Uniciencia
E-ISSN: 2215-3470
revistauniciencia@una.cr
Universidad Nacional
Costa Rica

Espinoza-González, Johan; Lupiáñez-Gómez, Jose-Luis; Segovia-Alex, Isidoro

Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas

Uniciencia, vol. 29, núm. 1, enero, 2015, pp. 58-81
Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica

Uniciencia. Vol. 29, No. 1, pp. 58-81. Enero, 2015. ISSN Electrónico: 2215-3470
URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.4
Email: revistauniciencia@una.cr

Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas

A scheme to analyses the statements of the student in context of problem posing

Johan Espinoza-González
jespinoza@una.cr
Universidad Nacional, Costa Rica.
Jose-Luis Lupiáñez-Gómez
lupi@ugr.es
Universidad de Granada, España.
Isidoro Segovia-Alex
isegovia@ugr.es
Universidad de Granada, España.

Fecha de recepción del artículo: ***24 de julio de 2014.***
Fecha de revisión del artículo: ***14 de agosto de 2014.***
Fecha de aprobación del artículo: ***29 de agosto de 2014.***

Resumen

La invención de problemas es considerada como una actividad importante en la formación de habilidades matemáticas de los estudiantes, por lo que se han hecho esfuerzos por estudiarla como proceso de instrucción en clases de matemática; sin embargo, pocas investigaciones abordan estrategias que permitan valorar las producciones de estudiantes ante este tipo de tareas. Así, se presenta la construcción y puesta en práctica de un esquema de análisis que fue empleado en un estudio más amplio de investigación que pretendía caracterizar la actuación aritmética de un grupo de estudiantes con talento en matemática. Para ello, se realizó un análisis de las variables de estudio de los problemas aritméticos y un estudio de las herramientas empleadas en investigaciones previas, las cuales permitieron definir tres categorías de análisis y en cada una de ellas variables de estudio. Los resultados muestran la viabilidad de dicho esquema para caracterizar los problemas inventados por el estudiantado, para identificar diferentes niveles de complejidad en estos y para valorar el grado de profundización y apropiación de los conocimientos aprendidos.

Palabras claves: Invención de problemas, esquema de análisis, resolución de problemas, educación matemática.

Abstract

The problem posing is considered as an important activity in the formation of mathematical skills of students, so they have made efforts to study it as a process of instruction in math classes; however, few investigations addressed strategies designed to assess student productions at this type of task. Thus, the construction and implementation of a analyses scheme that was used in a broader research study that aimed to characterize the arithmetic performance of a group of talented students in mathematics is presented. To do an analysis of the study variables of arithmetic problems and a study of the tools used in previous research was conducted, which allowed define three categories of analysis and in each study variables. The results show the feasibility of such a scheme to characterize the problems invented by students, identify different levels of complexity in the same and to assess the degree of profundity and appropriation of the knowledge learned.

Keywords: *Problem posing; analysis scheme; problem solving, Mathematics Education*

Desde hace algunas décadas se observa un progreso en el desarrollo de enfoques de instrucción que incorporan la invención de problemas como una actividad de clase (Brown & Walter, 1990; Silverman, Winograd & Strohauer, 1992). En esta línea, los programas vigentes para la enseñanza de la matemática propuestos por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) (2012) proponen este tipo de actividades como uno de los cinco elementos fundamentales en el proceso de resolución de problemas.

De hecho, varias habilidades concretas o indicaciones puntuales especificadas en dichos programas hacen referencia a que el estudiantado plantee problemas a partir alguna situación presentada de forma textual o gráfica (ilustración), o a partir de operaciones aritméticas. Este interés por incorporar actividades de invención de problemas en clases no es nuevo y queda manifiesto en los estándares sobre el currículo y evaluación para las matemáticas escolares (NCTM, 1989) y los estándares profesionales para la enseñanza de la matemática (NCTM, 1991), los cuales sugieren un incremento de esta en las lecciones de matemática.

Uniciencia. Vol. 29, No. 1, pp. 58-81. Enero, 2015. ISSN Electrónico: 2215-3470
URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.4
Email: revistauniciencia@una.cr

De igual forma, algunos autores (Brown & Walter, 1990; Ellerton 1986; Freudenthal, 1973; NCTM, 2000; Polya, 1954; Polya 1979) reconocen la invención de problemas como actividad importante dentro de la experiencia matemática de los estudiantes y algunos estudios (Castro, 2011; Espinoza, 2014) ponen de manifiesto diversas líneas de investigación en este tema, así como sus bondades y usos dados como enfoque de instrucción.

Sin embargo, se ha prestado poca atención a cómo valorar las producciones estudiantiles ante este tipo de tareas (Silver & Cai, 2005). Al respecto, se pueden citar los estudios de Leung y Silver (1997), Ellerton (1986), Cázares (2000) y Espinoza (2011), que muestran algunas herramientas y estrategias generales que se pueden emplear para estudiar la complejidad y características de las producciones de estudiantes en contextos de invención de problemas.

