
Uma solução geométrica equivalente a solução proposta pelos babilônios é:



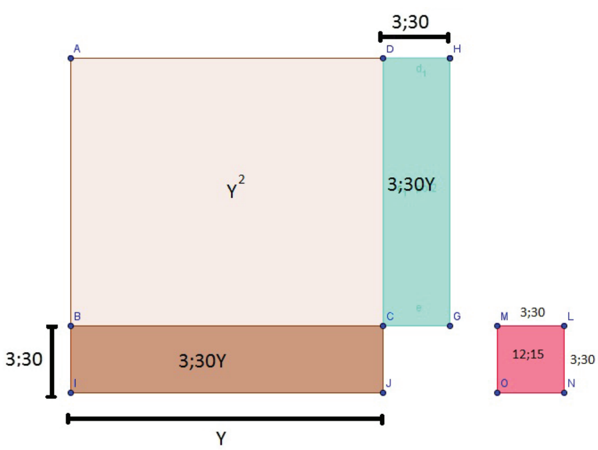
Tome metade de 7 que é $3;30$:



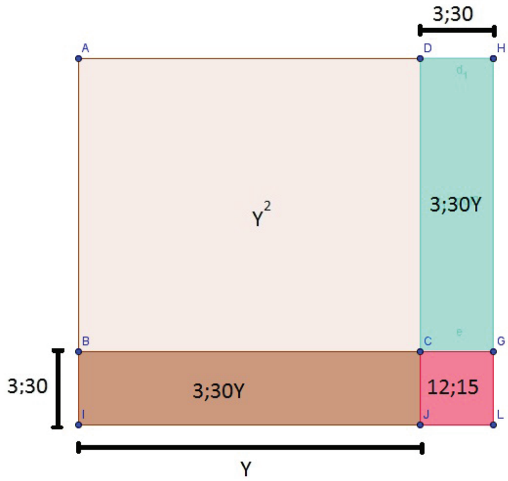
Reorganizando teremos:



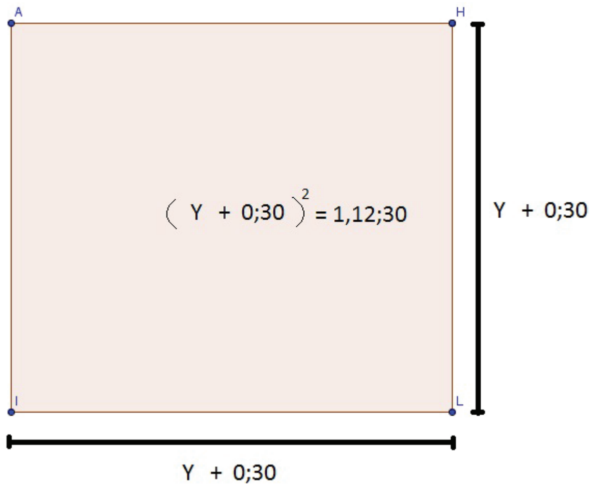
Multiplique 3; 30 por 3; 30, que é 12; 15



Some isso ao produto 1,0 e o resultado é 1,12; 15.



Onde finalmente teremos:



Algebricamente temos:

$$y^2 + 7y = 1{,}0;0$$

$$y^2 + 7y + 12;15 = 1{,}0;0 + 12;15$$

$$(y + 3;30)^2 = 1{,}12;15$$

$$y + 3;30 = \sqrt{1{,}12;15}$$

$$y + 3;30 = 8;30$$

$$y = 8;30 - 3;30$$

$$y = 5$$

Com isso teremos que o outro valor é:

$$x - y = 7$$

$$x = 7 + y$$

$$x = 7 + 5$$

$$x = 12$$

Vemos que em ambos os exemplos o método utilizado foi o de completar quadrados.

Muitos anos passaram desde os babilônicos até que o matemático francês François Viète (1540 a 1603), introduziu o uso de vogais para as incógnitas, adotou também o uso do símbolo (+) para substituir a palavra mais e o símbolo (–) para substituir a palavra menos, além de determinar um método para encontrar a solução da equação quadrática.

Ele recorreu a uma mudança de variável para determinar a solução de tais equações, madança essa que descrevemos a seguir.

