Ciência e Natura
ISSN: 0100-8307
cienciaenaturarevista@gmail.com
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

Helmuth Soares Dias, Francisco; Miotto, Márcio Luís
Existência e multiplicidade de soluções para uma equação elítica quaselinear do tipo Kirchhoff
Ciência e Natura, vol. 39, núm. 1, enero-abril, 2017, pp. 74-83
Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil

Artigo Original

DOI:10.5902/2179460X21418

Ciência e Natura, Santa Maria v.39 n.1, 2017, Jan - abr, p. 74 – 83
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIA e NATURA

Existência e multiplicidade de soluções para uma equação elítica quaselinear do tipo Kirchhoff

Existence and multiplicity of solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type

Francisco Helmuth Soares Dias[1] e Márcio Luís Miotto[2]

[1]Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, Brasil
kxchico@yahoo.com.br

[2]Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil
miottomatica@gmail.com

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar condições suficientes para a existência e multiplicidade de soluções da seguinte classe de problemas do tipo Kirchhoff:

$$\begin{cases} -\left(a+b\|u\|^{p}\right)^{p-1}\Delta_p u = h(x)|u|^q + f(x,u), \ x\in\Omega, \\ 0 \lneq u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

onde $a, b > 0$ são constantes, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$Laplaciano com $p > 1$, Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, onde $1 < q+1 < p < N < \frac{p^2}{p-1}$ e as funções $h(x)$ e $f(x,s)$ satisfazem condições apropriadas. Utilizaremos neste propósito argumentos variacionais, tais como o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland.

Palavras-chave: *Equação de Kirchhoff, $p-$Laplaciano, multiplicidade de soluções, métodos variacionais.*

Resumo

The aim of this work is to give some sufficient conditions for the existence and multiplicity of the solutions for the following class of Kirchhoff type problems:

$$\begin{cases} -\left(a+b\|u\|^{p}\right)^{p-1}\Delta_p u = h(x)|u|^q + f(x,u), \ x\in\Omega, \\ 0 \lneq u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

where $a, b > 0$ are constants, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ is the $p-$Laplacian operator with $p > 1$, Ω is a bounded smooth domain in $\mathbb{R}^N$, with $1 < q+1 < p < N < \frac{p^2}{p-1}$ and the functions $h(x)$ and $f(x,s)$ satisfy appropriate conditions. We will use for this purpose variational arguments, such as Mountain Pass Theorem and the Ekeland Variational Principle.

Keywords: *Kirchhoff Equation, $p-$Laplacian, multiplicity of solutions, variational methods.*

Recebido: 15/03/2015 Aceito: 27/10/2016

1 Introdução

No presente trabalho obtemos resultados de existência e multiplicidade de soluções fracas não negativas da seguinte classe de problemas do tipo Kirchhoff:

$$\begin{cases} -(a+b\|u\|^p)^{p-1}\Delta_p u = h(x)|u|^q + f(x,u), \\ 0 \lneq u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

onde $a,b > 0$ são constantes, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$Laplaciano com $p > 1$, Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, com os expoentes $1 < q+1 < p$, $p < N < \frac{p^2}{p-1}$ e as funções $h(x)$ e $f(x,s)$ satisfazem as seguintes hipóteses:
$(\mathbf{h1})$ $h \in L^\infty(\Omega)$ e $h(x) > 0$ em $\Omega_0 \subset \Omega$;

$(\mathbf{f1})$ $f(x,s) \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, $f(x,0) = 0$;
$(\mathbf{f2})$ $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x,s)}{\lambda_1(as)^{p-1}} = \alpha$, $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{\mu_1 b^{p-1}s^{p^2-1}} = \beta$, $q.t.p.\ x \in \Omega$ com $0 \leq \alpha < 1 < \beta < \infty$ e

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\|u\|^p}{\|u\|_p^p}; u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \not\equiv 0\right\} > 0,$$

$$\mu_1 = \inf\left\{\frac{\|u\|^{p^2}}{\|u\|_{p^2}^{p^2}}; u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \not\equiv 0\right\} > 0.$$

Consideramos ainda a seguinte condição:
$(\mathbf{f3})$ Existem $C, r > 0$ de modo que

$$p^2F(x,s) - f(x,s)s \leq Cs^p,$$

$q.t.p.\ x \in \Omega$ se $s \geq r$, onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$.

