



Uniciencia

E-ISSN: 2215-3470

revistauniciencia@una.cr

Universidad Nacional

Costa Rica

Molina-Mora, Jose-Arturo

Experiencia basada en la triada TICs, enseñanza por proyectos y modelado para la  
enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales

Uniciencia, vol. 29, núm. 2, julio-diciembre, 2015, pp. 46-61

Universidad Nacional

Heredia, Costa Rica

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947236004>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

## **Experiencia basada en la triada TICs, enseñanza por proyectos y modelado para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales**

*ICT-projects-modeling based experience for teaching of systems of differential equations*

**Jose-Arturo Molina-Mora**

[jose.molinamora@ucr.ac.cr](mailto:jose.molinamora@ucr.ac.cr)

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

San José, Costa Rica.

Recibido-Received: **6/ago/2014** / Aceptado-Accepted: **10/ene/2015** / Publicado-Published: **31/jul/2015**.

### **Resumen**

Uno de los retos en la educación es la mejora continua a fin de buscar nuevas estrategias en la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje y la calidad del mismo. La incorporación de las TICs (Tecnologías de la Información y la Comunicación), la enseñanza por proyectos y el modelado matemático se proponen en una estrategia para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones diferenciales a nivel universitario. La implementación realizada mostró resultados favorables de los estudiantes, los cuales tuvieron que describir esquemáticamente el problema, plantear el modelo matemático, realizar y analizar simulaciones y predicciones, en todos los casos con problemas relacionados con el área académica del estudiante.

**Palabras claves:** TICs; Proyectos; Modelado; Ecuaciones-Diferenciales.

### **Abstract**

One of the challenges in education is the continuous improvement in order to search for new strategies in the management of teaching and learning and the quality of the process. The incorporation of ICTs (Information and Communication), project teaching and mathematical modeling propose a strategy for teaching of systems of differential equations at the university level. The implementation showed favorable results on the students, who had to schematically describe the problem, raise the mathematical model, perform and analyze simulations and predictions, in all cases with problems related to the student's academic area.

**Keywords:** ICT; projects; modeling; Differential-equations.

Parte de los retos en la educación es la mejora continua, con el fin de buscar nuevas estrategias en la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje y la calidad del mismo. Particularmente en matemáticas, nuevas propuestas en la didáctica se han implementado en muchos ámbitos, incluyendo la introducción de las TICs (Tecnologías de la Información y Comunicación) el cual, en parte, es respuesta de los grandes avances del software matemático en la últimas dos décadas. En el aula cada vez se popularizado el uso de paquetes computacionales y que ya han implicado cambios significativos en la forma de enseñar y aprender, incluyendo el nivel universitario, con el desarrollo de competencias, conocimientos y valores fundamentales para el proceso y donde el uso de las TICs ha sido clave (Gatica y Ares, 2012).

Un concepto integral de las TICs en educación puede entenderse como la suma implícita y explícita de todos los medios desarrollados en torno al surgimiento de la ciencias de la informática y que permiten la comunicación e interacción con fines educativos, ya sea tanto de manera sincrónica o asincrónica como de forma individual o colectiva (Herrera, 2004). El uso de herramientas computacionales para la enseñanza trata de crear un conjunto de algoritmos que posibiliten la explotación de los medios técnicos disponibles, poniéndolos en función de informar, controlar, dirigir y evaluar la actividad del estudiante, de modo que éste pueda alcanzar los objetivos previstos (Fernández, 2000).

Sin embargo, tradicionalmente muchos de los cursos de matemática han sido criticados por no realizar una conexión clara con el entorno y con problemas de la vida cotidiana (Angel y Bautista, 2001), o por realizar aplicaciones muy básicas, como cursos de *Ecuaciones Diferenciales* y *Métodos Numéricos*, los cuales tienen gran potencial por la cantidad de aplicaciones a problemas comunes a diversas áreas, como la ingeniería, la salud, biología y las ciencias económicas. En el caso particular de cursos de Ecuaciones Diferenciales, muchos estudiantes han cuestionado el posible uso de las ecuaciones diferenciales para sus carreras y el quehacer profesional, argumentando una falta de ejemplos más específicos a sus áreas de interés y por ello, cierta falta de motivación. Como respuesta a esto, algunas iniciativas han buscado la introducción de la enseñanza por proyectos y por modelado matemático.

Una de las propuestas que han realizado una integración del modelaje y las TIC es la presentada por Paredes y colaboradores (2009) para la enseñanza del álgebra lineal, en el que hicieron uso de software de cálculo simbólico y la modelización como componentes del conocimiento didáctico para la formación inicial de profesores de Matemática.

Los mismos autores indican que se han identificado elementos que generan debilidades en la apropiación de conocimientos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, como lo son los primeros pasos en el uso del formalismo, pérdida de conexión con sus conocimientos previos, ausencia o debilidad en las bases matemáticas, la complejidad del lenguaje específico de cada área de la matemática universitaria y la poca utilización de problemas reales o relacionados con las áreas de interés de los estudiantes (Paredes et al., 2009).