Dada à equação $x^2 + bx + c = 0$, ele fez a substituição de $x = y + z$, obtendo a expressão abaixo:
$a(y + z)^2 + b(y + z) + c = 0$, que ao desenvolvê-la obteve:

$$ay^2 + (2az + b)y + az^2 + bz + c = 0 \tag{1}$$

Ele achou os valores de z para os quais esta equação em y não tivesse o termo de primeiro grau,$(2az + b)y$: ou seja ele resolveu a seguinte equação:

$$2az + b = 0$$

$$z = \frac{-b}{2a} \tag{2}$$

depois ele substituiu o valor de z na equação 1, obtendo:

$$ay^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

$4a^2y^2 = b^2 - 4ac$, isolando y ele concluiu que:

$$y^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \Rightarrow y = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como $x = y + z$, isso implica:

$$x - z = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = z + \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e substituindo o valor de z obtido na equação (2, na equação anterior ele obteve:

$$x - \frac{-b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que é exatamente a fórmula que atuamente no Brasil chamamos de fórmula de "Bháskara".

3 Proposta de mudança de variáveis

Um fato curioso ocorre nas equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c$, em que a soma dos coeficientes é zero, ou seja, $a + b + c = 0$. Esta observação chamou a atenção do autor deste artigo, que embora acredite que já exista tal mudança de variável, por ser bastante simples, o autor nunca a encontrou em um livro didático e isso o motivou a propor uma mudança de variável. Observemos o que ocorre com as equações do segundo grau com essa característica.

Sabemos que existe uma relação entre zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e as raízes da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c$. Partindo da hipótese que $a + b + c = 0$, temos:

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a1^2 + b.1 + c = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

ou seja, $x = 1$ é um zero de $f(x)$ que é equivalente a dizer que $x = 1$ é solução de $ax^2 + bx + c = 0$. Ora, mas se $x = 1$ é raiz do polinômio $ax^2 + bx + c$ é porque $x - 1$ divide $ax^2 + bx + c$. Fazendo essa divisão temos o quociente $ax + (b + a)$ e resto $a + b + c$. Ora, $a + b + c = 0$ por hipótese e podemos escrever $b + a = -c$, portanto desta divisão temos quociente $ax - c$ e resto 0. Logo podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = (x - 1)(ax - c) = a(x - 1)(x - \frac{c}{a})$$

e assim observamos da expressão anterior que a outra raiz de $ax^2 + bx + c = 0$ é $x = \frac{c}{a}$.

Concluímos então que toda equação do segundo grau cuja soma de seus coeficientes seja zero, possui as seguintes raízes.

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemplo 1.
Determine as raízes da equação $3x^2 - 5x + 2 = 0$.
Pelo que foi observado anteriormente temos que $3 - 5 + 2 = 0$, então:
$x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

De posse dessa informação fica fácil determinar as raízes de uma equação do segundo grau, cuja soma dos seus coeficientes seja igual a zero. Mas o que faremos para determinar as raízes das equações que não possuam essa caracteristica? Será que através de uma mudança de variável podemos obter uma nova equação do segundo grau, cuja soma dos seus coeficientes seja igual a zero? Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 2.

Determine as raizes da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Note que a soma dos coeficientes não é zero, logo não podemos usar o que foi desenvolvido anteriormente. Fazendo a mudança de variável de $x = 3y$ temos uma nova equação a saber:

$$\begin{aligned} 2(3y)^2 - 7(3y) + 3 = 0 \Rightarrow \\ 2.9y^2 - 7.3y + 3 = 0 \Rightarrow \\ 18y^2 - 21y + 3 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

observe $18 - 21 + 3 = 0$, isso significa, pelo que foi visto até agora que as raízes de (3) são:

$$y_1 = 1 \text{ e } y_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

e como a mudança de variável feita foi $x = 3y$ então as raízes da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$:

$$x_1 = 3.1 = 3$$

$$x_2 = 3.\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Verificando se os valores determinados são realmente as raízes a equação
$2x^2 - 7x + 3 = 0$.
de $x_1 = 3$, temos que $2.3^2 - 7.3 + 3 = 18 - 21 + 3 = 0$.
de $x_2 = \frac{1}{2}$, temos que $2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 3 =$
$= \left(\frac{2}{4}\right) - \left(\frac{7}{2}\right) + 3 = \left(\frac{2}{4}\right) - \left(\frac{14}{4}\right) + \left(\frac{12}{4}\right) = \left(\frac{14-14}{4}\right) = 0$

Uma pergunta que pode surgir agora é:

Sempre podemos conseguir uma mudança de variável que transforme uma equação de segundo grau em outra cuja soma dos coeficientes seja zero?

