



Ciência e Natura

ISSN: 0100-8307

cienciaenaturarevista@gmail.com

Universidade Federal de Santa Maria

Brasil

Knackfuss, Rosenei Felipe; Oberoffer Stefenon, Leticia  
Estudo da Dinâmica de um Gás Confinado em Placas Paralelas Heterogêneas Utilizando  
o Modelo S  
Ciência e Natura, vol. 38, núm. 3, septiembre-diciembre, 2016, pp. 1180-1190  
Universidade Federal de Santa Maria  
Santa Maria, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467547716004>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

re<sup>o</sup>alyc.org

Sistema de Informação Científica  
Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

## Estudo da Dinâmica de um Gás Confinado em Placas Paralelas Heterogêneas Utilizando o Modelo S

Study the dynamics of a Confined Gas plates Heterogeneous Parallel Using the Model S

Rosenei Felipe Knackfuss<sup>1</sup> e Leticia Oberoffer Stefenon<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

<sup>2</sup>UNIFRA- Centro Universitário Franciscano, RS, Brasil  
rfknackfuss@gmail.com; leticia.oberoffer@gmail.com

### Resumo

*Neste trabalho, uma versão analítica do método de ordenadas discretas (ADO) é utilizada no desenvolvimento de soluções para problemas de gases rarefeitos confinados por duas placas paralelas infinitas com constituições químicas diferentes, isto é, sem a condição de simetria. A modelagem dos problemas (Fluxo de Poiseuille e Creep Térmico) é realizada a partir do modelo cinético S, derivado da equação linearizada de Boltzmann. A fim de descrever o processo de interação entre o gás e a superfície, utiliza-se o núcleo de Maxwell que apresenta um único coeficiente de acomodação e o núcleo de Cercignani-Lampis definido em termos dos coeficientes de acomodação do momento tangencial e o coeficiente de acomodação da energia cinética. Uma série de resultados são apresentados a fim de estabelecer uma comparação dos efeitos de superfície para os problemas apresentados de Fluxo de Poiseuille e Creep Térmico.*

**Palavras-chave:** Dinâmica de Gases Rarefeitos, Núcleo de Maxwell, Núcleo de Cercignani-Lampis, Método de Ordenadas Discretas.

### Abstract

*In this work, an analytical version of the discrete ordinates method (ADO) is used in the developing solutions for problems rarefied gases confined by two infinite parallel plates with different chemical constitutions, that is without symmetry condition. The modeling of the problems (Poiseuille Flow and Thermal Creep) is performed from the kinetic model S, derived from the linearized Boltzmann equation. In order to describe the process of interaction between the gas and the surface, it uses the core Maxwell having a single coefficient of accommodation and core-Cercignani Lampis defined in terms of coefficients accommodation of tangential moment and the coefficient of accommodation kinetic energy. A number of results are presented in order to establish a comparison of surface effects to the problems presented.*

**Keywords:** Rarefied gas dynamics, Maxwell Center, Cercignani-Lampis Center, Discrete Ordinate Method.

## 1 Introdução

A Dinâmica de Gases Rarefeitos (DGR), tem por objetivo o estudo de fenômenos relacionados ao escoamento de gases em sistemas com comprimento característico da mesma ordem de grandeza do livre caminho médio das moléculas de gás. Um dos fatores que motivaram o desenvolvimento de pesquisas envolvendo a dinâmica de gases rarefeitos é a diversidade de aplicações que essa área contempla, como por exemplo, o estudo de fluxo de gases em microcanais. Os problemas de dinâmica de gases são resolvidos baseados no estado de rarefação do gás (17), este estado é classificado pelo número de Knudsen ( $Kn$ ), definido como a razão entre o comprimento do livre caminho médio molecular e o comprimento característico (23). Dependendo do valor que o número de Knudsen assume, de acordo com Karniadakis e Beskok (10) o regime de escoamento do fluxo gasoso pode ser dividido em quatro tipos: Regime hidrodinâmico ( $Kn \leq 10^{-2}$ ), Regime “Slip-flow” ( $10^{-2} < Kn < 10^{-1}$ ), Regime de transição ( $10^{-2} < Kn < 10$ ) e Regime de moléculas livres ( $Kn \geq 10$ ). Nestes problemas, não se pode desprezar as interações do gás com as superfícies, que dependendo da constituição química determinam a interação das mesmas com o gás. Aqui, destaca-se o núcleo de espalhamento de Maxwell e o núcleo de espalhamento de Cercignani-Lampis que apresenta dois coeficientes de acomodação: o coeficiente de acomodação do momento tangencial ( $\alpha_t$ ) e o coeficiente de acomodação da energia cinética devido a componente normal de velocidade ( $\alpha_n$ ). Uma versão analítica do método de Ordenadas Discretas (2) tem sido usada para resolver alguns problemas baseados nas equações cinéticas (modelo **BGK** (1), modelo **S** (16), modelo **GJ** (9), modelo **MRS** (8)) e na equação linearizada de Boltzmann (6) associados as condições de contorno de Maxwell e Cercignani-Lampis. Neste trabalho, apresenta-se resultados analíticos e numéricos para os problemas de Fluxo de Poiseuille e *Creep* Térmico, baseado no modelo **S** considerando-se o gás confinado entre placas paralelas heterogêneas e utilizando-se as condições de contorno de Maxwell e Cercignani-Lampis.

## 2 Formulação Geral

Considera-se a equação cinética escrita em termos de uma perturbação  $h(\tau, c)$ , para a função de distribuição Maxwelliana local, dada por

$$C_y \frac{\partial}{\partial \tau} h(\tau, c) + \epsilon h(\tau, c) = \epsilon \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c'^2} h(\tau, c') \mathbf{F}(c' : c) dc'_x dc'_y dc'_z + \mathbf{S}(c) \quad (1)$$

onde o núcleo  $\mathbf{F}(c':c)$  de espalhamento é definido (19)

como

$$\mathbf{F}(c', c) = 1 + 2(c' \cdot c) + \frac{2}{3} \left( c'^2 - \frac{3}{2} \right) \left( c^2 - \frac{3}{2} \right) + \beta \mathbf{M}(c', c) \quad (2)$$

com

$$\mathbf{M}(c', c) = (4/15)(c' \cdot c)(c'^2 - 5/2)(c^2 - 5/2), \quad (3)$$

quando  $\beta = 0$  tem-se a equação para o modelo **BGK** e quando  $\beta = 1$  tem-se o modelo **S** que será a base neste trabalho para estabelecer os resultados numéricos e algumas comparações numéricas com o modelo /bf BGK.

Usa-se a variável  $\tau$  adimensional do espaço, escrito em termos do livre caminho médio  $l$ , as três componentes do vetor velocidade ( $c_x, c_y, c_z$ ) são expressas em unidades adimensionais e

$$\epsilon = \sigma_0^2 \eta_0 \pi^{1/2} l \quad (4)$$

onde  $\sigma_0$  é o diâmetro das partículas do gás e  $\eta_0$  é a densidade (constante) das partículas gasosas.