## Marco teórico

Las TICs en conjunto con la enseñanza por proyectos y el modelado brindan la posibilidad de mejorar la eficiencia del proceso de enseñanza-aprendizaje, en donde el estudiante tenga un papel más activo, otorgando características renovadoras y creativas a los problemas educativos, desarrollar el arte de la experimentación, estimular habilidades analíticas, la comprensión del aprendizaje conceptual por asociación y el trabajo en colaboración o por pares (Ré et al, 2012).

En el caso de la enseñanza por proyectos, y a diferencia del aprendizaje basado en la resolución de problemas donde se resolvía un problema específico, se busca la incorporación de diversos problemas en un solo módulo de aprendizaje, en el que se da énfasis en el “hacer” (Castillo, 2008). Esto permite que se dé una integración de conceptos teóricos con prácticas, aplicaciones y problemas, el cual se puede beneficiar con el uso de software específico. El aprendizaje por el desarrollo de proyectos logra mejores resultados si estos son planteados vinculándolos directamente con el contexto estudiantil, y que, con las nuevas tendencias de acceso a las tecnologías, deberían estar conectadas con herramientas TICs a fin de ser más atractivos para los estudiantes (Alfaro et al, 2012).

Así, el método de enseñanza por proyectos tiene por objetivo enfrentar al estudiante ante un tópico particular, que le permita interactuar con sus compañeros y realizar tareas particulares, con el potencial de generar conocimiento en su proceso de resolución. El estudiante participa en el desarrollo de su propio aprendizaje, y transforma en cierta manera su rol pasivo para tomar parte activa en el proceso (Alfaro et al, 2012). La enseñanza de la matemática mediante proyectos ya ha sido utilizada en algunos campos de la matemática, pero no hay reportes de su uso en cursos de Ecuaciones Diferenciales.

Por otra parte, la enseñanza por modelado corresponde a la simulación de fenómenos naturales y su análisis con herramientas matemáticas y computacionales. El modelado logra propiciar el aprendizaje por descubrimiento, aspecto que es común en matemáticas para propiciar el establecimiento de reglas y demostración de proposiciones y teoremas (Macías, 2007). Así, el desarrollo de proyectos y modelado en matemática también permiten una participación activa de los estudiantes, estimulando la creatividad para el diseño, implementación, evaluación y manipulación de diversos modelos a problemas comunes en las áreas de interés de los estudiantes (Villalobos et al., 2012). Además, el proceso de educación mediante proyectos y modelado también fortalece el papel del estudio independiente y de la apropiación activa del conocimiento, donde se confronta con la opinión de sus grupos de pares (Fernández, 2000).

Las TICs y su uso con la modelización y el aprendizaje por proyectos han alcanzado grandes niveles de significancia a todo nivel en educación, incluyendo la educación universitaria. Por ello, es requerido que el docente y el estudiante adquieran y asuman funciones diferentes a los métodos más tradicionales, esto como respuesta al cambio en los paradigmas de la educación en su proceso normal de mejoramiento y transformación continua (Belandó, 2014). Esta triada logra además escalabilidad para la resolución de problemas, en donde cada uno aporta diferentes herramientas para analizar una situación o

problema de mayor magnitud a los problemas tradicionales, sin dar un pleno énfasis a los cálculos algebraicos y logrando la motivación de los estudiantes.

Ya algunos autores han descrito la relevancia del aprendizaje por proyectos y que pueden sumarse a las ventajas de la enseñanza basada en la triada TICs-proyectos-modelado, (Moursund, 1999; Carrillo, 2008): (i) el desarrollo de competencias, tanto con sus pares como con el profesor, al tener un dominio claro a un problema específico de su área de estudio; (ii) mejoramiento de las destrezas para indagar su entorno, o investigación; (iii) incrementar las habilidades mentales y tomar decisiones al desarrollar la propuesta; (iv) fortalecer su conocimiento en las herramientas específicas de TICs; (v) desarrollar el pensamiento crítico, autocrítico y la evaluación de sus implementaciones y de otros; (vi) compromiso con lo que hacen, al trabajar en pequeños grupos y con estudiantes de carreras afines; (vii) extiende el concepto de “enseñanza por resolución de problemas” a un conjunto más general y de aplicación en la vida real; (viii) favorece la comprensión de conceptos abstractos a partir de casos particulares; y (ix) permite reforzar conocimientos previos y conectarlos con los nuevos.

Sin embargo, uno de los retos de las TICs y el uso de software especializado conduce hacia el crear conciencia de que la tecnología no sustituye lo que se debe enseñar y aprender, sino más bien a la forma en que se realiza y la exploración de problemas de mayor complejidad, que sin el uso de herramientas computacionales serían sumamente difíciles de analizar (Angel y Bautista, 2001).