O problema clássico de Kirchhoff

$$\begin{cases} -M\|u\|^2\Delta u = f(x,u),\ x \in \Omega, \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $M : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ é uma função contínua, é a versão estacionária da equação

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

proposta por Kirchhoff (1883), a qual é uma generalização da conhecida equação de corda vibrante de D'Alembert. O modelo descrito em (3) leva em conta as mudanças no comprimento da corda produzida por vibrações transversais, sendo L o comprimento da corda, h a área da seção transversal, E o módulo de Young do material, ρ a densidade da massa e P_0 a tensão inicial. Relacionado com (2), (Perera e Zhang, 2006) abordaram o problema:

$$\begin{cases} -\left(a+b\|u\|^2\right)\Delta u = g(x,u),\ x \in \Omega, \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 1$ e $a,b > 0$. A função $g(x,t)$ é localmente Lipschitz contínua em $t \in \mathbb{R}$, uniformemente contínua em $x \in \overline{\Omega}$ e subcrítica: $|g(x,t)| \leq C(|t|^{p-1}+1)$, para algum $2 < p < 2^*$, onde C é uma constante positiva. Eles obtiveram via métodos variacionais a existência de uma solução positiva, uma solução negativa e uma solução mudando de sinal para o problema (4).

Por sua vez, Liang et al. (2013) via o argumento do grau topológico e métodos variacionais obtiveram a existência de soluções positivas para o problema:

$$\begin{cases} -\left(a+b\|u\|^2\right)\Delta u = \tau f(x,u),\ x \in \Omega, \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N = 1$, 2 ou 3, $a,b \geq 0$, com $a+b > 0$, τ é um parâmetro positivo e

$f(x,t)$ é uma função contínua que é assintoticamente linear em zero e assintoticamente 3−linear no infinito, com relação a t.

Destacamos também, o importante trabalho de Li et al. (2002), que através do Princípio Variacional de Ekeland e do Teorema do Passo da Montanha, provaram a existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elíticos:

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + f(x,u), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad 0 \leq u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{6}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 1$, $0 < q < 1$, $h \in L^\infty(\Omega)$, $h(x) \not\equiv 0$, e a função $f(x,s)$ contempla os casos de crescimento assintoticamente linear e superlinear com relação a variável s no infinito e o caso linear em s.

Mencionamos ainda o trabalho de Corrêa e Figueiredo (2006) o qual obteve resultados de existência de soluções para o problema

$$-[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) + \lambda|u|^{s-2}u,$$

onde $1 < p < N$, $s \geq p^*$, $\lambda \geq 0$ e M e f satisfazem certas propriedades. Recentemente Guo e Nie (2015) obtiveram, sob certas condições, resultados de existência de infinitas soluções para a seguinte equação

$$\begin{cases} -\left(a + b\|u\|^p\right)^{p-1} \Delta_p u + \lambda V(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{7}$$

Citamos ainda dentre outros, os trabalhos de Huang et al. (2013), Pei (2012), Alves et al. (2005), Alves et al. (2010), Miotto (2010), Miotto (2014) e Sun e Tang (2011), os quais também utilizam métodos variacionais.

Nossos resultados são os seguintes:

Teorema 1.1. *Suponhamos que as condições $(h1), (f1)$ e $(f2)$ sejam válidas. Então existe uma constante $\Lambda > 0$ tal que se $\|h\|_\infty < \Lambda$, o problema (1) possui ao menos uma solução $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $u_1 \gneq 0$. Além disso, se $h(x) \geq 0$, então u_1 é positiva q.t.p. em Ω.*

Teorema 1.2. *Suponhamos válidas as condições $(h1), (f1), (f2), (f3)$ com $\|h\|_\infty < \Lambda$. Então o problema (1) admite uma segunda solução não negativa $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, $u_2 > 0$ q.t.p. em Ω, se $h(x) \geq 0$.*

Este artigo está organizado da seguinte forma: na primeira seção, exploramos alguns resultados preliminares para este trabalho. Na seção seguinte, através do Princípio Variacional de Ekeland justificamos o Teorema 1.1. Ainda na referida seção, por meio do Teorema do Passo da Montanha faremos a demostração do Teorema 1.2.