Outra pergunta pertinente é: A mudança de variável não vai alterar a quantidade de soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$?
Note que o que a quantidade de soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, vai depender da possibilidade de poder ou não calcular a raiz

$$\sqrt{b^2 - 4ac}, \tag{4}$$

com isso vemos que o número $b^2 - 4ac$ vai ser importante e a partir desse momento chamaremos o mesmo de $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta < 0$ não podemos calcular (4) e portanto não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2 + bx + c = 0$. Se $\Delta = 0$ então $\pm\sqrt{\Delta} = 0$, ou seja, só existe um valor de $x = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}$ que satisfaz $ax^2 + bx + c = 0$. Se $\Delta > 0$, então $\sqrt{\Delta} > 0$, logo $\sqrt{\Delta} \neq -\sqrt{\Delta}$ que implica que existe dois valores diferentes $x \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2 + bx + c = 0$.
Para responder as perguntas devemos analisar o discriminante das equações, após a substituição, pois sabemos que o sinal do Δ na equação após uma mudança de variável determina a quantidade de raizes da mesma. Geralmente as mudanças de variável são da forma $x = Ay + B, A \neq 0$, que vamos substituir na equação $ax^2 + bx + c = 0$ e em seguida observar o que ocorre com o discriminante da nova equação, então procedemos da seguinte forma.

$$\begin{aligned} a(Ay + B)^2 + b(Ay + B) + c = 0 \\ a(A^2y^2 + 2ABy + B^2) + bAy + bB + c = 0 \\ aA^2y^2 + 2aABy + aB^2 + bAy + bB + c = 0 \\ aA^2y^2 + (2aAB + bA)y + aB^2 + bB + c = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Calculando o Δ da equação do segundo grau acima, para investigar o que ocorre com o número de raizes de 5, obtemos :
$\Delta = (2aAB + bA)^2 - 4(aA^2).(aB^2 + bB + c) = 4a^2A^2B^2 - 4aA^2bB - 4aA^2c = A^2(b^2 - 4ac)$. Note que $b^2 - 4ac$ era o Δ da equação inicial (antes da mudança de variável) , logo o discriminante não muda de sinal quando aplicamos uma mudança de variável, assim a quantidade de raizes não se altera. E caso a equação original possua raiz, será possível obter a mudança de variável desejada.

Como conseguir então a mudança de variável correta?

Vimos até que dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ a mudança de variável $x = Ay + B$ transforma a equação anterior em

$$aA^2y^2 + (2aAB + bA)y + aB^2 + bB + c = 0.$$

Em termos de soma dos coeficientes, passamos de $a + b + c$ para

$$aA^2 + 2aAB + bA + aB^2 + bB + c.$$

Entretanto, considerando $B = 0$, ou seja, mudanças do tipo $y = Ax$ a soma acima se reduz a

$$aA^2 + bA + c.$$

Note que estamos interessados em valores de $A \neq 0$ que façam o valor anterior ser igual a zero, ou seja, valores de $A \neq 0$ tais que

$$aA^2 + bA + c = 0.$$

Dividindo a equação acima por A obtemos

$$aA + b + \frac{c}{A} = 0. \tag{6}$$

Se considerarmos A da forma $A = \frac{\alpha}{\beta}$, podemos dividir nosso estudo em três casos:

1. $\alpha \neq 1, \beta = 1$

2. $\alpha = 1, \beta \neq 1$

3. $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$

3.1 Caso 1. $\alpha \neq 1, \beta = 1$

Este caso é o que está representado em (6), ou seja, encontrar um $\alpha \neq 0$ tal que

$$a\alpha + b + \frac{c}{\alpha} = 0.$$

Em outras palavras, devemos procurar um $\alpha \neq 0$, que faça essa equação ser verdadeira. Note que esta proposta de mudança de variável, altera apenas os valores dos coeficientes a e c da equação que estamos interessados em obter as raízes, o primeiro sendo multiplicado por um valor e o último sendo dividido por este mesmo valor. Voltemos ao exemplo anterior e tentemos encontrar a mudança que foi sugerida