Na Eq.(1), considera-se o termo de fonte  $\mathbf{S}(c)$  escrito como

$$\mathbf{S}(c) = -c_y \left[ K_p + K_t \left( c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 - 5/2 \right) \right], \quad (5)$$

quando escolhe-se ( $K_p \neq 0$  e  $K_t = 0$ ), ( $K_p = 0$  e  $K_t \neq 0$ ) define-se, respectivamente, os problemas de Fluxo de Poiseuille e *Creep* Térmico.

Neste trabalho, investiga-se um gás rarefeito confinado entre duas placas paralelas, com constituições químicas diferentes, separadas a uma distância  $2a$  ( $\tau = \pm a$ ) que quando está sujeito a um gradiente (constante) de pressão ( $K_p$ ) ortogonal à direção do fluxo, caracteriza o problema de Fluxo de Poiseuille. Quando o fluxo desse gás se dá através de um gradiente de temperatura ( $K_t$ ) na direção paralela às placas que delimitam o gás, tem-se o problema *Creep* Térmico.

Nesse sentido, adiciona-se à Eq.(1) as condições de contorno de Maxwell e de Cercignani-Lampis (5; 6) que são dadas, respectivamente, por

$$h(-a, c_x, c_y, c_z) - (1 - \alpha) h(-a, -c_x, c_y, c_z) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(-a, -c'_x, c'_y, c'_z) dc'_x dc'_z dc'_y, \quad (6)$$

$$h(a, -c_x, c_y, c_z) - (1 - \alpha) h(a, c_x, c_y, c_z) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(a, c'_x, c'_y, c'_z) dc'_x dc'_z dc'_y, \quad (7)$$

onde  $\alpha \in (0, 1]$ , representa o coeficiente de acomodação das paredes e  $c_y > 0$ ,

$$h(-a, c_x, c_y, c_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(-a, -c'_x, c'_y, c'_z) R(c'_x, -c'_y, c'_z : c_x, c_y, c_z) dc'_x dc'_y dc'_z \quad (8)$$

e

$$h(a, c_x, -c_y, c_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(a, c'_x, c'_y, c'_z) R(c'_x, c'_y, c'_z : c_x, -c_y, c_z) dc'_x dc'_y dc'_z \quad (9)$$

para  $c_y \in (0, \infty)$  e  $c_x, c_z \in (-\infty, \infty)$ .

O núcleo de espalhamento de Cercignani-Lampis que possui dois coeficientes de acomodação é dado, em coordenadas retangulares por

$$R_l(c'_x, c'_y, c'_z : c_x, c_y, c_z) = \frac{2c'_y}{\pi \alpha_{n_l} \alpha_{t_l} (2 - \alpha_{t_l})} T_l(c'_x : c_x) S_l(c'_y : c_y) T_l(c'_z : c_z) \quad (10)$$

com

$$T_l(x : z) = \exp \left[ - \frac{((1 - \alpha_{t_l})z - x)^2}{\alpha_{t_l} (2 - \alpha_{t_l})} \right] \quad (11)$$

e

$$S_l(x : z) = \exp \left[ - \frac{[(1 - \alpha_{n_l})^{1/2} z - x]^2}{\alpha_{n_l}} \right] \cdot \hat{I}_0 \left[ \frac{2(1 - \alpha_{n_l})^{1/2} |xz|}{\alpha_{n_l}} \right], \quad (12)$$

aqui, para  $l = 1, 2$  representa as paredes do canal.

Para efeitos computacionais escreve-se

$$\hat{I}_0(w) = I_0(w) e^{-w}, \quad (13)$$

onde  $I_0(w)$  é a função de Bessel modificada

$$I_0(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w \cos \phi} d\phi. \quad (14)$$

Com o objetivo de avaliar as quantidades físicas de interesse define-se (19) o perfil de velocidade

$$u(\tau) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(\tau, c_x, c_y, c_z) dc'_x dc'_y dc'_z, \quad (15)$$

e o perfil de fluxo de calor

$$q(\tau) = \pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-c'^2} h(\tau, c_x, c_y, c_z) \cdot \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) c_y dc'_x dc'_y dc'_z. \quad (16)$$

### 3 Formulação Vetorial

Com a finalidade de reduzir o número de variáveis no problema, verifica-se que os resultados desejados podem ser obtidos através de dois momentos de integração da função de distribuição. Assim, multiplica-se a Eq.(1) primeiramente por

$$\Phi_1(c_x, c_z) = \frac{c_x}{\pi} e^{-(c_y^2 + c_z^2)} \quad (17)$$

e integra-se o produto em relação a  $c_x$  e  $c_z$  em  $(-\infty, \infty)$ .

Posteriormente, repete-se o mesmo procedimento multiplicando-se a Eq.(1) por

$$\Phi_2(c_x, c_z) = \left[ \frac{c_x}{(2^{1/2}\pi)} \right] (c_y^2 + c_z^2 - 2) e^{-(c_y^2 + c_z^2)}, \quad (18)$$

e integra-se o produto em relação a  $c_x$  e  $c_z$  em  $(-\infty, \infty)$ .

Considera-se a nova variável  $c_y = \xi$  e obtém-se as seguintes equações balanço

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} h_1(\tau, \xi) + \epsilon h_1(\tau, \xi) = \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi'^2} \cdot \left[ f_{11}(\xi', \xi) h_1(\tau, \xi') + f_{12}(\xi', \xi) h_2(\tau, \xi') \right] d\xi' + a_1(\xi), \quad (19)$$

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} h_2(\tau, \xi) + \epsilon h_2(\tau, \xi) = \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi'^2} \cdot \left[ f_{12}(\xi', \xi) h_1(\tau, \xi') + f_{22}(\xi', \xi) h_2(\tau, \xi') \right] d\xi' + a_2(\xi), \quad (20)$$

onde

$$h_1(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(c_x, c_z) h(\tau, c_x, \xi, c_z) dc_x dc_z, \quad (21)$$

$$h_2(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(c_x, c_z) h(\tau, c_x, \xi, c_z) dc_x dc_z, \quad (22)$$

$$a_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(c_x, c_z) S(c_x, \xi, c_z) dc_x dc_z, \quad (23)$$

$$a_2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(c_x, c_z) S(c_x, \xi, c_z) dc_x dc_z, \quad (24)$$

$$f_{11}(\xi', \xi) = 1 + \left( \frac{2}{15} \right) (\xi^2 - 1/2) (\xi'^2 - 1/2), \quad (25)$$

$$f_{12}(\xi', \xi) = \left( \frac{2}{15} \right) 2^{1/2} (\xi^2 - 1/2) \quad (26)$$

e

$$f_{22}(\xi', \xi) = \frac{4}{15}. \quad (27)$$

O problema pode ser escrito vetorialmente como

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}(\tau, \xi) + \epsilon \mathbf{H}(\tau, \xi) = \epsilon \pi^{-1/2} \mathbf{Q}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi'^2} \mathbf{Q}^T(\xi') \mathbf{H}(\tau, \xi') d\xi' + \mathbf{A}(\xi), \quad (28)$$