Así, en este estudio se presenta una propuesta que consiste en un esquema para analizar las producciones de estudiantes ante tareas de invención de problemas aritméticos verbales y que es parte de un proyecto más amplio de investigación que pretende caracterizar el talento matemático mediante este tipo de actividades.

A continuación se exponen algunas ideas relacionadas con el proceso de invención de problemas, las variables de estudio de los problemas aritméticos y algunos estudios previos referentes al problema de investigación aquí presentado. Esto servirá de base teórica para sustentar el esquema de análisis empleado y del cual se presenta un ejemplo práctico de su uso.

Desarrollo teórico de la propuesta

Invención de problemas matemáticos

Desde hace varias décadas se da un mayor énfasis a la resolución de problemas como una actividad central de la matemática escolar (NCTM, 1980, 1989) y es tal que, en todas las clases de matemática de cualquier país, se puede observar al estudiantado resolviendo problemas matemáticos (Silver, 1994). A partir de ahí surgen diversas líneas de

Uniciencia. Vol. 29, No. 1, pp. 58-81. Enero, 2015. ISSN Electrónico: 2215-3470
URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.4
Email: revistauniciencia@una.cr

investigación en resolución de problemas, entre las cuales, la invención de problemas matemáticos es una de ellas (Castro, 2008). Pero: ¿En qué consiste este proceso? ¿Cuáles son las interpretaciones que se le han dado?

El término invención de problemas, también conocido en la bibliografía en inglés como *"problem posing" (*Brown & Walter, 1993; English, 1997; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994), es usado para referirse tanto a la formulación de nuevos problemas, como a la reformulaciones de situaciones dadas (English, 1997; Silver, 1994; Silver & Cai, 1996).

En este sentido, el estudiantado puede inventar problemas durante la solución de un problema complejo (Silver, Mamona-Down, Leung & Kenny, 1996) o al realizar algunos cambios a este. Por ejemplo, podrían reformular el enunciado y personalizarlo (Silver, 1994), cambiando el tipo de número o simplificando la situación a un caso particular, con el objetivo de facilitar su solución. Al respecto, en el trabajo de Polya (1979), aparece esta componente al cuestionar: ¿cómo podemos plantear el problema de manera diferente?, ¿cómo variar el problema descartando parte de la condición?

Este proceso también puede ocurrir antes de resolver un problema, cuando lo que se persigue no es la solución, sino la creación de uno a partir de una situación o experiencia (Silver, 1994). Un ejemplo de este tipo particular de invención de problemas fue realizado por Cázares (2000), quien presentó a 14 estudiantes de primaria varias tarjetas con diferentes ilustraciones de situaciones relacionadas con su contexto, de las cuales debían escoger algunas y plantear varios problemas matemáticos.

Por último, se podría emplear después de la solución de un problema, en el cual se modifica el objetivo, meta o condición con el fin de generar nuevas situaciones (Silver, 1994). Al respecto, se puede mencionar el estudio de Brown y Walter (1993) y su estrategia "¿What if not?", la cual consiste en cambiar las condiciones y restricciones de una determinada situación para plantear nuevos e interesantes problemas.

Por otra parte, Stoyanova (1998) identifica tres categorías de experiencia de planteamiento de problemas que permiten estudiar el conocimiento y habilidades matemáticas del estudiantado para generar y resolver problemas matemáticos: situación libre, situación semi-estructurada y situación estructurada de planteamiento de problemas. En la primera los estudiantes plantean problemas sin ninguna restricción, en la segunda y tercer actividad los estudiantes trabajan con base en alguna situación, experiencia o información cuantitativa. Lo que cambia en estos dos últimos tipos es el nivel de estructuración de la tarea propuesta.

Finalmente, es importante mencionar que al hecho de inventar problemas se le ha dado distintas denominaciones por diferentes autores. Así, se le ha designado como generación de problemas o reformulación de problemas dados (Silver, 1994), formulación de problemas (Kilpatrick, 1987) y planteamiento de problemas (Brown & Walter, 1990). Sin embargo, estas denominaciones hacen referencia al mismo hecho, inventar problemas, por lo que se utilizará con más frecuencia la expresión invención de problemas. También, se puede decir que este es un proceso matemático que tiene lugar, durante la resolución de un problema matemático, luego de resolver un problema o cuando el sujeto se enfrenta ante una situación conocida previamente, para la cual no hay una formulación matemática.

A continuación se presentan algunos esquemas utilizados en investigaciones previas para valorar las producciones del estudiantado cuando inventa problemas.

Estudios previos sobre la valoración de las producciones de los estudiantes en tareas de invención de problemas

Como se mencionó, la investigación en invención de problemas se ha centrado en desarrollar enfoques de instrucción que incorporen este tipo de actividades en clase, así como estudiar las bondades que esta posee en la mejora de las habilidades matemáticas de los estudiantes (Espinoza, Lupiáñez & Isidoro, 2014); sin embargo, pocos estudios abordan esquemas que permitan valorar las producciones de estudiantes en contextos de invención de problemas.