Exemplo 3.
Determine as raizes da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$.
A soma dos coeficientes é $2 - 7 + 3 = -2 \neq 0$. Para tentarmos uma mudança do tipo 1. precisamos encontrar $\alpha \neq 1$ tal que

$$2\alpha - 7 + \frac{3}{\alpha} = 0.$$

Claro que este método é útil caso seja fácil determinar tal α por verificação simples, pois encontrar tal α é equivalente a encontrar a solução de nossa equação inicial. Procuremos números que quando dividirmos por 3 tenhamos um número inteiro. Tentemos o mais simples, $\alpha = 3$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$2.3 - 7 + \frac{3}{3} = 6 - 7 + 1 = 0.$$

logo $\alpha = 3$ é o número procurado e a mudança é $x = 3y$. Que foi a substituição usada no exemplo 2.

Exemplo 4.
Determine as raizes da equação $5x^2 - 21x + 4 = 0$
A soma dos coeficientes é $5 - 21 + 4 = -12 \neq 0$. Para tentarmos uma mudança do tipo 1. precisamos encontrar $\alpha \neq 1$ tal que

$$5\alpha - 21 + \frac{4}{\alpha} = 0.$$

Procuremos números que quando dividirmos por 4 tenhamos um número inteiro. Tentemos o mais simples, $\alpha = 4$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$5.4 - 21 + \frac{4}{4} = 20 - 21 + 1 = 0.$$

logo $\alpha = 4$ é o número procurado e a mudança é $x = 4z$. Isso nos dará a equação

$$20z^2 - 21z + 1 = 0 \tag{7}$$

observe que nessa equação a soma dos coeficientes é $20 - 21 + 1 = 0$ e pelo que foi visto temos as seguintes raizes:

$z_1 = 1$ e $z_2 = \frac{c}{a}$, portanto as raizes de (7) serão:

$z_1 = 1$ e $z_2 = \frac{1}{20}$,
para a determinação das raizes da equação original faremos o seguinte:
Como o fator que utilizamos foi o 4, então multiplicamos as raízes de (7), por esse mesmo fator e assim serão determinadas as raízes de $5x^2 - 21x + 4 = 0$, ou seja:

$$x_1 = 4.z_1 = 4.1 = 4$$

$$x_2 = 4.z_2 = 4.\frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

observe que se $x_1 = 4$ então,
$5.4^2 - 21.4 + 4 = 80 - 84 + 4 = 0$, portanto 4 é raiz da referida equação, da mesma forma tomando $x_2 = \frac{1}{5}$, então:

$$5\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 21\left(\frac{1}{5}\right) + 4 = 0.$$

Exemplo 5.
Determine as raízes da equação $6x^2 + 14x + 4 = 0$.
A soma dos coeficientes é $6 + 14 + 4 = 24 \neq 0$.Para tentarmos uma mudança do tipo 1, precisamos encontrar $\alpha \neq 1$ tal que

$$6\alpha + 14 + \frac{4}{\alpha} = 0.$$

Procuremos números que quando dividirmos por 4 tenhamos um número inteiro. Tentemos o mais simples, $\alpha = 4$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$6.4 + 14 + \frac{4}{4} = 24 + 14 + 1 = 29.$$

Tentemos um núremo negativo $\alpha = -4$

$$6.(-4) + 14 + \frac{4}{-4} = -24 + 14 - 1 = -11.$$

Tentando $\alpha = -2$

$$6.(-2) + 14 + \frac{4}{-2} = -12 + 14 - 2 = 0.$$

logo $\alpha = -2$ é o número procurado e a mudança é $x = -2z$. Isso nos dará a equação:

$$(-2).6z^2 + 14z + (-2) = 0$$
$$-12z^2 + 14z - 2 = 0 \qquad (8)$$

nesta equação, temos que $a + b + c = -12 + 14 - 2 = 0$, facilitando assim a determinação de suas raizes, que são:
$z_1 = 1$
$z_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$
agora determinar as raízes de $6x^2 + 14x + 4 = 0$, fica muito fácil, ou seja usando o mesmo procedimento que na questão anterior e sabendo que neste caso o fator utilizado foi (-2), teremos que:
$x_1 = (-2).z_1 = (-2).1 = -2$
$x_2 = (-2).z_2 = (-2).\frac{1}{6} = \frac{(-2)}{6} = \frac{-1}{3}$