onde  $T$  denota a operação transposta, e

$$\mathbf{Q}(\xi) = \begin{bmatrix} (2/15)^{1/2}(\xi^2 - 1/2) & 1 \\ 2(15)^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Escrevendo

$$\mathbf{H}(\tau, \xi) = \mathbf{Q}(\xi) \mathbf{G}(\tau, \xi) \quad (30)$$

e

$$\mathbf{A}(\xi) = \mathbf{Q}(\xi) \Gamma \quad (31)$$

reescreve-se a Eq.(28) como

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}(\tau, \xi) + \epsilon \mathbf{G}(\tau, \xi) = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi') \mathbf{G}(\tau, \xi') d\xi' + \Gamma, \quad (32)$$

onde

$$\Psi(\xi) = \pi^{-1/2} e^{-\xi^2} \mathbf{Q}^T(\xi) \mathbf{Q}(\xi) \quad (33)$$

e

$$\Gamma(\xi) = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\xi^2 - 1/2) K_t \\ \frac{1}{2} K_p + (2^{-1/2}) K_t \end{bmatrix}. \quad (34)$$

A solução geral para a Eq.(32) é dada por

$$\mathbf{G}(\tau, \xi) = \mathbf{G}^h(\tau, \xi) + \mathbf{G}^p(\tau, \xi) \quad (35)$$

onde  $\mathbf{G}^h(\tau, \xi)$  representa a solução do problema homogêneo e  $\mathbf{G}^p(\tau, \xi)$  a solução do problema particular.

Com o objetivo de adequar as condições de contorno às Eq.(32), utiliza-se a mesma metodologia, ou seja, multiplica-se as condições de contorno pelos momentos de integração  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ .

$$\mathbf{G}(\mp a, \pm \xi) = (1 - \alpha_l) \mathbf{G}(\mp a, \pm \xi) \quad (36)$$

Para as condições de contorno de Cercignani-Lampis Eqs. (8) e (9) tem-se

$$\mathbf{G}(\mp a, \pm \xi) = \int_0^{\infty} \mathbf{T}(\xi' : \xi) \mathbf{G}(\mp a, \mp \xi') d\xi' \quad (37)$$

onde

$$\mathbf{T}(\xi' : \xi) = \mathbf{Q}(\xi)^{-1} \mathbf{A}_l \mathbf{Q}(\xi') k(\xi' : \xi), \quad (38)$$

aqui tem-se

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} 1 - \alpha t_l & 0 \\ 0 & (1 - \alpha t_l)^3 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

Assim, para as condições de contorno de Maxwell, Eqs.(6) e (7) encontra-se, a equação na forma vetorial como

$$\mathbf{G}(\mp a, \pm \xi) = (1 - \alpha_l) \mathbf{G}(\mp a, \pm \xi) \quad (40)$$

Para as condições de contorno de Cercignani-Lampis Eqs. (8) e (9) tem-se

$$\mathbf{G}(\mp a, \pm \xi) = \int_0^{\infty} \mathbf{T}(\xi' : \xi) \mathbf{G}(\mp a, \mp \xi') d\xi' \quad (41)$$

onde

$$\mathbf{T}(\xi' : \xi) = \mathbf{Q}(\xi)^{-1} \mathbf{A}_l \mathbf{Q}(\xi') k(\xi' : \xi), \quad (42)$$

aqui tem-se

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} 1 - \alpha t_l & 0 \\ 0 & (1 - \alpha t_l)^3 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

observa-se que  $l$  nas Eq.(43) assume o valor 1 ou 2, que representa as paredes do canal e  $k(\xi' : \xi)$  é da forma

$$k(\xi' : \xi) = e^{-\xi'^2} f(\xi' : \xi) \quad (44)$$

com

$$f(\xi' : \xi) = \frac{2\xi'}{\alpha n} \exp \left[ - \frac{[(1 - \alpha n)^{1/2} \xi - \xi']^2}{\alpha n} \right] \hat{I}_0 \left[ \frac{2(1 - \alpha n)^{1/2} \xi' \xi}{\alpha n} \right] \quad (45)$$

para  $\xi, \xi' \in (0, \infty)$ .

Com base na notação vetorial, o perfil de velocidade Eq.(15), pode ser reescrito em ordenadas discretas como

$$u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) [1 \quad 0] \mathbf{G}(\tau, \xi) d\xi \quad (46)$$

Da mesma forma, o perfil de fluxo de calor é reescrito como

$$q(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \begin{bmatrix} (\xi^2 - 1/2) & 2^{1/2} \end{bmatrix} \mathbf{G}(\tau, \xi) d\xi. \quad (47)$$

Além do Perfil de velocidade e do Perfil de fluxo de calor, avalia-se também a taxa de fluxo de partículas

$$U = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a u(\tau) d\tau \quad (48)$$

e a taxa de fluxo de calor

$$Q = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a q(\tau) d\tau. \quad (49)$$

## 4 Desenvolvimento da solução

Para obtenção dos resultados numéricos dos problemas propostos, utiliza-se a versão analítica do método de Ordenadas Discretas (ADO), no entanto, primeiramente é necessário desenvolver uma solução particular, devido a presença do termo de fonte que verifica-se na Eq.(32).

Segundo Siewert (20) tem-se a proposta de solução escrita como

$$\mathbf{G}^p(\tau, \xi) = \mathbf{B}\tau^2 + \mathbf{C}\tau\xi + \mathbf{D}\xi^2 + \mathbf{E}\xi + \mathbf{F} \quad (50)$$

onde  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}$  são vetores  $(2 \times 1)$  constantes.

Substituindo-se a proposta de solução Eq.(50) na Eq.(32) encontra-se a solução particular, dos problemas de Fluxo de Poiseuille e *Creep* Térmico, respectivamente, dependendo das opções de  $K_p$  e  $K_t$  como

$$\mathbf{G}^p(\tau, \xi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{30}/10K_p - (3/4)\sqrt{30}K_t \\ (\tau^2 - 2\tau\xi + 2\xi^2)K_p \end{bmatrix}. \quad (51)$$

### 4.1 Solução em Ordenadas Discretas

Para desenvolver a solução do problema homogêneo dado por

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{G}(\tau, \xi) + \epsilon \mathbf{G}(\tau, \xi) = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi') \mathbf{G}(\tau, \xi') d\xi', \quad (52)$$

com

$$\psi(\xi) = \pi^{-1/2} e^{-\xi^2} \mathbf{Q}^T(\xi) \mathbf{Q}(\xi) \quad (53)$$

define-se um esquema de quadratura de Gauss-Legendre com  $N$  pontos associados a versão analítica do método de ordenadas discretas.