2 Resultados Preliminares

Iniciamos essa seção apresentando algumas convenções. Temos que o expoente crítico de Sobolev é dado por $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$. Como de costume, denotaremos a norma do espaço de Lebesgue $L^r(\Omega)$ por

$$\|u\|_r^r \doteq \int_\Omega | u|^r \, dx, \text{ se } 1 \leq r < \infty,$$

$$\|u\|_\infty \doteq ess \sup_\Omega |u|.$$

Definimos o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$, com respeito a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema (1), se u satisfaz a equação

$$(a + b\|u\|^p)^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega h(x)|u|^{q-1}u\varphi \, dx + \int_\Omega f(x,u_+)\varphi \, dx,$$

para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

A ideia principal dos métodos variacionais é relacionar a existência de solução de uma equação à existência de um ponto crítico de um funcional associado a equação. Associamos então, ao problema (1) o funcional $I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) = \frac{1}{bp^2}(a+b\|u\|^p)^p - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)|u|^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,u_+)\,dx,$$

onde $u_+ = \max\{0,u\}$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$.
Através das hipóteses $(h1)$, $(f1)$ e $(f2)$, mostra-se que $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$ e apresenta derivada $I'(u)$ em cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dada por

$$\langle I'(u),\varphi\rangle = (a+b\|u\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega h(x)|u|^{q-1}u\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,u_+)\varphi\,dx,$$

para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como por definição temos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é um ponto crítico do funcional I caso $I'(u) = 0$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, temos que os pontos críticos de I são soluções fracas de (1).

Abaixo, citamos alguns fatos relevantes para o estudo do problema (1).

Observação 2.1. ***(i)*** *Consideremos $c \in \mathbb{R}$. Uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $I(u_n) = c + o(1)$ e $I'(u_n) = o(1)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ é dita ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Se qualquer sequência $(PS)_c$ para o funcional I, possui uma subsequência convergente, então dizemos que I satisfaz a condição (PS) de nível c.*

(ii) *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ limitada para o funcional I, então (u_{n_+}) também é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Com efeito, sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, então para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$*

$$\langle I'(u_n),\varphi\rangle = o(1),$$

Tomando $\varphi = u_{n_-}$ na igualdade acima, decorre que

$$(a+b\|u_n\|^p)^p\|u_{n_-}\|^p - \int_\Omega f(x,u_{n_+})u_{n_-}\,dx = o(1),$$

e usando o fato de que $\int_\Omega f(x,u_{n_+})u_{n_-}\,dx = 0$, obtemos que

$$\|u_{n_-}\| = o(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(u_n) - I(u_{n_+}) &= \frac{1}{bp^2}[(a+\|u_n\|^p)^p - (a+\|u_{n_+}\|^p)^p \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Por sua vez, como (u_n) é limitada e $\|u_n\| = \|u_{n_+}\| + o(1)$, temos toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} & < I'(u_n) - I'(u_{n_+}),\varphi > \\ = & [(a+b\|u_n\|^p)^{p-1} - (a+b\|u_{n_+}\|^p)^{p-1}] \\ & \times \int_\Omega |\nabla u_{n_+}|^{p-2}\nabla u_{n_+}\nabla\varphi\,dx + (a+b\|u_n\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_{n_-}|^{p-2}\nabla u_{n_-}\nabla\varphi\,dx \\ = & o(1), \end{aligned}$$

donde segue que (u_{n_+}) também é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I.

A seguir aprentamos uma condição para a validade da condição (PS) em um certo nível c.

Lema 2.1. *Suponhamos válidas as condições $(h1)$, $(f1)$ e $(f2)$ e que $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_c$ limitada para o funcional I. Então (u_n) possui uma subsequência convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequencia $(PS)_c$ limitada para o funcional I, com $u_n \geq 0$. Então, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\|u_n\|^p \to c_0,$$

e que existe $0 \leq u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, de modo que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelas condições $(h1)$, $(f1)$ e $(f2)$, as imersões de Sobolev e o Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_\Omega f(x,u_n)u\,dx = \int_\Omega f(x,u)u\,dx + o(1), \tag{8}$$

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx = \int_\Omega f(x,u)u\,dx + o(1), \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega h(x)|u_n|^{q-1}u_n u\,dx &= \int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\,dx + o(1)\\ &= \int_\Omega h(x)|u|^{q+1}\,dx + o(1).\end{aligned} \tag{10}$$