Uno de ellos es el realizado por Leung & Silver (1997), quienes examinaron la calidad de las respuestas dadas por los estudiantes utilizando un proceso de tres pasos. Primero clasificaron cada respuesta como un problema matemático o no matemático; luego cada problema matemático fue ubicado como creíble o no creíble. Por último, determinaron todos aquellos problemas matemáticos creíbles con respecto a la suficiencia de la información proporcionada para resolver el problema planteado.

La complejidad matemática de los problemas la examinaron de acuerdo a si la solución del problema requería un único o múltiples pasos para su solución. El número de pasos requeridos para resolver el problema fue determinado por la trayectoria mínima de solución de la estrategia MEA (discutida en Newell & Simon, 1972) producida por cada problema que presentaba suficiente información para resolverlo. Las producciones de los estudiantes también fueron analizadas de acuerdo con su estructura semántica.

Cázares (2000) se centró en establecer niveles de desarrollo evolutivo en la competencia aritmética de un grupo de estudiantes en la invención de problemas aritméticos. Para ello, realizó un primer análisis general en el que consideró la estructura semántica de los enunciados planteados, la interpretación de los números como cantidades, el significado asignado a los números, el tipo de números utilizados, el dominio de las operaciones y las dificultades observadas en su realización.

También definió cinco categorías de análisis junto con una escala de evaluación que consta de cinco valores diferentes (1 a 5) que van de los niveles menos elaborados hasta cuestiones que muestran un mayor dominio de la tarea. Las categorías establecidas corresponden a: Coherencia global del enunciado, estructura semántica, utilización de los datos numéricos que aparecen en la imagen, la coherencia de las operaciones con la estructura del problema y la validez del procedimiento de resolución de problemas.

En el trabajo de Ayllón (2004), se valoraron las producciones de los estudiantes en función de cinco aspectos: si el enunciado se considera o no un problema, el número de operaciones necesarias en su resolución, la estructura numérica de la operatoria, la estructura semántica y el significado de los números.

Silver y Cai (2005) proponen tres criterios generales para valorar las respuestas generadas por los estudiantes: Cantidad, originalidad y complejidad.

La primera consiste en contar el número producciones correctas de un estudiante ante tarea de invención de problemas.

La originalidad fue valorada comparando un enunciado con el conjunto de respuestas típicas, de modo que si este era atípico, entonces, se consideraba como original.

Estos autores valoraron la complejidad de los problemas planteados de acuerdo con la sofisticación de las relaciones matemáticas implicadas en este y argumentan que los problemas que implican la relación entre dos o más cantidades son, generalmente, aunque no siempre, más complejos que aquellos que implican solo una. Del mismo modo, mencionan que los problemas que implican relaciones de multiplicación entre cantidades son generalmente más sofisticados que aquellos que implican relaciones aditivas.

También consideraron estudiar la complejidad lingüística implicada en el enunciado, de acuerdo con la presencia de proposiciones de asignación, relacionales o condicionales. Una proposición de asignación es una sentencia como "¿cuántas millas condujeron entre todos?" Una proposición relacional sería una sentencia como "¿cuántas millas más condujo Arturo que Jerome?" Una proposición condicional es una sentencia como "si Arturo condujo 80 millas más que Elliot, ¿cuántas millas condujo Arturo? Los autores afirman que los problemas con proposiciones condicionales y relacionales tienden a ser más difíciles de resolver que aquellos que contienen solo una proposición de asignación.

Estos autores mencionan que la complejidad matemática podría ser juzgada según el número de relaciones de estructura semántica, de manera que los problemas que implican gran cantidad de relaciones semánticas son más complejos matemáticamente que aquellos que implican menos relaciones.

Por último, en el estudio de Silver y Cai (1996), se presenta un esquema para examinar la naturaleza y complejidad de los problemas aritméticos, el cual consiste en clasificar las respuestas de los estudiantes en cuestiones matemáticas, no matemáticas y declaraciones. Las cuestiones matemáticas fueron clasificadas en resolubles y no resolubles. Si el problema planteado es resoluble, entonces se analizó su estructura semántica, lingüística y sintáctica; mientras que si el problema se clasificaba como no resoluble, entonces se analizaban solo los aspectos lingüísticos y sintácticos.

Una vez expuestos algunos estudios previos relacionados con la valoración de las producciones de los estudiantes en contextos de invención de problemas, se procede a exponer algunas variables de estudio implicadas en los problemas aritméticos.

Variables de estudio en los problemas aritméticos verbales

Algunas investigaciones ponen de manifiesto variables de estudio que son de interés en los problemas aritméticos. Al respecto, Puig y Cerdan (1988) destacan las variables sintácticas que están relacionadas con el orden y relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema. Algunos ejemplos de este tipo de variables son: longitud del enunciado, complejidad gramatical, presentación de los datos, ubicación de la pregunta, relación del orden en el que aparecen los datos en el problema y la secuencia operatoria para resolverlo, etc.