3.2 Caso 2. $\alpha = 1, \beta \neq 1$

Este caso, quando substituímos em (6), ou seja, encontrar um $\beta \neq 1$ tal que

$$\frac{a}{\beta} + b + \beta.c = 0.$$

Em outras palavras, devemos procurar um $\beta \neq 0$, que faça essa equação ser verdadeira. Note que esta proposta de mudança de variável, também só altera os valores dos coeficientes a e c da equação que estamos interessados em obter as raizes, só que agora o primeiro vai ser dividido por este número e o último será multiplicado por este mesmo valor.

Exemplo 6.
Determine as raízes da equação $12x^2 + 14x - 10 = 0$
A soma dos coeficientes é $12 + 14 - 10 = 6 \neq 0$. Para tentarmos uma mudança do tipo 2, precisamos encontrar $\beta \neq 1$ tal que

$$\frac{12}{\beta} + 14 - 10\beta = 0.$$

Procuremos números que quando dividirmos 12 por este número tenhamos um número inteiro. Tentemos o mais simples, $\beta = 12$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$\frac{12}{12} + 14 - 10.12 = -115.$$

Tentemos um número menor $\beta = 2$

$$\frac{12}{2} + 14 - 10.2 = 0.$$

logo $\beta = 2$ é o número procurado e a mudança é $x = \frac{z}{2}$. Isso nos dá a equação

$$6z^2 + 14z - 20 = 0$$

como $6 + 14 - 20 = 0$ então as raízes da equação são:
$z_1 = 1$
$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3}$
e as raízes da equação inicial são:
$x_1 = \frac{z_1}{2} = \frac{z_1}{2} = \frac{1}{2}$
$x_2 = \frac{z_2}{2} = \frac{z_2}{2} = \frac{\left(\frac{-10}{3}\right)}{2} = \frac{-5}{3}$

3.3 Caso 3. $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$

Este caso, quando substituído em (6), ou seja, encontrar um $\alpha, \beta \neq 0$ tais que

$$\frac{a\alpha}{\beta} + b + \frac{\beta.c}{\alpha} = 0.$$

Em outras palavras, devemos procurar um α,$\beta \neq 1$, que faça essa equação ser verdadeira. Note que esta proposta de mudança de variável, também só altera os valores dos coeficientes a e c da equação que estamos interessados em obter as raizes.

Exemplo 7.
Determine as raizes da equação $6x^2 - 19x + 15 = 0$.
A soma dos coeficientes é $6 - 19 + 15 = 2 \neq 0$. Para tentarmos uma mudança do tipo 3 precisamos encontrar $\alpha, \beta \neq 0$ tais que

$$\frac{6\alpha}{\beta} - 19 + \frac{\beta.15}{\alpha} = 0.$$

Procuremos números α que divida 15 e β que divida 6, ou seja, tentemos os mais simples, $\alpha = 15$ e $\beta = 6$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$\frac{6.15}{6} - 19 + \frac{6.15}{15} = 15 - 19 + 6 = 2 \neq 0.$$

Tentemos $\alpha = 5$ e $\beta = 3$

$$\frac{6.5}{3} - 19 + \frac{3.15}{5} = 10 - 19 + 9 = 0.$$

logo temos $\alpha = 5$ e $\beta = 3$ são os números procurados e a mudança é $x = \frac{5z}{3}$. Isso nos dá a equação

$$10x^2 - 19x + 9 = 0 \qquad (9)$$

como $10 - 19 + 9 = 0$ temos que as raízes de (9), são:
$z_1 = 1$
$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{9}{10}$

Assim as raízes de $6x^2 - 19x + 15 = 0$, são:
$x_1 = z_2.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 1.\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)$
$x_2 = z_2.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{9}{10}.\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{2}$

Um outro modo de ver essa mesma mudança de variável, é fatorando os termos a ou c da equação estudada, o que faremos com o exemplo abaixo.