Assim se considerarmos

$$\begin{aligned} c_n \quad = \quad & < I'(u_n),u_n > + \int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\,dx + \int_\Omega f(x,u_n)u\,dx - < I'(u_n),u > \\ & - \int_\Omega h(x)|u_n|^{q-1}u_n u\,dx - \int_\Omega f(x,u_n)u\,dx, \end{aligned}$$

segue das relações (8), (9), (10) e do fato que (u_n) é sequencia $(PS)_c$ para o funcional I, que $c_n = o(1)$. Por outro lado,

$$c_n = (a + b\|u_n\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)\,dx.$$

Agora pelo fato que $\|u_n\|^p \to c_0$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que

$$(a + b\|u_n\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)\,dx = o(1).$$

Assim pelas relações acima, sendo $\ll \cdot,\cdot \gg$ o produto interno euclideano em $\mathbb{R}^N$, temos que

$$(a + b\|u_n\|^p)^{p-1}\int_\Omega \ll |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u \gg\ dx = o(1). \tag{11}$$

Agora usando o fato que existe $C = C(p) > 0$ de modo que para todo $x,y \in \mathbb{R}^N$, temos se $p \geq 2$ ou $1 < p < 2$ respectivamente que,

$$\ll |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, y - y \gg \geq C|x-y|^p,$$

$$\ll |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, y - y \gg \geq C\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}},$$

obtemos por $\|u_n\|^p \to c_0$ e a relação (11) que existe $C > 0$ onde

$$(a + bc_0^p)^{p-1}C\|u_n - u\|^p = o(1),$$

donde segue que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que finaliza a justificativa.

$\square$

Enunciamos agora dois resultados clássicos da teoria dos pontos críticos, a saber, o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha. Começamos pelo Princípio Variacional de Ekeland, cuja demonstração pode ser encontrada em De Figueiredo (1989).

Teorema 2.1 (Princípio Variacional de Ekeland). *Seja (X,d) um espaço métrico completo e $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ um funcional de classe C^1 e limitado inferiormente. Então se*

$$c = \inf_{u\in X}\phi(u) < \inf_{u\in\partial X}\phi(u),$$

existe uma sequência (u_n) em X satisfazendo a condição $(PS)_c$.

O próximo resultado é o Teorema do Passo da Montanha que pode ser encontrado em Schechter (1991).

Teorema 2.2 (Teorema do Passo da Montanha). *Seja X um espaço de Banach real e $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 satisfazendo:*

$$\max\{\phi(0),\phi(v)\} \leq \kappa < \nu \leq \inf_{\|u\|=r} \phi(u),$$

para algum $r > 0$ e $v \in X$ com $\|v\| > r$. Então, existe uma sequência (u_n) em X satisfazendo a condição $(PS)_c$, onde $c \geq \nu$ pode ser caracterizado por

$$c = \inf_{\sigma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \phi(\sigma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\sigma \in C([0,1],X); \sigma(0) = 0, \sigma(1) = v\}.$$

Com o objetivo de obter sequências $(PS)_c$ para o funcional I fazendo o uso dos resultados acima mencionados, vamos a seguir obter alguns resultados auxiliares sobre as funções $f(x,s)$ e $F(x,s)$ baseados nas condições $(f1)$ e $(f2)$. Pela hipótese $(f2)$, temos que dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ tal que para $s \in \mathbb{R} \cap (0,\delta)$ vale

$$\left| \frac{f(x,s)}{\lambda_1 (as)^{p-1}} - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Logo, para $0 < s < \delta$, temos

$$(\alpha - \varepsilon)\lambda_1(as)^{p-1} < f(x,s) < (\alpha + \varepsilon)\lambda_1(as)^{p-1}. \tag{12}$$

Por outro lado, de $\lim_{s\to\infty} \dfrac{f(x,s)}{b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1}} = \beta$, temos que existe $\delta_1 > \delta$, de modo que $0 < \delta_1 < s$, obtemos

$$\left| \frac{f(x,s)}{b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1}} - \beta \right| < \varepsilon,$$

e por conseguinte

$$(\beta - \varepsilon)b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1} < f(x,s) < (\beta + \varepsilon)b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1}. \tag{13}$$