También se menciona otro tipo de variable denominada proposición interrogativa, la cual se relaciona con la pregunta del problema y puede hacerse sobre una asignación o relación (Castro, 1995). En el primer caso se desconoce la cantidad asignada y la pregunta demanda que se halle ese valor, por ejemplo: ¿Cuánto tiempo tardó Daniel en darle una vuelta a la pista? En el segundo caso, la interrogación se hace sobre la cuantificación de la comparación entre dos cantidades relacionadas, por ejemplo: ¿Cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel?

Silver y Cai (2005) agregan un tercer tipo de proposición interrogativa denominada condicional, en la cual la pregunta establece una condición entre dos elementos, por ejemplo: ¿Si María recorrió 300 metros más que Pedro, cuántos metros recorrió María? Estos autores asocian esta variable con la complejidad lingüística de un problema.

Por otra parte, Castro, Rico y Gil (1992) señalan dos criterios generales que determinan algunas variables de interés en la resolución de problemas aritméticos: la información proporcionada y la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta. En el primer criterio destacan los datos numéricos en la información, la cual

Uniciencia. Vol. 29, No. 1, pp. 58-81. Enero, 2015. ISSN Electrónico: 2215-3470
URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.4
Email: revistauniciencia@una.cr

puede distinguirse según el conjunto y tamaño de los números, la inclusión de datos superfluos, entre otros. En este criterio también mencionan la variable contexto de la información, en la que se incluyen aspectos como la credibilidad del problema y el vocabulario más o menos usual que se emplee.

En cuanto a la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta, los autores mencionan variables como las operaciones necesarias para la obtención del resultado y el algoritmo empleado en cada operación. Castro et al., (1997) hacen referencia a esta variable y mencionan que si los cálculos necesarios para resolver un problema aritmético implican solo adiciones y multiplicaciones, entonces es un problema de dos procesos.

En los problemas aritméticos también es relevante la información proporcionada en su enunciado, de forma que si se da explícitamente toda la información y, además, en forma numérica y se pregunta por otra cantidad, entonces el problema se clasifica como estándar; mientras que si el enunciado no proporciona toda la información cuantitativa necesaria para resolverlo, pero para alcanzar la solución es preciso realizar una serie de operaciones aritméticas, entonces el problema se clasifica como incompleto (Puig & Cerdán, 1988).

Otro aspecto a tomar en cuenta es el tipo de estructura operatoria y el número de etapas. Así, de acuerdo con Puig y Cerdán (1988), un problema aritmético se puede clasificar en: aditivo de una etapa, multiplicativo de una etapa, aditivo de más de una etapa, multiplicativo de más de una etapa y problemas de varias operaciones combinadas. Estos últimos son también llamados problemas mixtos y son aquellos que combinan las estructuras aditivas y multiplicativas, y su resolución requiere de más de una relación entre los datos (Castro, et al., 1997)

Por último, se debe considerar la componente semántico (Nesher, 1982, citado en Puig & Cerdán, 1988), el cual se clasifica de acuerdo con su estructura operatoria. Así, los problemas aditivos pueden ser clasificados de acuerdo con su componente semántico en: cambio, combinación, comparación e igualación; y los problemas multiplicativos en isomorfismo de medidas, comparación multiplicativa y producto de medidas.

Johan Espinoza González y otros

En la siguiente sección se muestra el esquema propuesto en este estudio para valorar las producciones de los estudiantes en contextos de invención de problemas. Este fue elaborado tomando en cuenta los estudios previos y las variables de estudio de los problemas aritméticos presentados anteriormente.

Una propuesta para analizar la producción de los estudiantes en contextos de invención de problemas aritméticos

Dado que este trabajo se centra en mostrar un esquema de análisis que permita valorar las producciones del estudiantado en contextos de invención de problemas matemáticos aritméticos, se considera pertinente presentar la noción de problema matemático y aritmético que se asumirá en esta investigación.

Con respecto a la noción de problema aritmético, se adoptó la propuesta de Castro (1991), quien señala cinco componentes que debe incluir una situación para ser considerada un problema matemático: una proposición (enunciado oral o escrito), unos datos conocidos, una intención (movilizar una o más personas para que lo resuelvan), una meta (llegar a un resultado) y un proceso (modo de actuación para alcanzar el resultado).

Con respecto a la noción de problema aritmético, se asume la definición propuesta por Puig y Cerdán (1988), quienes consideran que es aquel enunciado verbal o escrito en el cual la información proporcionada es de carácter cuantitativo, pues los datos suelen ser cantidades definidas generalmente de forma numérica. La condición implicada en el enunciado expresa relaciones cuantitativas entre los datos y la pregunta se refiere al cálculo de una o varias cantidades o relaciones entre cantidades.

Una vez presentada la noción de problema matemático y aritmético adoptada, se presentan a continuación las categorías de análisis empleadas para valorar los enunciados de los estudiantes.

