

Ciência e Natura

ISSN: 0100-8307

cienciaenaturarevista@gmail.com

Universidade Federal de Santa Maria

Brasil

Gish, Deborah Lidia; Bodmann, Bardo; Menna Barreto de Vilhena, Marco Túllio  
Uma solução genuína da equação de advecção difusão com forma sesquilinear para  
problema multi-fonte.

Ciência e Natura, vol. 38, 2016, pp. 80-83  
Universidade Federal de Santa Maria  
Santa Maria, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467547689014>

- ▶ Como citar este artigo
- ▶ Número completo
- ▶ Mais artigos
- ▶ Home da revista no Redalyc

## Uma solução genuína da equação de advecção difusão com forma sesquilinear para problema multi-fonte.

A genuine solution of the diffusion advection equation sesquilinear way to multi-source problem.

Debora Lidia Gisch, Bardo Bodmann, Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil  
debora.gisch@gmail.com, bejbodmann@gmail.com, mtmbvilhena@gmail.com

### Resumo

O presente trabalho é uma proposta para uma aproximação alternativa para o modelo de dispersão de poluentes, e incluir algumas características que podem ser associadas ao fenômeno de turbulência. Como ponto de partida nós consideramos dois axiomas que conduzem a um modelo e sua solução é compatível com as descrições de distribuições. No primeiro garantimos solução semi-positiva, como se espera de uma distribuição, considerando que o segundo axioma implementa estruturas compatíveis com estruturas coerentes através da implementação de formas sesquilinear.

**Palavras-chave:** Dispersão de Poluentes, Estruturas Coerentes, Formas Sesquilinear.

### Abstract

The present work is a proposal for an alternative approach for pollution dispersion modelling, including some characteristics that may be associated to the phenomenon of turbulence. As a starting point we consider two axiomatic properties that shall lead to a model and its solution compatible with distributional descriptions. The first one states that a solution shall be semi-positive as expected for a distribution, whereas the second axiom demands for compatibility with coherent structures, which are implemented by the use of sesquilinear forms.

**Keywords:** Pollution Dispersion, Coherent Structures, Sesquilinear Forms.

## 1 Introdução

A dispersão de poluentes é um fenômeno complexo dado que ao observar uma chaminé pode-se identificar diversas estruturas como vórtices e turbilhões, flutuações na densidade do poluente e na velocidade da dispersão Hussain e Fazle (1986). Um reflexo dessa complexidade é que, para reproduzi-la, há modelos que utilizam um grande número de parâmetros. Neste trabalho constrói-se um modelo de dispersão de poluentes que apresenta estas estruturas apenas introduzindo um coeficiente de difusão complexo, modificando, assim, o fechamento Fickiano Stull (1988).

## 2 Metodologia

O modelo analítico de dispersão de poluentes amplamente estudado é o da equação advecção-difusão Arya (1999) onde simplificações como as médias de Reynolds e o fechamento Fickiano são aplicados para que a solução seja facilmente obtida.

A equação é dada por,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2},$$

onde  $C$  [ $g/m^3$ ] concentração,  $u$  [ $m/s$ ] velocidade na direção  $x$  [ $m$ ] e os  $K$ 's [ $m^2/s$ ] coeficientes de difusão das respectivas coordenadas espaciais. Sendo as condições, fluxo nulo no contorno, fontes contínuas com concentração nula no tempo inicial e constituída por três fontes pontuais alinhadas na coordenada  $y$  com distância de 0.1 [ $m$ ] entre elas. Descritas como:

$$\begin{aligned} uC(0,y,z,t) &= \dot{Q}\delta(y - y_0)\delta(z - H_s), \\ uC(0,y,z,t) &= \dot{Q}\delta(y - y_0 + 0.1)\delta(z - H_s), \\ uC(0,y,z,t) &= \dot{Q}\delta(y - y_0 - 0.1)\delta(z - H_s), \end{aligned}$$

onde  $H_s$  é altura da fonte.