Das desigualdades (12), (13) e como $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, existe $C_\varepsilon > 0$ de modo que para todo $s \in [0,\infty)$

$$-C_\varepsilon s^{p-1} + (\beta - \varepsilon)b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1} < f(x,s) < (\alpha + \varepsilon)\lambda_1(as)^{p-1} + C_\varepsilon s^{p^2-1}. \tag{14}$$

Integrando em s a expressão acima, obtemos para $s \geq 0$,

$$-\frac{C_\varepsilon}{p} s^p + \frac{1}{p^2}(\beta - \varepsilon)b^{p-1}\mu_1 s^{p^2} < F(x,s) < \frac{1}{p}(\alpha + \varepsilon)a^{p-1}\lambda_1 s^p + \frac{C_\varepsilon}{p^2} s^{p^2}. \tag{15}$$

O próximo resultado será essencial para garantirmos as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, bem como para a demonstração da existência de uma solução através do Princípio Variacional de Ekeland.

Lema 2.2. *Suponhamos que as condições $(h1)$,$(f1)$ e $(f2)$ sejam satisfeitas. Então existem $r,\gamma > 0$ e $\Lambda > 0$, $\Lambda = \Lambda(a,\alpha,p,q,f,N,\Omega)$, tal que para qualquer $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < \Lambda$ temos que*

$$I(u) \geq I(0) + \gamma,$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\|u\| = r$.

Além disso, existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|v_0\| > r$, tal que $I(v_0) < I(0)$.

Demonstração: Utilizando o fato que para todo $s,t \in [0,\infty)$, temos

$$(t + s)^p \geq t^p + s^p + kt^{p-1}s,$$

e a estimativa (15) e por fim as Imersões de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{bp^2}(a+b\|u\|^p)^p - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)|u|^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,u_+)\,dx \\
&\geq \frac{a^p}{bp^2} + \frac{b^{p-1}}{p^2}\|u\|^{p^2} + \frac{a^{p-1}}{p}\|u\|^p - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} - (\alpha+\varepsilon)\frac{a^{p-1}}{p}\lambda_1\|u\|_p^p - \frac{C_\varepsilon}{p^2}\|u\|_{p^2}^{p^2} \\
&\geq I(0) + (1-\alpha-\varepsilon)\frac{a^{p-1}}{p}\|u\|^p - \frac{C_\varepsilon}{\mu_1 p^2}\|u\|^{p^2} - \frac{\|h\|_\infty C_q}{q+1}\|u\|^{q+1}, \qquad (16)
\end{aligned}$$

onde C_q é uma constante positiva de modo que

$$\|u\|_{q+1}^{q+1} \leq C_q\|u\|^{q+1}.$$

Devido a condição $(f2)$, como $\alpha < 1$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $C_1 = (1-\alpha-\varepsilon)\frac{a^{p-1}}{p} > 0$. Sejam ainda $C_2 = \dfrac{C_q}{q+1} > 0$ e $C_3 = \dfrac{C_\varepsilon}{\mu_1 p^2} > 0$.

Consideremos para cada $t \geq 0$ a função

$$g(t) = C_2\|h\|_\infty t^{q+1-p} + C_3 t^{p^2-p}.$$

Como $0 < q < p-1$, temos que g possui mínimo global no ponto

$$r = C_4\|h\|_\infty^{\frac{1}{p^2-q-1}},$$

onde $C_4 = \left(\frac{C_2(p-q-1)}{C_3(p^2-p)}\right)^{\frac{1}{p^2-q-1}} > 0$ e então

$$g(r) = (C_2 C_4^{q+1-p} + C_3 C_4^{p^2-p})\|h\|_\infty^{\frac{p^2-p}{p^2-q-1}}.$$

Assim existe uma constante $\Lambda = \Lambda(a,\alpha,q,p,f,N,\Omega) > 0$ tal que se $\|h\|_\infty < \Lambda$ então $g(r) < C_1$. Portanto, se $\|h\|_\infty < \Lambda$, segue pela desigualdade (16) que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\| = r$ e $\gamma = (C_1 - g(r))r^p > 0$ que

$$I(u) \geq I(0) + \gamma.$$

Resta justificar que existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $\|v_0\| > r$, tal que $I(v_0) < I(0)$. Para tanto, pelo fato de $\beta > 1$ existe $\varepsilon > 0$ de modo que $\mu_1 < (\beta - 2\varepsilon)\mu_1$. Assim pela definição de μ_1, existe $0 \lneq v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que