Categorías de análisis empleadas para valorar las producciones de los estudiantes

El estudio de las variables que intervienen en los problemas aritméticos y la revisión de investigaciones previas que han empleado estrategia para valorar las producciones de los estudiantes permitieron definir tres categorías de análisis relacionadas con la estructura sintáctica, matemática y semántica del problema, así como variables de estudio en cada una de ellas. A continuación se presenta una descripción de dichas categorías con sus respectivas variables y el esquema propuesto para valorar los problemas del estudiantado.

Estructura sintáctica

La primera categoría considerada es la estructura sintáctica del problema, la cual se analizó con base en tres variables: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado.

- Longitud del enunciado: En esta variable se utilizó como indicador el número de proposiciones presentes. Las proposiciones hacen referencia a aquellas expresiones explícitas en el texto del enunciado que asignan un valor numérico o una cantidad a una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables. Cada una de estas expresiones aporta un dato al problema; sin embargo, algunas podrían no ser utilizadas en la solución de este, al aportar datos superfluos. Algunos ejemplos de proposiciones son: “El tren viaja a una velocidad de 348 km/h”, “Pedro corrió 300 metros más que Roberto” “María tiene el doble de caramelos que Juan”.
- Tipo de proposición interrogativa: Esta variable se relaciona con la pregunta del problema y se estudiará de acuerdo con la presencia de proposiciones de asignación, condicionales o relacionales. Una proposición interrogativa de asignación podría ser: “Cuantas personas viajaban en el tren”; una relacional es una declaración como: ¿Cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel?; mientras que una condicional es una declaración como: “Si María recorrió 300 metros más que Pedro, cuántos metros recorrió María”.

- Tipo de número empleado: En esta variable se estudia el tipo de número presente en el enunciado, que pueden ser números naturales o números racionales expresados en notación decimal o fraccionaria. De igual forma se podría estudiar el uso de más de un tipo de número en los problemas propuestos por el estudiantado.

Estructura matemática

La segunda categoría considerada corresponde a la estructura matemática del problema, la cual será estudiada con base en cuatro variables: tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema y cantidad de pasos distintos para resolver el problema.

- Tipo de estructura operatoria: Esta variable se puede clasificar de acuerdo con la estructura aditiva o multiplicativa (o ambas) y el número de etapas del problema. Así los problemas se pueden clasificar en: aditivos de una etapa, multiplicativo de una etapa, aditivos de más de una etapa, multiplicativo de más de una etapa o problemas mixtos.

- Tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema: Como parte del análisis matemático, se toman en cuenta las operaciones necesarias para resolver el problema, así como se debe determinar la cantidad de procesos distintos de cálculo requeridos para resolver el problema. En este sentido, si los cálculos necesarios para resolverlo implican solo operaciones aditivas y multiplicativas, entonces consideramos que se trata de un problema de dos procesos (Castro et al., 1997).

- Cantidad de pasos distintos para resolver el problema: Esta variable corresponde a la cantidad de pasos distintos para resolver el problema, considerando que dos pasos son iguales, si estos conllevan el mismo procedimiento de cálculo. Esta variable fue considerada porque cada paso distinto necesario para resolver el problema implica una relación semántica y un problema que contiene tres relaciones semánticas (iguales o distintas) puede ser más rico que otro con dos relaciones semánticas (iguales o distintas). Además, la cantidad de pasos puede condicionar la extensión en la resolución del problema.

Estructura semántica

Por último, los problemas pueden ser valorados de acuerdo con su estructura semántica. En este caso, un problema de estructura aditiva puede clasificarse como de combinación, cambio, comparación o igualación (o ambos) (Puig & Cerdán, 1988). De igual forma los problemas de estructura multiplicativa se pueden clasificar en isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medida.

En esta categoría también se estudia la cantidad de relaciones semánticas distintas presentes en el enunciado, de manera que si un problema involucra las siguientes relaciones semánticas: combinación, isomorfismo de medida y combinación; entonces se considera como un problema con dos relaciones semánticas distintas.

Una vez presentadas las tres categorías de análisis con sus respectivas variables de estudio, se procede a describir el esquema propuesto para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas.

Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

En primera instancia se deben catalogar las producciones del estudiantado en matemáticas/aritméticas o no. Luego, los problemas matemáticos/aritméticos se clasifican en no resolubles o resolubles. Los primeros pueden no ser resolubles, ya sea por incompletos (Puig & Cerdán, 1988) o porque presentan alguna incompatibilidad matemática de tipo numérica o conceptual (Espinoza, 2011). A los problemas matemáticos resolubles y no resolubles clasificados como incompletos o que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérica se les aplica el análisis de la estructura sintáctica, semántica y matemática, explicado anteriormente. Mientras que los problemas matemáticos que presentan incompatibilidad matemática de tipo conceptual son analizados solo desde su estructura sintáctica, pues no es posible analizar la estructura semántica y matemática. Cabe mencionar la importancia de valorar las produccciones de estudiantes que son no resolubles, ya que pueden presentar características importantes de analizar.