Conforme Scherer, Prolo e Barichello (15) propõe-se, como solução para o problema homogêneo, uma solução na forma exponencial

$$\mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi) = \Phi(v, \xi) e^{-\epsilon \tau / v_j} \quad (54)$$

onde a constante de separação  $v_j$  e as funções  $\Phi(v, \xi)$  que são as componentes independentes da variável espacial das soluções elementares, serão determinadas. Para isso, primeiramente, discretiza-se a Eq.(52) pela fórmula de quadratura de Gauss-Legendre e reescreve-se a equação como

$$\begin{aligned} & \pm \xi \frac{d}{d\tau} \mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi_i) + \epsilon \mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi_i) = \\ & \epsilon \sum_{k=1}^N w(k) \Psi(\xi'_k) \left[ \mathbf{G}^h(\tau, \xi'_k) + \mathbf{G}^h(\tau, -\xi'_k) d\xi' \right] \end{aligned} \quad (55)$$

denota-se por  $\{\xi_k\}$  e  $\{\omega_k\}$ , respectivamente, os conjuntos dos  $N$  pontos de quadratura e  $N$  pesos obtidos para o intervalo de  $[0, \infty)$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

A partir daí, substitui-se a solução proposta na Eq.(54) e Eq.(55), obtendo-se, para  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} (v \mp \xi_i) \Phi_{\pm}(v) &= v \sum_{k=1}^N \omega(k) \Psi(\xi'_k) \\ & [\Phi_+(v, \xi'_k) + \Phi_-(v, -\xi'_k)] \end{aligned} \quad (56)$$

onde  $\Phi_+(v)$  e  $\Phi_-(v)$  denotam vetores  $2N \times 1$ , nos quais as  $2 \times 1$  componentes são, respectivamente,  $\Phi(v, \xi_k)$  e  $\Phi(v, -\xi_k)$ .

Da relação

$$U_{(k)} = \Phi_+(v) + \Phi_-(v) \quad (57)$$

e da Eq.(56) deduz-se um problema de autovalores e autovetores

$$[D - 2W]U = \lambda U, \quad (58)$$

onde  $W$  é a matriz de dimensão  $2N \times 2N$  na qual a cada  $2 \times 2N$  linhas é dada por

$$W_i = \left( \frac{1}{\xi_i} \right)^2 \left[ w_1 \Psi(\xi'_1), w_2 \Psi(\xi'_2), \dots, w_N \Psi(\xi'_N) \right] \quad (59)$$

e

$$D = \Xi^{-2} = \text{diag} \left\{ \left( \frac{1}{\xi_1} \right)^2 I, \left( \frac{1}{\xi_2} \right)^2 I, \dots, \left( \frac{1}{\xi_N} \right)^2 I \right\}, \quad (60)$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$  e os valores definidos por

$$\lambda = \frac{1}{v^2} \quad (61)$$

são os autovalores e  $U$  os autovetores reais e distintos do problema.

Encontradas as constantes de separação  $(v_j)$  e as soluções elementares  $\Phi_{\pm}(v_j)$  escritas como

$$\Phi_+(v_j) = \frac{1}{2v_j} \text{diag} [(v_j + \xi_1) \mathbf{I}, (v_j + \xi_2) \mathbf{I}, \dots, (v_j + \xi_N) \mathbf{I}] \mathbf{U}_j \quad (62)$$

e

$$\Phi_-(v_j) = \frac{1}{2v_j} \text{diag} [(v_j - \xi_1) \mathbf{I}, (v_j - \xi_2) \mathbf{I}, \dots, (v_j - \xi_N) \mathbf{I}] \mathbf{U}_j, \quad (63)$$

tem-se a solução em ordenadas discretas da Eq.(52) como

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^h(\tau, \pm \xi_i) &= \sum_{j=2}^{2N} \left[ A_j \Phi(v_j, \pm \xi_i) e^{-\epsilon(a+\tau)/v_j} + \right. \\ & \left. B_j \Phi(v_j, \mp \xi_i) e^{-\epsilon(a-\tau)/v_j} \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Por se tratar de um problema conservativo (3), tem-se que um dos autovalores  $\lambda$  tende a zero quando  $N$  tende

ao infinito, logo uma constante de separação ( $\nu$ ) tende ao infinito. Assim, negligencia-se a maior constante de separação entre  $\nu_j$  e obtém-se a solução geral do problema

$$\mathbf{G}(\tau, \xi) = \mathbf{G}^P(\tau, \xi) + A_1^* \phi^1 + B_1^* \phi^2(\tau, \pm \xi_i) + \sum_{j=2}^{2N} \left[ A_j \Phi(\nu_j, \pm \xi_i) e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} + B_j \Phi(\nu_j, \mp \xi_i) e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j} \right] \quad (65)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Aqui são introduzidas soluções exatas  $\Phi^1$ , de dimensão  $2N \times 1$ , definido por  $N$  vetores da forma

$$\phi^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

e  $\Phi_{\pm}^2$  vetor com  $N$  componentes

$$\phi^2(\tau, \xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon\tau - \xi \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Considerando que neste trabalho avalia-se gases rarefeitos confinados entre placas paralelas com constituições químicas diferentes, não utiliza-se a condição de simetria,  $G(\tau, \xi) = G(-\tau, -\xi)$ , o que influencia no número de constantes arbitrárias presentes na solução do problema homogêneo, ou seja, obtém-se um sistema algébrico linear  $4N \times 4N$ .

As constantes arbitrárias  $A_j$  e  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N$ , são determinadas substituindo-se a solução geral, Eq.(65), nas condições de contorno propostas por Maxwell Eq.(40), obtendo-se

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{2N} \left[ A_j \left[ \Phi(\nu_j, \xi_i) - (1 - \alpha_1) \Phi(\nu_j, -\xi_i) \right] + \right. \\ & B_j \left[ \Phi(\nu_j, -\xi_i) - (1 - \alpha_1) \Phi(\nu_j, \xi_i) \right] e^{-2a\epsilon/\nu_j} \left. + \right. \\ & A_1^* \alpha_1 \phi_1 - B_1^* \left[ a\epsilon \alpha_1 \phi_1 + (\alpha_1 - 2) \phi_2(0, \xi_i) \right] = R_1(\xi_i) \\ & \sum_{j=2}^{2N} \left[ A_j \left[ \Phi(\nu_j, -\xi_i) - (1 - \alpha_2) \Phi(\nu_j, \xi_i) \right] e^{-2a\epsilon/\nu_j} + \right. \\ & B_j \left[ \Phi(\nu_j, \xi_i) - (1 - \alpha_2) \Phi(\nu_j, -\xi_i) \right] \left. + \right. \\ & + A_1^* \alpha_2 \phi_1 - B_1^* \left[ a\epsilon \alpha_2 \phi_1 + (\alpha_2 - 2) \phi_2(0, \xi_i) \right] = R_2(\xi_i) \end{aligned} \quad (68)$$

onde,

$$R_1(\xi_i) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \sqrt{30}/20 K_p + (3/8) \alpha_1 \sqrt{30} K_t \\ [-2a \xi - \alpha_1 ((1/2)a^2 - a\xi + \xi^2)] K_p \end{bmatrix} \quad (69)$$

e

$$R_2(\xi_i) = \begin{bmatrix} (-\alpha_2 \sqrt{30}/20) K_p + (3/8) \alpha_2 \sqrt{30} K_t \\ [-2a \xi - \alpha_2 ((1/2)a^2 - a\xi + \xi^2)] K_p \end{bmatrix} \quad (70)$$