$$\|v\|^{p^2} < (\beta - 2\varepsilon)\mu_1\|v\|_{p^2}^{p^2}.$$

Assim pela desigualdade (15), segue que

$$\begin{aligned}
I(tv) &= \frac{1}{bp^2}(a+bt^p\|v\|^p)^p - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)v^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,tv)dx \\
&\leq \frac{1}{bp^2}(a+b\|v\|^p)^p - t^{q+1}\frac{\|h\|_\infty}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1}\,dx + t^p\frac{C_\varepsilon}{p}\|v\|_p^p - t^{p^2}\frac{1}{p^2}(\beta-\varepsilon)[b^{p-1}\mu_1\|v\|_{p^2}^{p^2}] \\
&\leq \frac{1}{p^2}\left(ab^{-\frac{1}{p}} + \left[b^{p-1}(\beta-2\varepsilon)\mu_1 t^{p^2}\|v\|_{p^2}^{p^2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^p - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)v^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,tv)dx \\
&\leq \frac{1}{p^2}\left(ab^{-\frac{1}{p}} + \left[b^{p-1}(\beta-2\varepsilon)\mu_1 t^{p^2}\|v\|_{p^2}^{p^2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^p - t^{q+1}\frac{\|h\|_\infty}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1} + t^p\frac{C_\varepsilon}{p}\|v\|_p^p - t^{p^2}\frac{1}{p^2}(\beta-\varepsilon)[b^{p-1}\mu_1\|v\|_{p^2}^{p^2}]
\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade acima e o fato que $p < p^2$ e $\beta - 2\varepsilon < \beta - \varepsilon$, segue que

$$I(tv) \to -\infty$$

quando $t \to \infty$. Logo existe $t_0 > 0$ suficientemente grande onde se $v_0 = t_0 v$, temos que $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|v_0\| > r$ e tal que $I(v_0) < I(0)$.

—

3 Demostração dos resultados

Procedemos inicialmente a demonstração do Teorema 1.1, que nos garante a existência de uma solução para o problema (1).

Demonstração do Teorema 1.1: Para cada $R > 0$ consideramos

$$B_R = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\| \leq R \right\}.$$

Sejam $r > 0$ obtido no Lema 2.2. Como B_r é um conjunto fechado em $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|)$, o qual é um espaço de Banach, decorre que $(B_r, \|\cdot\|)$ é também um espaço métrico completo. Novamente, pelo Lema 2.2, temos existe $\gamma > 0$ de modo que

$$I(u) \geq I(0) + \gamma, \ \forall u \in \partial B_r.$$

Ainda, note que por I ser um funcional contínuo em B_r, está bem definido o valor

$$c_1 = \inf\{I(u) : u \in B_r\}.$$

Observermos que pela definição de c_1 e a estimativa acima temos

$$c_1 \leq I(0) < I(0) + \gamma \leq \inf_{u \in \partial B_r} \phi(u). \tag{17}$$

Dado $h \in L^\infty(\Omega)$, consideremos $v \in C_c^\infty(\Omega_0)$, onde $v \not\leq 0$ e

$$\int_\Omega h(x) v^{q+1}\, dx > 0.$$

Então pela relação (15), considerando $\varepsilon > 0$ de modo que $\beta - \varepsilon > 0$, segue que

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{1}{bp^2}(a + bt^p\|v\|^p)^p - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)v^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x,tv)\, dx \\ &\leq I(0) + \frac{1}{bp^2}[(a + bt^p\|v\|^p)^p - a^p] - Ct^{q+1} + \frac{t^p C_\varepsilon}{p}\|u\|_p^p. \end{aligned}$$

Logo para $t \to 0^+$ como $q + 1 < p$, obtemos $I(tv) < I(0)$. Mas para $t > 0$ de modo que $t\|v\| < r$, temos que $tv \in B_r$ o que implica pela definição de c_1 que

$$c_1 \leq I(tv) < I(0).$$

Portanto pela relação (17) e pelo Princípio Variacional de Ekeland, temos que existe $(u_n) \subset B_r$ sequência $(PS)_{c_1}$ para o funcional I. Agora pelo fato que (u_n) ser limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pela Observação 2.1 podemos supor que $0 \leq u_n$. Em virtude do Lema 2.1 existem $0 \leq u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, u_n converge fortemente para u_1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Assim se Se $1 < q + 1 < p$, pela continuidade de I, obtemos $I(u_1) = c_1 < I(0)$, donde segue que $u_1 \gneq 0$ e pela continuidade da derivada I' temos $I'(u_1) = 0$, isto é, u_1 é um ponto crítico do funcional I e consequentemente uma solução fraca do problema (1).