Uniciencia. Vol. 29, No. 1, pp. 58-81. Enero, 2015. ISSN Electrónico: 2215-3470
URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.4
Email: revistauniciencia@una.cr

La siguiente figura muestra un resumen del esquema propuesto para analizar los enunciados de los estudisntes.

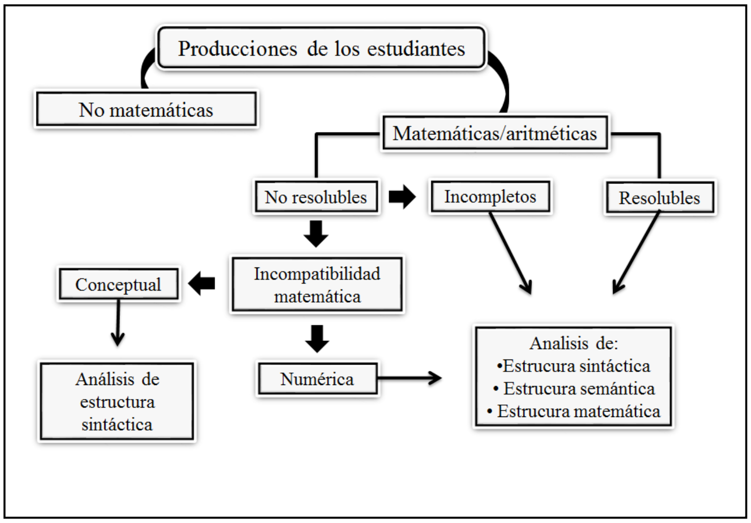

Figura 1. Esquema de análisis para valorar las producciones de los estudiantes

Un ejemplo práctico del uso del esquema de análisis

A continuación se presenta un ejemplo práctico que ilustra el uso del esquema de análisis. Para ello, supongamos que el estudiantado debe plantear, con base en la siguiente figura, un problema que le parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división.

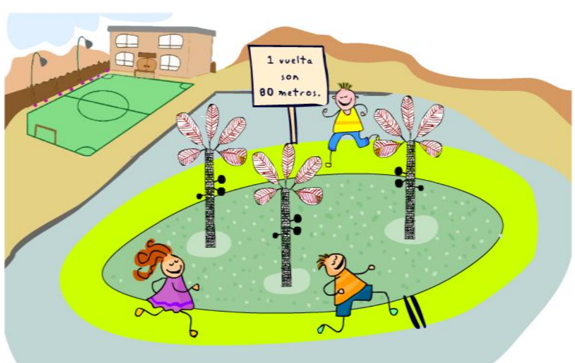

Imagen 1.

Imagen presentada en la primera tarea de invención de problemas.

A partir de esta ilustración, un estudiante podría inventar el siguiente problema:

"Si tres chicos giran en torno a una plaza y una vuelta son 80 metros, si el primer niño consigue dar 17 vueltas y la siguiente niña 29 y en total han hecho entre todos 5000 metros ¿Cuántas vueltas ha dado el 3° niño?

Una posible solución del problema es la siguiente:

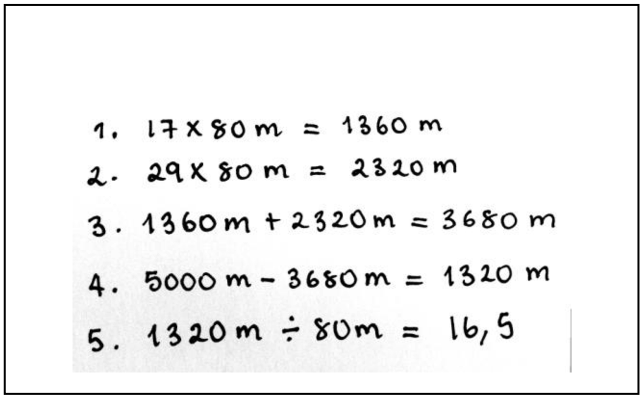

Figura 2. Posible solución del problema planteado.

Siguiendo el esquema de análisis propuesto en la figura 1, el problema se clasifica como matemático y aritmético, ya que cumple con las características propuestas por Castro (1991) y Puig y Cerdán (1988). Luego se analiza si es resoluble o no. En este caso, el problema tiene solución, por lo que se le aplicará el análisis según la estructura sintáctica, semántica y matemática.

Con respecto a la estructura sintáctica, el problema posee las siguientes cinco proposiciones:

1. tres chicos giran en torno a una plaza
2. una vuelta son 80 metros
3. el primer niño consigue dar 17 vueltas
4. La siguiente niña 29
5. en total han hecho entre todos 5000 metros.

Uniciencia. Vol. 29, No. 1, pp. 58-81. Enero, 2015. ISSN Electrónico: 2215-3470
URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.4
Email: revistauniciencia@una.cr

En cuanto al tipo de número, se observa el empleo de solo número naturales y el tipo de proposición interrogativa es de asignación.