De forma análoga ao núcleo de Maxwell, substitui-se a solução geral nas condições de contorno propostas por Cercignani-Lampis Eq.(41), obtendo-se

$$\begin{aligned} & A_1 \left\{ \phi^1 - \left[ \phi^1 \sum_{k=1}^N \omega_k T(\xi'_k, \xi_i) \right] \right\} + \\ & B_1 \left\{ \phi_{(-\tau, \xi)}^2 - \left[ \sum_{k=1}^N \omega_k T(\xi'_k, \xi_i) \phi_{(-\tau, -\xi_k)}^2 \right] \right\} + \\ & \sum_{j=2}^{2N} A_j e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j} \left[ \Phi(\nu_j, \xi) - \sum_{k=1}^N \omega_k T(\xi'_k, \xi_i) \Phi(\nu_j, -\xi_k) \right] + \\ & \sum_{j=2}^{2N} B_j e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} \left[ \Phi(\nu_j, -\xi) - \sum_{k=1}^N \omega_k T(\xi'_k, \xi_i) \Phi(\nu_j, \xi_k) \right] = R_1(\xi_i) \\ & A_1 \left\{ \phi^1 - \left[ \phi^1 \sum_{k=1}^N \omega_k T(\xi'_k, \xi_i) \right] \right\} + \\ & B_1 \left\{ \phi_{(\tau, -\xi)}^2 - \left[ \sum_{k=1}^N \omega_k T(\xi'_k, \xi_i) \phi_{(\tau, \xi_k)}^2 \right] \right\} + \\ & \sum_{j=2}^{2N} A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/\nu_j} \left[ \Phi(\nu_j, -\xi) - \sum_{k=1}^N \omega_k T(\xi'_k, \xi_i) \Phi(\nu_j, \xi_k) \right] + \\ & \sum_{j=2}^{2N} B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/\nu_j} \left[ \Phi(\nu_j, \xi) - \sum_{k=1}^N \omega_k T(\xi'_k, \xi_i) \Phi(\nu_j, -\xi_k) \right] = R_2(\xi_i) \end{aligned} \quad (71)$$

onde para o problema de Fluxo de Poiseuille

$$R_1(\xi_i) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N w(k) e^{-\xi'^2/2} f(\xi'_k, \xi_i) (1 - \alpha t_1) \sqrt{30}/20 \\ \sum_{k=1}^N w(k) e^{-\xi'^2/2} f(\xi'_k, \xi_i) (1 - \alpha t_1) \Omega_1 \end{bmatrix} -$$



$$R_2(\xi_i) = \begin{bmatrix} -\sqrt{30}/20 \\ \epsilon \frac{a^2}{2} - a\xi - \xi^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N w(k) e^{-\xi'^2} f(\xi'_k, \xi_i) (1 - \alpha t_2) \sqrt{30}/20 \\ \sum_{k=1}^N w(k) e^{-\xi'^2} f(\xi'_k, \xi_i) (1 - \alpha t_2) \Omega_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{30}/20 \\ \epsilon \frac{a^2}{2} - a\xi - \xi^2 \end{bmatrix} \text{ onde}$$

$$\Omega_1 = (\sqrt{2/15}(\xi'^2 - 1/2)\sqrt{30}/20) - (\sqrt{2/15}(\xi^2 - 1/2)\sqrt{30}/20(1 - \alpha t_1)^2) + ((1/2)a^2 - a\xi' + \xi'^2) \quad (72)$$

e

$$\Omega_2 = (\sqrt{2/15}(\xi'^2 - 1/2)\sqrt{30}/20) - (\sqrt{2/15}(\xi^2 - 1/2)\sqrt{30}/20(1 - \alpha t_2)^2) + ((1/2)a^2 - a\xi' + \xi'^2). \quad (73)$$

e para o problema *Creep* Térmico obtém-se

$$R_1(\xi_i) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N w(k) e^{-\xi'^2} f(\xi'_k, \xi_i) (1 - \alpha t_1)^3 (-3/8\epsilon) \sqrt{30} \\ \sum_{k=1}^N (1 - \alpha t_1) e^{-\xi'^2} f(\xi'_k, \xi_i) (-3/4) \Lambda_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-3/8\epsilon) \sqrt{30} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

e

$$R_2(\xi_i) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N w(k) e^{-\xi'^2} f(\xi'_k, \xi_i) (1 - \alpha t_2)^3 (-3/8\epsilon) \sqrt{30} \\ \sum_{k=1}^N (1 - \alpha t_2) e^{-\xi'^2} f(\xi'_k, \xi_i) (-3/4) \Lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-3/8\epsilon) \sqrt{30} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

onde

$$\Lambda_1 = (\xi'^2 - 1/2) - (\xi^2 - 1/2)(1 - \alpha t_1)^2 \quad (76)$$

e

$$\Lambda_2 = (\xi'^2 - 1/2) - (\xi^2 - 1/2)(1 - \alpha t_2)^2 \quad (77)$$

## 5 Quantidades Físicas de Interesse

Para determinar as grandezas físicas de interesse, substitui-se a solução geral do problema nas Eqs.(46)-(49).

### 5.1 Núcleo Difuso-Especular

- Perfil de velocidade:

$$u_p(\tau) = \left(\frac{1}{2}\right) (\tau^2 + 1) K_p + A_1^* + B_1^* \epsilon \tau + \sum_{j=2}^{2N} \left[ A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/v_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/v_j} \right] V(v_j) \quad (78)$$

com

$$V(v_j) = \sum_{k=1}^N \omega_k \Psi_{(\xi_k)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \left[ \Phi_{(v_j, \xi_k)} + \Phi_{(v_j, -\xi_k)} \right] \quad (79)$$

- Perfil de fluxo de calor:

$$q_p(\tau) = \frac{3}{4\epsilon} K_p - \frac{15}{8\epsilon} K_t + \sqrt{\frac{15}{2}} \sum_{j=2}^{2N} \left[ A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/v_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/v_j} \right] \quad (80)$$

onde

$$Y(v_j) = \sum_{k=1}^N \omega_k \Psi_{(\xi_k)} \begin{bmatrix} \xi_k^2 - \frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \left[ \Phi_{(v_j, \xi_k)} + \Phi_{(v_j, -\xi_k)} \right] \quad (81)$$

- Taxa de Fluxo de Partícula:

$$U_p = \frac{1}{2a^2} \left[ a(a^2/3 + 1) K_p + 2a A_1^* + 2 \sum_{j=2}^{2N} v_j (A_j + B_j) (1 - e^{-2a\epsilon/v_j}) V(v_j) \right] \quad (82)$$