Exemplo 8.
Determine as raízes da equação $20x^2 - 201x + 10 = 0$.

Dada a equação $20x^2 - 201x + 10 = 0$, podemos escrevê-la da seguinte forma $20x^2 - 201x + 10.1 = 0$, devemos ter em mente que a soma dos coeficientes da equação de mudança de variável deve ser zero, assim a partir dos coeficientes a e c da equação original iremos determinar a equação de mudança de variável, observe que c é o produto 10.1, multiplicando o fator 10 pelo termo a teremos o coeficiente do termo quadrado da equação de mudança de variavel. O termo independente da referida equação será o fator 1 em outras palavras teremos:

$$200z^2 - 201z + 1 = 0 \tag{10}$$

como $200 - 201 + 1 = 0$ temos que as raizes de (10), são:
$z_1 = 1$

$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{1}{200}$

e as raízes da equação inicial são:

$x_1 = 10.z_1 = 10.1 = 10$

$x_2 = 10.z_2 = 10.\frac{1}{200} = \frac{1}{20}$

Vejamos um fato interessante, suponha eu estamos interessados em saber o valor do discriminante da equação inicial ou seja:
$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (-201)^2 - 4.20.10 \Rightarrow \Delta = 40401 - 800 \Rightarrow \Delta = 39601$

Agora pegue o módulo da diferença entre o coeficiente do termo ao quadrado e o termo independente da equação de mudança de variável ou seja:
$|200 - 1| = 199$ que é igual a $\sqrt{\Delta} = \sqrt{39601}$

Vamos refazer o **Exemplo 2**, da mesma maneira que resolvemos o exemplo anterior. Ou seja, determine as raizes da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Da mesma maneira que no exemplo anterior vamos reescrever $2x^2 - 7x + 3 = 0$ como $2x^2 - 7x + 3.1 = 0$ com o fator 3 do termo c e o termo $a = 2$, determinamos o coeficiente do termo ao quadrado da equação de mudança de variável e com o fator 1 do termo c determinamos o termo independente da referida equação, que agora podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$3.2z^2 - 7z + 1 = 0 \Rightarrow 6z^2 - 7z + 1 = 0$$

Como $6 - 7 + 1 = 0$ teremos:
$z_1 = 1$

$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{1}{7}$

e as raízes da equação inicial são:

$x_1 = 3.z_1 = 3.1 = 3$

$x_2 = 3.z_2 = 3.\frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

Voltamos a observar que $|6 - 1| = 5$ é igual a raiz quadrada do discriminante da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$. De fato, $\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4.2.6 \Rightarrow \Delta = 49 - 24 \Rightarrow \Delta = 25$, uma pergunta que surge é: Isso ocorre sempre nesse tipo de mudança de variável?
A respota a essa pergunta é sim, se a equação original possuir raizes reais.

A justificativa para essa afirmação é que em ambos os casos anteriores a equação original era da forma $ax^2 + bx + c = 0$ onde $c = \alpha.\beta$, e a equação de mudança da variável foi escrita assim:
$\alpha a z^2 + bz + \beta = 0$, cuja soma dos coeficientes é] $\alpha a + b + \beta$. Como $\alpha a + b + \beta = 0 \Rightarrow b = -(\alpha a + \beta)$, então o discriminante da equação original é dado por:
$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow$
$\Delta = [-(\alpha a + \beta)]^2 - 4.a.(\alpha.\beta) \Rightarrow$
$\Delta = \alpha^2.a^2 + 2.a.\alpha.\beta - 4.a.\alpha.\beta + \beta^2 \Rightarrow$
$\Delta = \alpha^2.a^2 - 2.a.\alpha.\beta + \beta^2 = (\alpha.a - \beta)^2$
O que nos leva a concluir que:
$\sqrt{\Delta} = |\alpha.a - \beta|$

Esse método pode em alguns casos tornar bastante simples tarefa de determinação das raízes de uma equação do segundo grau, conforme ilustra o seguinte exemplo

Exemplo 8. Determine as raizes da equação $4x^2 - (2 + 2.\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$.