En relación con la solución del problema y que se relaciona con la estructura matemática, se puede observar en la figura 3 que el problema requiere de 5 procedimientos para ser resuelto; sin embargo, los dos primeros implican el mismo procedimiento de cálculo, mientras que los otros cuatro son distintos. Así, el problema requiere los siguientes cuatro pasos distintos para ser resuelto:

1. calcular la distancia recorrida por el primero y segundo niño
2. sumar las distancias calculadas en el paso anterior
3. calcular la distancia recorrida por el tercer niño
4. Calcular la cantidad de vueltas dadas por el tercer niño.

También se observa que el problema es de estructura mixta y que se necesitaron las cuatro operaciones básicas para resolverlo, por lo que presenta cuatro procesos distintos.

Por último, el enunciado presenta tres relaciones semánticas distintas correspondientes a isomorfismo de medidas, combinación y cambio. A continuación se presenta un resumen del análisis realizado.

Tabla 1

Valoración del problema de acuerdo con las variables de estudio

Cantidad de proposiciones	5 (Subrayadas en el enunciado)
Tipo de número	Naturales
Tipo de proposición interrogativa	Asignación
Cantidad de pasos distintos	4
Estructura operatoria	Mixta
Cantidad de procesos	4 (+, -, x, :)
Cantidad de relaciones semánticas	3 (Isomorfismo de medidas, combinación y cambio)

Uniciencia. Vol. 29, No. 1, pp. 58-81. Enero, 2015. ISSN Electrónico: 2215-3470
URL: www.revistas.una.ac.cr/uniciencia DOI: http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.4
Email: revistauniciencia@una.cr

Como se mencionó anteriormente, también es importante analizar los problemas no resolubles por la riqueza que estos puedan presentar. Al respecto, supongamos que un estudiante debe plantear un problema con base en la siguiente información presentada de forma textual: Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros.

A partir de esta situación un estudiante podría inventar el siguiente problema:

"Un tren con una capacidad máxima de 294 pasajeros sale de una estación con una cantidad desconocida de pasajeros. En la primera estación baja la tercera parte de los pasajeros y sube la mitad del máximo de los pasajeros, en la segunda baja 1/8 de los pasajeros que había en el tren y no sube nadie. ¿Cuántos pasajeros había al principio si ahora hay 120?

Este problema plantea una serie de relaciones entre los datos y presenta una riqueza en cuanto a las variables de estudio; sin embargo, no es resoluble porque presentan una incompatibilidad matemática de tipo numérica. Esto se debe a que la cantidad inicial de pasajeros es de aproximadamente 29,57, lo cual no puede ser posible. La siguiente es una posible solución del mismo.

Sea x la cantidad inicial de pasajeros

1) $\frac{1}{3}x$

2) $\frac{1}{2} \cdot 294 = 147$

3) $147 - \frac{1}{3}x$

4) $\frac{1}{8}\left(147 - \frac{1}{3}x\right)$

5) $\left(147 - \frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{8}\left(147 - \frac{1}{3}x\right) = 132$

6) $x \simeq 29{,}57$

Figura 3. Posible solución del problema planteado.

De acuerdo con el esquema de análisis, el problema se debe estudiar según las tres categorías establecidas. A continuación se presenta el resumen del análisis realizado.

Tabla 2

Valoración del problema de acuerdo con las variables de estudio

Cantidad de proposiciones	6 (Subrayadas en el enunciado)
Tipo de número	Naturales y fraccionarios
Tipo de proposición interrogativa	Condicional
Cantidad de pasos distintos	5 pasos
Estructura operatoria	Mixta
Cantidad de procesos	3 (-, x, :)
Cantidad de relaciones semánticas	2 (Isomorfismo de medidas y cambio)

Como se puede observar, a pesar que el problema se clasifica como no resoluble por incompatibilidad matemática de tipo numérica, presenta una riqueza similar al problema resoluble analizado anteriormente.

Conclusiones

En primera instancia, rescatamos el hecho de que la invención de problemas es una actividad relevante dentro del salón de clases y parte significativa de la experiencia matemática de cualquier estudiante. A pesar de ello, existen pocos estudios que aborden esquemas que permitan valorar las producciones del estudiantado ante este tipo de tareas, lo cual es tan importante como indagar acerca de las estrategias de planteamiento de problemas.

Quizás esto se deba a la laboriosidad que conlleva construir un esquema de este tipo, pues requiere de un estudio profundo de las variables que intervienen en la construcción de un determinado problema y del contenido matemático implicado en el mismo, por lo que este trabajo es aún más complejo si se solicita plantear problemas a través de una situación libre.

Por otra parte, se concluye que el esquema de análisis propuesto permite estudiar y caracterizar los problemas planteados por el estudiantado. Esto, porque cada enunciado matemático es analizado desde tres aristas relacionadas, primeramente, con la parte sintáctica de problema que aborda la extensión y el tipo de información que proporciona; luego la matemática que analiza la complejidad matemática implicada en su solución y, por último, la semántica, que indica las relaciones establecidas entre la información proporcionada y que también es un indicador de la complejidad del problema. Ante esto, se podrían establecer diferentes niveles de riqueza en las producciones estudiantiles.