Além disso, se considerarmos $h(x) \geq 0$, obtemos $\Delta_p u_1 \leq 0$. Logo, pelo Princípio do Máximo Forte (Vazquez, 1984) existem duas possibilidades, ou $u_1 > 0$ em Ω ou $u_1 \equiv 0$ $q.t.p.$ em Ω. Entretanto, como $I(u_1) = c_1 < I(0)$, segue que $u_1 > 0$ em Ω, o que prova o Teorema 1.1.

Vamos agora, através do Teorema do Passo da Montanha, garantir a existência de uma segunda solução não negativa, do problema (1).

Demonstração do Teorema 1.2: Sejam $r, \gamma, \Lambda > 0$ dados no Lema 2.2. Suponhamos que h satisfaz a condição $(h1)$ e $\|h\|_\infty < \Lambda$. Aplicando o Teorema do Passo da Montanha com $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\phi = I$ temos que para

$$c = \inf_{\sigma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\sigma(t)) \geq I(0) + \gamma,$$

existe uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I.

Devemos mostrar que (u_n) é uma sequência convergente. Para tanto, pelo Lema 2.1, basta mostrar que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Suponhamos que isso não ocorra, isto é, $\|u_n\| \to \infty$, quando $n \to \infty$ e seja

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Claramente, w_n é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois $\|w_n\| = 1$. Logo podemos supor, a menos de subsequência, que existe $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $w_n \rightharpoonup w_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $w_n \to w_0$ em $L^r(\Omega)$, se $1 \leq r < p^*$ e $w_n \to w_0$ q.t.p. em Ω.

Mostremos agora que $w_0 \equiv 0$ em Ω. Caso $w_0 \not\equiv 0$ em Ω, temos que $\int_\Omega |w_0|^{p^2}\, dx > 0$. Assim pela condição $(f2)$ e do fato que $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, que existe $C_\varepsilon > 0$ onde para todo $s \in [0,\infty)$

$$F(x,s) \geq (1-\varepsilon)\frac{b^{p-1}}{p^2}\mu_1 s^{p^2} - C_\varepsilon s^p. \tag{18}$$

Então por (u_n) ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, por $\|u_n\| \to \infty$ e $q < p^2$, temos

$$\begin{aligned} o(1) &= \frac{1}{\|u_n\|^{p^2}}\left(I(u_n) + \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{bp^2}\left(\frac{a}{\|u_n\|^p} + b\right)^p - \int_\Omega \frac{F(x,u_{n_+})}{\|u_n\|^{p^2}}\, dx, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_{n_+})}{\|u_n\|^{p^2}}\, dx = \frac{b^{p-1}}{p^2} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_{n_+})}{\|u_n\|^{p^2}}\, dx = \frac{b^{p-1}}{p^2}.$$

Então pela igualdade acima, a relação (18) e por $p^2 > p$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{b^{p-1}}{p^2} &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_{n_+})}{\|u_n\|^{p^2}}\, dx + C_\varepsilon \frac{\|v_n\|_p^p}{\|u_n\|^{p^2-p}} \\ &\geq \lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)\frac{b^{p-1}}{p^2}\mu_1\|w_n\|_{p^2}^{p^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)\frac{b^{p-1}}{p^2}\mu_1\|w_0\|_{p^2}^{p^2}. \end{aligned}$$

Dessa forma temos que

$$(1-\varepsilon)\mu_1 = \frac{1}{\|w_0\|_{p^2}^{p^2}} \geq \frac{\|w_0\|^{p^2}}{\|w_0\|_{p^2}^{p^2}} \geq \mu_1,$$

o que é uma contradição pois $\varepsilon > 0$. Portanto $w_0 \equiv 0$ em Ω.