Suponha que não conhecemos o método apresentado e aplicando a fórmula de Bhaskara.
$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow$
$\Delta = \left[-(2 + 2.\sqrt{2})\right]^2 - 4.4.\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Delta = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 16\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Delta = 12 - 8\sqrt{2}$
Continuando temos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$
$$x = \frac{-[-(2+2\sqrt{2})] \pm \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}}{2.4}$$

Agora a estratégia é determinar o valor de $\sqrt{12 - 8\sqrt{2}}$, ou seja vamos trabalhar com um radical duplo, logo tentaremos usar método para transformar radical duplo em radicais simples.

Sabemos que um radical duplo do tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, pode ser escrito na forma:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Onde $C = \sqrt{A^2 - B}$.
Então, partindo do radical duplo $\sqrt{12 - \sqrt{128}}$, teremos que $A = 12$ e $B = 128$, sendo assim:
$C = \sqrt{12^2 - 128} = \sqrt{144 - 128} = \sqrt{16} = 4$.
Prosseguindo, teremos que:
$\sqrt{12 - \sqrt{128}} = \sqrt{\frac{12+4}{2}} - \sqrt{\frac{12-4}{2}} = \sqrt{\frac{16}{2}} - \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{8} - \sqrt{4} = 2.\sqrt{2} - 2$
Para concluir,
$$x = \frac{-[-(2+2.\sqrt{2})] \pm \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}}{2.4}$$
$$x = \frac{2+2.\sqrt{2} \pm (2.\sqrt{2}-2)}{8}, \text{ então:}$$
$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}+(2.\sqrt{2}-2)}{8} = \frac{4.\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}-(2.\sqrt{2}-2)}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Usando mudança de variável, podemos resolver essa equação de forma mais simples:
Dada a equação $4x^2 - (2+2.\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$, podemos escrevê-la $2.2x^2 - (2+2.\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$, devemos ter em mente que a soma dos coeficientes da equação de mudança de variável deve ser zero, assim a partir dos coeficientes a e c da equação original iremos determinar a equação de mudança de variável, observe que a é o produto 2.2, multiplicando o fator 2 pelo termo c teremos o coeficiente do termo independente da equação de mudança de variavel. O coeficiente do termo ao quadrado da referida equação será o outro fator 2, em outras palavras teremos:
$2z^2 - (2+2.\sqrt{2})z + 2.\sqrt{2} = 0$, observe que $2 - (2 + 2.\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} = 0$, e como vimos até agora teremos que:

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Assim, $x_1 = \frac{1}{2}.z_1 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$,
$x_2 = \frac{1}{2}.z_2 = \frac{1}{2}.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4 Conclusões

A comparação do método abordado neste trabalho com a fórmula de Bhaskara mostra que a técnica de mudança de variáves em muitos casos é eficiente, pois quando aplicada facilita a determinção das raizes de uma equação do segundo grau.

Referências

BOYER, C. B., História da Matemática, Edgard Blücher,São Paulo, 1974.

EVES, H., Introdução à História da Matemática,Unicamp, Campinas, 1997.

MAZZIEIRO, A. S. Descobrindo e aplicando a matemática; 9o ano / texto de Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio Fonseca Machado; — Belo Horizonte: Dimensão, 2012.304 p. il. – (9o ano do ensino fundamental – Matemática)

ANDRINI, Á. Coleção Patricando Matemática, 3a edição, São Paulo, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática ... DANTE, Luiz Roberto. Vivência e Construção. Matemática. Editora Ática. 4a Edição 2013 (9o ano do ensino fundamental – Matemática).

GIOVANNI JR. A conquista da Matemática, 9a série. São Paulo: Atica 2012.

IMENES, L.M. ; LELLIS, M., Matemática – Imenes Lellis - 9o ano, São Paulo: Editora Moderna 2013.

BIANCHINI, E., Matemática Bianchini - 9o ano, São Paulo. 1a Edição: Editora Moderna 2013.

PROJETO ARARIBÁ , Matemática 9o ano, São Paulo. 1a Edição: Editora Moderna 2013.

BIANCHIN, E., Matemática 8a série - 9o ano, São Paulo. 2a Edição: Editora Moderna 2010.

MARQUES, C. ; SILVEIRA, Ê., Matemática 9o ano Compreensão e prática. 2a Edição, São Paulo: Editora Moderna 2010.