Para resgatar algumas características do fenômeno turbulento propomos a inclusão de uma fase na equação advecção-difusão tridimensional e transitória, já que (ECs) são características turbulentas dominadas pela fase. Assim resolve-se a equação advecção-difusão e ao obter-se a solução inclui-se uma modificação no fechamento Fickiano, através da substituição do coeficiente de difusão  $K_z$  por um coeficiente de difusão complexo e formando a grandeza que representa a distribuição de poluentes de forma sesquilinear Bodmann et al. (2013). O complexo de uma constante é representado por  $K_z = K_{za} + iK_{zb}$ , onde  $K_{za}$  é a parte real e  $K_{zb}$  imaginária. Esse coeficiente complexo torna a solução da equação advecção-difusão complexa, ou seja a solução está no corpo dos complexos com módulo e fase. A distribuição da concentração deve ser real e

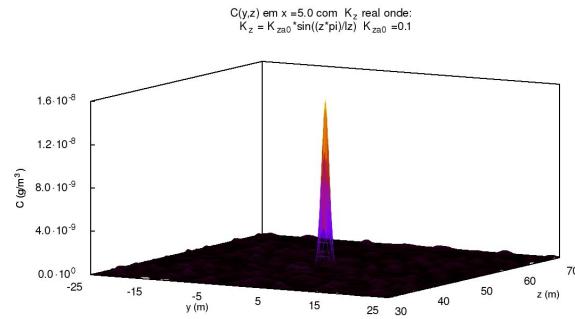


Figura 1: Distribuição  $C(y,z)$  com  $K_z$  real.

semi-positiva, portanto usa-se uma analogia aos fenômenos eletromagnéticos Jackson (1999), onde a densidade de energia é descrita de forma sesquilinear em termos do campo elétrico. Consequentemente a solução gera uma distribuição semi-positiva definida e não linear devolvendo assim uma característica qualitativa presente nos procedimentos de covariância de turbilhões. Então multiplicando a solução complexa  $\mathcal{C}(x,y,z,t)$  pela sua solução complexa conjugada  $\mathcal{C}^*(x,y,z,t)$

$$\mathcal{C}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{nl} \mathcal{C}(x,t) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{L_z}z\right),$$

$$\mathcal{C}(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2} e^{\frac{u}{2K_x}x} e^{\left(\alpha - \frac{u^2}{4K_x}\right)\tau} e^{-\left(\frac{x^2}{4K_x\tau}\right)} \left[ \frac{x}{\sqrt{\pi K_x \tau^3}} - \frac{5\sqrt{K_x}u}{\sqrt{\pi \tau}} \right] d\tau,$$

$$\alpha = - \left[ (K_{za} + iK_{zb}) \left( \frac{l\pi}{L_z} \right)^2 + K_y \left( \frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right],$$

onde a diferença é que  $K_z^* = K_{za} - iK_{zb}$ .

## 3 Resultados e Discussões

Foram determinadas uma série de distribuições espaciais e temporais-espaciais e comparadas com distribuições com o coeficiente de difusão real obtidas nas mesmas condições como em 1 e 2. Mostramos a capacidade do modelo de reproduzir esses resultados sem nenhum comportamento turbulento apenas usando um coeficiente complexo com parte imaginária zero que nada mais é que a representação do conjunto dos reais no conjunto dos complexos.

Devido ao fato de por enquanto não existir uma prescrição de como determinar os parâmetros do modelo de forma à representar o fenômeno físico então

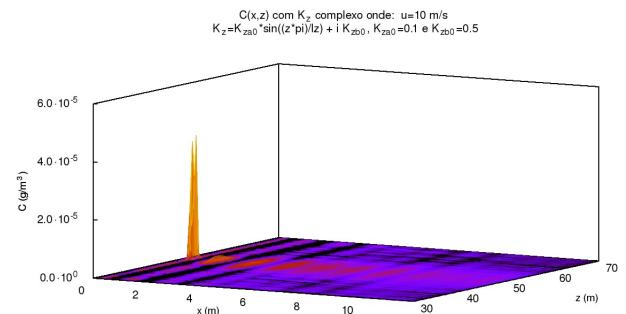
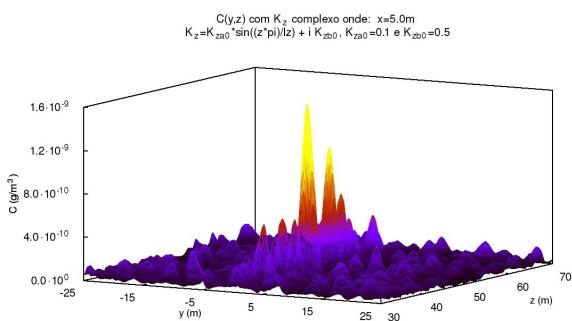


Figura 2: Distribuição  $C(y,z)$  com  $K_z$  complexo.