- Taxa de Fluxo de Calor:

$$Q_p = \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{3a}{2\epsilon} K_p - \frac{15a}{4\epsilon} K_t + \frac{2}{\epsilon} \sqrt{\frac{15}{8}} \sum_{j=2}^{2N} v_j (A_j + B_j) (1 - e^{-2a\epsilon/v_j}) Y(v_j) \right] \quad (83)$$

### 5.2 Núcleo Cercignani-Lampis

- Perfil de velocidade:

$$u_p(\tau) = \frac{1}{2} (\tau^2 + 1) K_p + A_1^* + B_1^* \tau + \sum_{j=2}^{2N} \left[ A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/v_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/v_j} \right] V(v_j) \quad (84)$$



com

$$V(v_j) = \sum_{k=1}^N \omega_k \Psi_{(\xi_k)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_{(v_j, \xi_k)} + \Phi_{(v_j, -\xi_k)} \end{bmatrix} \quad (85)$$

- Perfil de fluxo de calor:

$$q_p(\tau) = \frac{3}{4\epsilon} K_p - \frac{15}{8\epsilon} K_t + \sqrt{\frac{15}{2}} \sum_{j=2}^{2N} \left[ A_j e^{-\epsilon(a+\tau)/v_j} + B_j e^{-\epsilon(a-\tau)/v_j} \right] Y(v_j) \quad (86)$$

onde

$$Y(v_j) = \sum_{k=1}^N \omega_k \Psi_{(\xi_k)} \begin{bmatrix} \xi_k^2 - \frac{1}{2} \\ 2^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_{(v_j, \xi_k)} + \Phi_{(v_j, -\xi_k)} \end{bmatrix} \quad (87)$$

- Taxa de Fluxo de Partícula:

$$U_p = \frac{1}{2a^2} \left[ a(a^2/3 + 1)K_p + 2aA_1^* + 2 \sum_{j=2}^{2N} v_j (A_j + B_j) \left( 1 - e^{-2a\epsilon/v_j} \right) V(v_j) \right] \quad (88)$$

- Taxa de Fluxo de Calor:

$$Q_p = \frac{1}{2a^2} \left[ (3a/2)K_p - \frac{15a}{4\epsilon} K_t + 2\sqrt{\frac{15}{8}} \sum_{j=2}^{2N} v_j (A_j + B_j) \left( 1 - e^{-2a\epsilon/v_j} \right) Y(v_j) \right] \quad (89)$$

## 6 Resultados Numéricos

Para obter os resultados numéricos correspondentes as quantidades de interesse definidas pelas Eqs.(46)-(49), define-se primeiramente o esquema de quadratura a ser aplicado juntamente com a versão analítica do método de ordenadas discretas.

Deseja-se mapear os pontos  $\xi$  do intervalo  $[0, \infty)$  para os pontos  $u(\xi)$  do intervalo  $[0, 1]$ , para isso, utiliza-se a transformação não linear

$$u(\xi) = e^{-\xi} \quad (90)$$

a seguir, utiliza-se o esquema de quadratura de Gauss-Legendre (4) mapeado linearmente no intervalo  $[0, 1]$ . Após definir o esquema de quadratura, determina-se os autovalores (constante de separação) e autovetores.

Posteriormente, determina-se as funções elementares definidas pelas Eqs.(62)-(63), a fim de resolver o sistema algébrico linear que define as constantes arbitrárias para a solução em ordenadas discretas. Para a implementação computacional utiliza-se a linguagem FORTRAN fazendo uso de subrotinas dos pacotes LINPACK (7) e EISPACK (21).

Para os resultados apresentados, considera-se o parâmetro  $\epsilon = \epsilon_p = 1$ , a largura do canal  $2a$ , o coeficiente de acomodação  $\alpha$  e a posição normalizada  $\tau/a$  no canal em que ocorre o fenômeno. A convergência é obtida a partir de  $N = 60$  na implementação do número de pontos de quadratura. As notações *DE* e *CL* representam, respectivamente, condições de contorno difuso-especular (Maxwell) e condições de contorno de Cercignani-Lampis. Nas tabelas, as notações (-1), (-2), (1) e (2) representam, respectivamente,  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^1$  e  $10^2$ .

Considera-se o gás Argônio (Ar) e os valores para o coeficiente de acomodação tangencial para a placa 1 são formulados em termos dos valores experimentais dados por Lord (13). Para a placa 2, o valor do coeficiente foi reproduzido por Sharipov (18) que segue o trabalho experimental de Porodnov *et al* (14). Em relação ao coeficiente de acomodação normal, utiliza-se os valores baseados nos resultados experimentais apresentados no trabalho de Thomas(22).

Ar:  $\alpha_{t1} = 0,916$ ,  $\alpha_{n1} = 0,222$ ,  $\alpha_{t2} = 0,67$  e  $\alpha_{n2} = 0,440$ .

Tabela 1: Fluxo de Poiseuille: perfil de velocidade  $u(\tau)$ , onde  $2a = 1$ .

$\tau/a$	BGK – CL(12)	BGK – DE(12)	S – DE	S – CL
		$\alpha = \alpha_t$	$\alpha = \alpha_t$	
0,0	-1,10392	-1,15527	-7,00879(-1)	-1,11454
0,1	-1,10747	-1,14392	-6,91825(-1)	-1,11819
0,2	-1,10566	-1,12723	-6,78023(-1)	-1,11641
0,3	-1,09839	-1,10502	-6,59432(-1)	-1,10907
0,4	-1,08542	-1,07698	-6,35932(-1)	-1,09596
0,5	-1,06638	-1,04263	-6,07304(-1)	-1,07670
0,6	-1,04068	-1,00122	-5,73181(-1)	-1,05071
0,7	-1,00730	-9,51548(-1)	-5,32944(-1)	-1,01697
0,8	-9,64435(-1)	-8,91423(-1)	-4,85452(-1)	-9,73688(-1)
0,9	-9,08010(-1)	-8,15975(-1)	-4,28148(-1)	-9,16816(-1)
1,0	-8,17439(-1)	-7,00381(-1)	-3,47998(-1)	-8,25893(-1)

Na Tabela (1) apresenta-se resultados obtidos para o perfil de velocidade considerando as duas condições de contorno (Maxwell e Cercignani-Lampis). Utiliza-se, para as condições de contorno proposta por Maxwell  $\alpha = \alpha_t$ , ou seja,  $\alpha_{t1} = 0,916$  e  $\alpha_{t2} = 0,67$ . Percebe-se na tabela 7.1 que os resultados encontrados para o modelo S-CL aproximam-se mais dos resultados obtidos por Knackfuss (12) para o modelo BGK-CL e BGK -DE diferentemente dos valores encontrados para o modelo S-DE que diferem de forma significativa.

Tabela 2: Fluxo de Poiseuille: Taxa de Fluxo de calor,  $Q$ .