Segue de $(f3)$ e do fato que $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, que existe $C > 0$ onde para todo $s \in [0,\infty)$

$$p^2F(x,s) - f(x,s)s \leq Cs^p. \tag{19}$$

Assim como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ ilimitada para o funcional I, pela relação (19) e $q+1 < p$, segue que

$$\begin{aligned} o(1) &= \frac{1}{\|u_n\|^p}p^2 I(u_n) - \langle I'(u_n),u_n\rangle \\ &= \frac{1}{\|u_n\|^p}[\frac{1}{b}\,(a+b\|u_n\|^p)^p - \frac{p^2}{q+1}\int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\, dx - \int_\Omega p^2F(x,u_{n_+})\, dx - (a+b\|u_n\|^p)^{p-1}\,\|u_n\|^p \\ &\quad - \int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\, dx - \int_\Omega f(x,u_{n_+})u_{n_+}\, dx] \\ &= \frac{1}{\|u_n\|^p}[\frac{a}{b}(a+b\|u_n\|^p)^{p-1} + o(1) - \int_\Omega p^2F(x,u_{n_+}) - f(x,u_{n_+})u_{n+}\, dx] \\ &\geq \frac{1}{\|u_n\|^p}[(p-1)a^{p-1}\|u_n\|^p - C\|u_n\|_p^p] + o(1) \\ &\geq (p-1)a^{p-1} + o(1) \end{aligned}$$

Portanto, (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sendo assim, pela Observação 2.1 podemos supor que $u_n \geq 0$ e devido o Lema 2.1 existe $0 \leq u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência $u_n \to u_2$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Uma vez que o funcional $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$, segue que $I(u_2) = c > I(0) > I(u_1)$ e $I'(u_2) = 0$. Logo, u_2 é solução fraca não negativa do problema (1), distinta da solução u_1.

Caso $h(x) \geq 0$, da mesma forma que na demonstração do Teorema 1.1 obtemos $\Delta_p u_2 \leq 0$ e assim, pelo Princípio do Máximo Forte, $u_2 > 0$ $q.t.p.$ em Ω, o que conclui a demonstração.

Referências

Alves, C., O, Corrêa, F. J. S. A., Figueiredo, G. M. (2010). On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth. *Differential Equations and Applications*, 2, 409–417.

Alves, C. O., Corrêa, F. J. S. A., Ma, T. F. (2005). Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type. *Computers and Mathematics with Applications*, *49*, 85–93.

Corrêa, F., Figueiredo, G. (2006). On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *74*, 263–277.

De Figueiredo, D. G. (1989). *Lectures on the Ekeland Variational Principle with applications and detours*. Springer-Verlag.

Guo, Y., Nie, J. (2015). Existence and multiplicity of nontrivial solutions for p-Laplacian schrodinger-Kirchhoff-type equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *428*, 1054–1069.

Huang, J., Chen, C., Xiu, Z. (2013). Existence and multiplicity results for a p-Kirchhoff equation with a concave-convex term. *Applied Mathematics Letters*, *26*, 1070–1075.

Kirchhoff, G. (1883). *Mechanik*. Teubner.

Li, S., Wu, S., Zhou, H. S. (2002). Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, *185*, 200–224.

Liang, Z., Li, F., Shi, J. (2013). Positive solutions to Kirchhoff type equations with nonlinearities having prescribed asymptotic behavior. *Annales de I Henri Poincare (C) Nonlinear Analysis*, *31*, 155–167.

Miotto, M. L. (2010). Multiple solutions for elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponent and weight function. *Communications on Pure and Applied Analysis*, *9*, 233–248.

Miotto, M. L. (2014). Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quaselineares críticos em $\mathbb{R}^N$ envolvendo função peso com mudança de sinal. *Ciência e Natura*, *36*, 367–379.

Pei, R. (2012). On a p-Laplacian equation of Kirchhoff-type with a potential asymptotically linear at infinity. *Journal of Mathematical Analysis*, *6*(27), 1347–1353.

Perera, K., Zhang, Z. (2006). Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *317*, 456–463.

Schechter, M. A. (1991). A variation of the Mountain Pass lemma and applications. *Journal London Math Soc*, *44*, 491–502.

Sun, J. J., Tang, C. L. (2011). Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations. *Nonlinear Analysis*, *74*, 1212–1222.

Vazquez, J. L. (1984). Strong Maximum Principle for some quasilinear elliptic equations. *Applied Mathematics and Optimization*, *12*, 191–202.