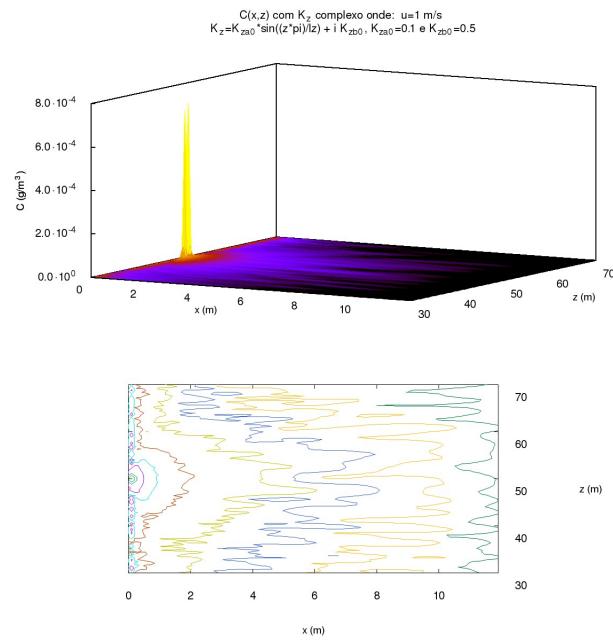


Figura 3: Distribuição e Mapa das concentrações  $C(x,z)$  com vento fraco.

geram-se soluções para uma variedade de partes imaginárias dos coeficientes de difusão. Assim avalia-se o comportamento da solução ao variar a parte imaginária do coeficiente de difusão onde observa-se um alargamento da distribuição juntamente com oscilações o que concorda com o aumento do coeficiente, que no caso real quanto maior coeficiente de difusão maior é a dispersão.

O fenômeno de meandro observado na distribuição e no mapa 3, que em condições de vento fraco e próximo a fonte a dispersão de poluentes é irregular e indefinida onde a pluma está sujeita a ondulações horizontais à direção do vento também foi detectada como em Gisch et al. (2015). Este fenômeno não é observado na distribuição nem no mapa 4 em condições de vento forte.

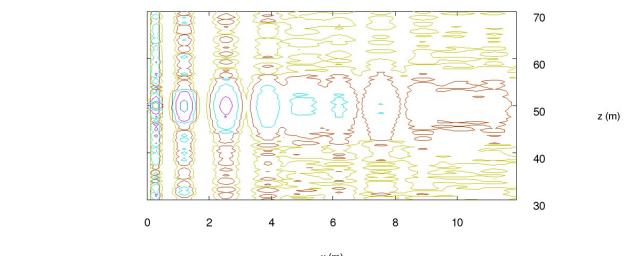


Figura 4: Distribuição e Mapa das concentrações  $C(x,z)$  com vento forte.

## 4 Conclusões

O modelo de dispersão de poluentes com coeficiente de difusão real e complexo foi comparado para a mesma situação podendo observar qualitativamente a inclusão da fase no modelo. O modelo de dispersão de poluentes presente abre a possibilidade de descrever propriedades filigranas do fenômeno ao custo de poucos parâmetros. Descrições comparáveis com um modelo puramente real precisaria de um conjunto exorbitante de parâmetros para obter o mesmo efeito. Todos os resultados ainda são preliminares para garantir que esta será uma modificação justificada a partir de primeiros princípios, mas pretende-se estudar e incluir uma dependência temporal e espacial mais adequada no coeficiente de difusão e até mesmo substituir o coeficiente de difusão real por um complexo nas demais direções e subsequentemente validar os resultados com resultados experimentais.

## Agradecimentos

Agradeço a CNPq a CAPES e a Linhares Geração S.A.

## Referências

- Arya, S. P. (1999). *Air Pollution Meteorology and Dispersion*. Oxford University Press, New York, USA.
- Bodmann, B. E. J., Zabadal, J. R. S., Vilhena, M. T., Quadros, R. (2013). On coherent structures from a

diffusion-like model. Em: *Integral Methods in Science and Engineering*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, pp. 1–10.

Gisch, D. L., Bodmann, B. E. J., Vilhena, M. T. (2015). Two reasons why pollution dispersion modelling needs sesquilinear forms. Em: *Integral Methods in Science and Engineering*, Springer International Publishing Switzerland, p Umpublished.

Hussain, A. K., Fazle, M. (1986). Coherent structures and turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 173, 303, URL [http://www.journals.cambridge.org/abstract\\_S0022112086001192](http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112086001192).

Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*, 3º edn. Wiley, New York, NY, URL <http://cdsweb.cern.ch/record/490457>.

Stull, R. B. (1988). *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Hollandia.