$a$	BGK – CL(12)	BGK – DE(12)	S – DE	S – CL
0,05	6,07628(-1)	8,67004(-1)	1,02291	29,23416
0,1	5,25595(-1)	6,75620(-1)	8,64808(-1)	14,21353
0,15	4,70038(-1)	5,74393(-1)	7,80705(-1)	9,19243
0,2	4,28602(-1)	5,07598(-1)	7,24589(-1)	6,67149
0,25	3,95904(-1)	4,58737(-1)	6,82966(-1)	5,15089
0,3	3,95904(-1)	4,20761(-1)	6,50123(-1)	4,13070
0,35	3,69121(-1)	3,90038(-1)	6,23134(-1)	3,39667
0,4	3,46593(-1)	3,64462(-1)	6,00318(-1)	2,84165
0,45	3,27263(-1)	3,42708(-1)	5,80612(-1)	2,40610
0,5	3,10416(-1)	3,23893(-1)	5,63326(-1)	2,05431
1,0	2,10961(-1)	2,15483(-1)	4,59247(-1)	3,88788(-1)
3,0	9,80331(-2)	9,77650(-2)	-8,81116(-3)	-1,10095
5,0	6,42630(-2)	6,36725(-2)	1,41682(-1)	-1,69982
7,0	4,77406(-2)	4,71694(-2)	1,19435(-1)	-2,16345
9,0	3,79460(-2)	3,74355(-2)	1,00545(-1)	-2,58541
10,0	3,44094(-2)	3,39290(-2)	9,29074(-2)	-2,78965
50,0	7,25414(-3)	7,12825(-3)	2,20327(-2)	-10,66534
100,0	3,65031(-3)	3,58554(-3)	1,12259(-2)	-20,48441

Na tabela (2) apresenta-se os resultados obtidos para a Taxa do fluxo de Calor para o caso de um gás confinado entre placas paralelas diferentes. Observa-se que com  $a$  muito pequeno ou muito grande, a taxa de fluxo de calor para o modelo S e condições de contorno de Cercignani-Lampis difere significativamente comparado com os outros modelos analisados.

Tabela 3: *Creep* Térmico: perfil de fluxo de calor  $q(\tau)$ , onde  $2a = 1$ .

$\tau/a$	BGK – CL(11)	BGK – DE(11)	S – DE	S – CL
0,0	-7,95456(-1)	-8,49444(-1)	-1,08082	-9,95036(-1)
0,2	-7,89891(-1)	-8,37501(-1)	-1,08198	-9,87375(-1)
0,4	-7,69944(-1)	-8,12911(-1)	-1,06672	-9,60007(-1)
0,6	-7,31978(-1)	-7,71888(-1)	-1,03218	-9,08679(-1)
0,8	-6,66169(-1)	-7,04812(-1)	-9,70140	-8,22009(-1)
1,0	-5,20247(-1)	-5,61409(-1)	-8,36026	-6,39701(-1)

Na tabela (3) apresenta-se resultados para o fluxo de calor para o problema *Creep* Térmico. Considera-se a largura do canal  $2a = 1$ , para o modelo S-DE tem-se  $\alpha_{t1} = 0,916$  e  $\alpha_{t2} = 0,67$ , já que a condição de contorno difuso-especular utiliza apenas um coeficiente de acomodação para cada placa. Percebe-se que os resultados para o modelo S-DE diferem significativamente em alguns pontos quando comparados com os outros modelos analisados.

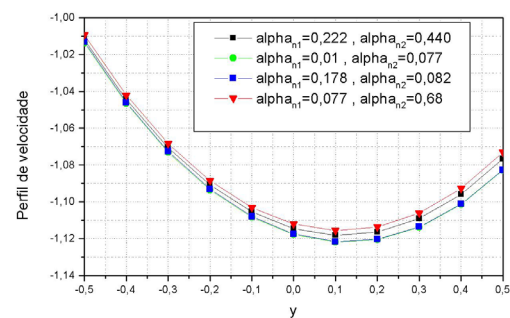
Tabela 4: *Creep* Térmico: Taxa de Fluxo de partícula,  $U$ .

$a$	BGK – CL(11)	BGK – DE(11)	S – DE	S – CL
0,1	6,07628(-1)	6,74913(-1)	9,36990(-1)	7,99164(-1)
1,0	2,10961(-1)	2,08640(-1)	4,50184(-1)	3,86418(-1)
10,0	3,44094(-2)	2,38784(-2)	9,07108(-2)	9,56839(-2)

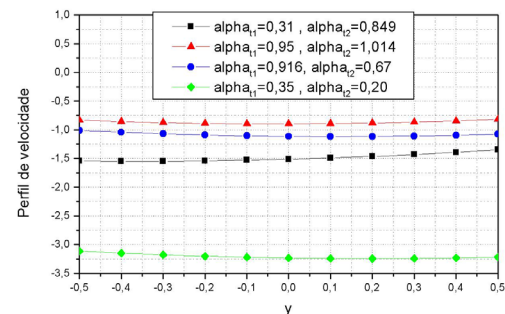
Na tabela (4) é apresentado os resultados obtidos para a taxa de fluxo de partículas. Observa-se que para  $a$  muito pequeno os valores possuem concordância, para  $a$

muito grande os valores não diferem significativamente quando compara-se os resultados obtidos para o mesmo modelo.

Os gráficos a seguir, foram gerados considerando as tabelas apresentadas como forma de auxiliar a análise do comportamento dos perfis frente à variação dos coeficientes de acomodação.

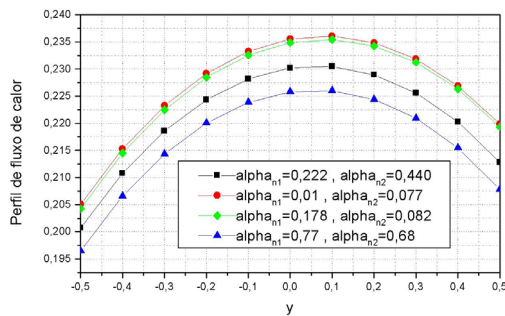


(a) Fluxo de Poiseuille- Modelo S- CL

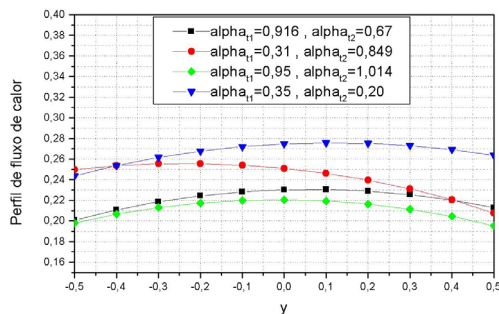


(b) Fluxo de Poiseuille- Modelo S- CL

Nas figuras (a) e (b) observa-se graficamente o comportamento das soluções obtidas para o perfil de velocidade considerando as condições de contorno de Cercignani-Lampis. No gráfico (a) utiliza-se a largura do canal  $2a = 1$ ,  $\alpha_{t1} = 0,916$  e  $\alpha_{t2} = 0,67$ , há uma variação significativa no coeficiente de acomodação normal  $\alpha_n$ , no entanto há pouca diferença no perfil de velocidade. No gráfico (b) utiliza-se  $2a = 1$ , o coeficiente de acomodação normal permanece constante,  $\alpha_{n1} = 0,222$  e  $\alpha_{n2} = 0,440$ , neste caso, há uma variação no coeficiente de acomodação tangencial ( $\alpha_t$ ). Percebe-se que para  $\alpha_t$  pequeno a diferença no perfil de velocidade é significativa.