Además, consideramos que podría utilizarse como un instrumento para valorar el aprendizaje alcanzado por el estudiantado luego del proceso de instrucción, o también como una herramienta de diagnóstico que se puede emplear antes de iniciar un tema.

Otro aspecto interesante es el hecho de que el esquema permite diferenciar niveles de complejidad y riqueza entre diferentes problemas planteados y que se relaciona con su dificultad de la solución. Esto, porque un problema posee mayor complejidad y presenta mayor riqueza, si está conformado por una mayor cantidad de proposiciones y tipos de números, requiere más pasos y procesos de cálculo distintos para ser resueltos, presenta una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas y contiene proposiciones interrogativas condicionales o relacionales.

Por ello, consideramos que dicho esquema puede emplearse en la identificación de niños y niñas con talento matemático, ya que algunos estudios (Ellerton, 1986; Espinoza, 2011) manifiestan que los problemas inventados por los estudiantes más hábiles presentan mayor riqueza en cuanto a la dificultad de cálculo, poseen una mayor cantidad de operaciones e implican un sistema numérico más complejo. Sin embargo, es necesario un estudio más profundo que garantice su uso en la caracterización del talento matemático.

Por último, creemos necesario analizar los problemas no resolubles, dada la riqueza que pueden presentar con respecto a las demás variables de estudio; esto, a pesar de que no sea posible determinar una solución numérica. Además, consideramos que el inventar un problema resoluble o no es parte del proceso de invención de problemas.

Referencias

Ayllón¸ M. (2004). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación.* Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada

Brown, S., & Walter, M. (1990). *The Art of problem posing [El arte de inventar problemas]*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, S., & Walter, M. (1993). *Problem posing [Invención de problemas]* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E. (1991). Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. *Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática*. Universidad de Granada.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. (Tesis doctoral). Granada: Comares.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo; B. Gómez; M. Camacho; L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140). Basajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática* (pp. 1-15). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., González, E., Morcillo, N., Fernández, F. (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio nacional de la SEIEM,* (pp. 63-76). Granada: SEIEM.

Castro, E., Rico, L., & Gil, F. (1992). Enfoque de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las ciencias*, *10*(3), 243-253.

Cázares, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria: Un estudio evolutivo.* Memoria de tercer ciclo. Universidad de Granada.

Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet 14*(2), 1-12.

Ellerton, N. (1986). Children's made up mathematics problems- A new perspective on talented mathematicians *[Problemas matemáticos creados por estudiantes- Una nueva perspectiva sobre el talento matemático]*. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 261-271. http://dx.doi.org/10.1007/BF00305073

English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities *[Desarrollo de habilidades de invención de problemas de niños de quinto grado]*. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 183-217. http://dx.doi.org/10.1023/A:1002963618035

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task[Las matemáticas como tarea educativa]*. Dordrecht: Reidel.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem come from? *[Formulación de problemas: ¿De dónde viene un buen problema?]* En A. Shoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education [la ciencia cognitiva y la educación matematica]*, pp 123-148. New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Leung, S., & Silver, E (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers*[El papel del formato de las tareas, el conocimiento matemático y el pensamiento creativo sobre la invención de problemas aritméticos de futuros profesores de primaria]*. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 5-24. http://dx.doi.org/10.1007/BF03217299

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. *[Una agenda de acción: Recomendaciones para las matemáticas escolares en la década de 1980]* Reston, VA: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School of Mathematics[Plan de estudios y estándares de evaluación para la Escuela de Matemática]*. Reston, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics[Estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas]. Reston*, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics[Principios y estándares para la Escuela de Matemática]. Reston*, VA: El autor

Newell, J. A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving [Resolución de problemas humanos]*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning[Matemáticas y razonamiento plausible]*. Princenton, NJ: Princenton University Press.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

Silver, E. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students*[Un análisis de los problemas aritméticos planteados por estudiantes de secundaria]*. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539. http://dx.doi.org/10.2307/749846

Silver, E., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing *[Evaluación de los problemas matemáticos inventados por los estudiantes]*. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129-135.

Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing *[Sobre la invención de problemas matemáticos]*. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19-28.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., & Kenney, P (1996). Posin matehematical problem: An exploratory study *[Invención de problemas matemáticos: Un estudio exploratorio]*. *Journal for research in matehematics education. 27*(3), 293-309. http://dx.doi.org/10.2307/749366

Silverman, F. L., Winograd, K., & Strohauer, D. (1992). Student generated story problems*[Problemas de historia generados por estudiantes]*. *Arithmetic Teacher, 39* (8), 6-12.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms *[La invención de problemas en clases de matemática]*. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective[Investigación en Educación Mateamática: una perspectiva contemporanea]*, pp 164-185. Edit Cowan University: MASTEC.