(c) Fluxo de Poiseuille- Modelo S- CL



(d) Fluxo de Poiseuille- Modelo S- CL

Nos gráficos (c) e (d) observa-se o comportamento do Perfil de Fluxo de Calor, considerando o modelo **S** e as condições de contorno de Cercignani-Lampis. Na figura (c) utiliza-se  $2a = 1$ , o coeficiente de acomodação normal ( $\alpha_n$ ) varia e o coeficiente de acomodação tangencial permanece constante ( $\alpha_{t1} = 0,916$  e  $\alpha_{t2} = 0,67$ ). Observa-se que com a variação de  $\alpha_n$  há pouca diferença no perfil de fluxo de calor. Na figura (d) utiliza-se  $2a = 1$ ,  $\alpha_{n1} = 0,222$  e  $\alpha_{n2} = 0,440$ , observa-se que para  $\alpha_{t1}$  e  $\alpha_{t2}$  pequeno há um aumento no perfil de fluxo de calor.

## 7 Considerações Finais

Os problemas de Fluxo de Poiseuille e *Creep* Térmico foram investigados, assumiu-se as condições de contorno de Maxwell e as condições de contorno de Cercignani-Lampis para o modelo **S** considerando superfícies com constituições químicas diferentes (heterogêneas). Os resultados numéricos, obtidos pelo método ADO em problemas de dinâmica de gases rarefeitos com condições de contorno generalizadas (Cercignani-Lampis) através do modelo **S**, estão em conformidade com os resultados disponíveis na literatura (11; 12; 19). Através da implementação computacional, observou-se que quando atribuídos valores iguais para os coeficientes

de acomodação, considerando a condição de simetria entre as placas, encontra-se os mesmos resultados. Cabe salientar, que há uma maior dependência em relação ao coeficiente de acomodação do momento tangencial ( $\alpha_t$ ) do que ao coeficiente de acomodação da velocidade normal do gás ( $\alpha_n$ ). A condição de não simetria utilizada neste trabalho, torna flexível a análise do comportamento da dinâmica dos gases rarefeitos, no que se refere a variação de materiais das placas entre as quais o gás flui.

## Referências

- [1] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P. and Krook, M., A Model for Collision Processes in Gas. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems, *Physics Review*, Vol. 94, pp. 511-525, (1954).
- [2] Barichello, L.B.; Siewert, C.E., A discrete-ordinates solution for nongrey model with complete frequency redistribution, *JQSRT*, vol.62, pp.665-675, 1999.
- [3] Barichello, L. B., Camargo, M., Rodrigues, P., and Siewert, C. E.; Unified Solutions to Classical Flow Problems Based on the BGK Model, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, vol. 52, pp. 517, 2001.
- [4] Burden, R.L., Faires, J.D., Numerical analysis, Brooks/Cole Publishing Company, Boston, 1997.
- [5] Cercignani, C. and Lampis, M., Kinetic Models for Gas-Surface Interaction, *Transport Theory and Statistical Physics*, Vol. 1, pp. 101-114, (1971).
- [6] Cercignani, C., *The Boltzmann Equation and its Applications*, Springer-Verlag, New York, (1988).
- [7] Dongarra, J.J., Bunch, J.R., Moler, C.B., Stewart, G.W. LINPACK user's guide, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [8] Garcia, R.D.M. and Siewert, C.E., The linearized Boltzmann equation: sound-wave propagation in a rarefied gas, *Z. Angew. Math. Phys.*, vol.57, pp.94-122, 2006.
- [9] Gross, E.P. and Jackson, E.A., Kinetic models and the linearized Boltzmann equation. *The Phys. of Fluids*, vol.2, pp.432-441, (1959).
- [10] Karniadakis, G.E., and Beskok, A., *Micro Flows*. Springer-Verlag, New York, (2002).
- [11] Knackfuss, R.F. and Barichello, L.B.; Surface effects in rarefied gas dynamics: an analysis based on the Cercignani-Lampis boundary condition, *European Journal of Mechanics B. Fluids* 25, (2006), pp.113-129.

- [12] Knackfuss, R.F. e Aseka, I.B.; Fluxo de Poiseuille na Dinâmica de Gases Rarefeitos Baseado no Núcleo BGK, CMNE/CILAMCE 2007, Porto, 13 a 15 de Junho, 2007, APMTAC, Portugal 2007
- [13] Lord, R. G. Tangential Momentum Accommodation Coefficients of Rare Gases on Polycrystalline Metal Surfaces, Program Astronautics and Aeronautics, Part I, J. L. Potter, ed., AIAA, New York, Vol. 51, pp. 531-538, (1977).
- [14] Porodnov, B. T. Suetin, P. E. Borisov, S. F. and Akinshin, V. D., Experimental Investigation of Rarefied Gas Flow in Different Channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 64, pp. 417-437, (1974).
- [15] Scherer, C.S. Prolo Filho, J.F. and Brichello., An analytical approach to the unified solution of kinetic equations in rarefied gas dynamics. Z. Angew. Math. Phys. 60 (2009) 70-115.
- [16] Shakov, E.M., Generalization of the Krook kinetic relaxation Equation, Fluid Dynamics, Vol. 3, pp. 142-145, (1968).
- [17] Sharipov, F. and Seleznev, V., 1998. Data on Internal Rarefied Gas Flows, Journal Physical and Chemical Reference Data, vol. 27, pp. 657.
- [18] Sharipov, F., 2002. Application of Cercignani-Lampis Scattering Kernel to Calculations of Rarefied Gas Flows. I. Plane Flow Between two Parallel Plates, European Journal of Mechanics B/Fluids, vol. 21, pp. 113.
- [19] Siewert, C.E., Generalized Boundary Conditions for the S-Model Kinetic Equations Basic to Flow in a Plane Channel, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, Vol. 72, pp. 75-88, (2001).
- [20] Siewert, C. E., Kramers problem for a variable collision frequency model. European Journal of Applied Mathematics, vol. 12, pp. 179-191.
- [21] Smith, B.T., Boyle, J.M., Dongarra, J.J., Garbow, B.S., Ikebe, Y., Klema, V.C., and Moler, C.B., Matrix Eigensystem Routines EISPACK Guide. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [22] Thomas, L. B. A collection of Some Controlled Surface Thermal Accommodation Coefficient Measurements, in Rarefied Gas Dynamics, C. L. Brundin, ed., Academic Press, New York, pp. 155-162, (1967).
- [23] Williams, M.M.R., Mathematical methods in particle transport theory, Butterworth, London, 1971.
- [24] Williams, M.M.R., A Review of the Rarefied Gas Dynamics Theory Associated with Some Classical Problems in Flow and Heat Transfer, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 52, pp. 500-516, (2001).