Una propuesta del año 2001 (De Faria, 2001) incorpora ejemplos relacionados con aplicaciones de las ecuaciones diferenciales y aplicaciones, en el que se da énfasis al uso de la calculadora graficadora y lenguaje de programación para el cálculo y análisis de diversos problemas. En conjunto, se propone que estas herramientas se convierten en elementos esenciales para la construcción de conceptos matemáticos y colaborar con una mejor gestión de las dificultades en el proceso enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

En este sentido, otro estudio por Perdomo (2011), expone la utilidad de software para el modelado, análisis e interpretación de problemas relacionados con ecuaciones diferenciales de primer orden, en el que inicialmente se identificó una tendencia de los estudiantes a centrarse en la búsqueda de algoritmos de resolución para dar respuesta a las actividades propuestas y con una débil habilidad para establecer conexiones entre distintas interpretaciones de los conceptos en ecuaciones diferenciales ordinarias. Con esta idea, se trabajó con la incorporación de las TICs para reformular la estrategia didáctica para dar más énfasis a la comprensión e interpretación, obteniendo resultados favorables respecto a la resolución de problemas post-exposición a las experiencias de las TICs (Perdomo, 2011).

Otras dificultades que han sido planteadas en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales se refieren a debilidades en el concepto de aproximación y métodos numéricos simples (usualmente considerado no válido o secundario a los métodos algebraicos) y debilidades en la interpretación de resultados, así como las concepciones que tienen algunos docentes respecto sub-estimar las competencias que los estudiantes pueden

desarrollar en proceso (Morales y Salas, 2010). La diversidad de estas dificultades puede ser gestionada con una plataforma que incluya diferentes perspectivas de los problemas, como lo pueden la conjunción de paradigma algebraico con el geométrico y del análisis numérico (Morales, 2009), además del estudio por modelado y por proyectos (Alfaro et al., 2012; Macías, 2007).

## Metodología

La implementación de la triada TICs, enseñanza por proyectos y modelado se realizó en el curso de Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. Este curso corresponde a una materia de servicio de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, y que se brinda para estudiantes de las carreras de Farmacia, Ingeniería de Alimentos, Enseñanza de las Ciencias, Biología, Ingeniería en Biosistemas y Topografía. Las TICs se han ido incorporando paulatinamente desde mediados del año 2011, a través de un proyecto de investigación para la incorporación de las TICs en la enseñanza de la matemática en diferentes cursos, lo cual ha permitido la adquisición de recurso físico y software y con ello una mejor integración teoría-TICs, contando actualmente con un laboratorio propio para los cursos de servicio y para 30 estudiantes.

Durante los años 2012 y 2013, se realizaron prácticas asociadas a las clases teóricas y laboratorios específicos, logrando abarcar el 100% de los temas con actividades vinculadas a las TICs. Las prácticas asociadas a las clases teóricas son actividades que se usan o implementan en forma paralela a la teoría y con el uso de recursos ya elaborados y disponibles en la web, mientras que los laboratorios son una serie de actividades que usan software especializado y con lenguaje de programación básico.

En ambos casos, las actividades logran la introducción, desarrollo o extensión de los contenidos de los diversos temas. A partir del primer semestre del año 2014, previo una prueba piloto a finales del 2013, se incorporaron actividades de investigación para ampliar los contenidos del curso y enfocados por área académica del estudiante. Así, la introducción de las TICs en el curso actualmente se da en tres niveles: a nivel de las clases teóricas, a nivel de las clases propias de laboratorio y a nivel del proyecto de investigación.

Para el desarrollo de los laboratorios y el proyecto de investigación se disponen de programas de cálculo numérico y simbólico, incluyendo Mathematica, MuPAD, Winplot, Winmat, MATLAB, CellDesigner, Excel y COPASI. Además, se cuenta con una plataforma virtual de *moodle* que contiene diversos recursos para la incorporación de las TICs como lo son el acceso a archivos, foros, tareas, cuestionarios, taller de pares, accesos a editores Latex, enlace a videos creados específicamente para el curso, plataforma en línea Wolfram-Alpha y Wolfram-Demonstrations y plataformas de simulación para biología de sistemas, siendo este último de particular importancia para los proyectos.

En la Tabla 1 se describen cada uno de los laboratorios del curso de Ecuaciones Diferenciales Aplicadas, los cuales, a excepción del Laboratorio 12 (partes 1, 2 y 3), corresponden con la teoría del curso en el orden cronológico. En la misma tabla se aprecia



la descripción básica de las actividades. La versión anterior del curso no incluía las actividades para el desarrollo del proyecto, sino que se trabajaba con un ejemplo clásico de tanques interconectados a lo largo de tres sesiones.

Tabla 1.

*Descripción de contenidos y laboratorios en el curso de ecuaciones diferenciales aplicadas*

Contenido	Subcontenido	Laboratorio	Actividad
1. Métodos clásicos de Ecuaciones Diferenciales	Introducción al uso de software en matemática	Laboratorio 1: Introducción al cálculo simbólico con Mathematica	Cálculos y operaciones en Mathematica: funciones, límites, derivadas, integrales y graficación. Escritura de archivos con Latex.
	Concepto de solución y clasificación	Laboratorio 2: Graficación de soluciones de una ED y su interpretación	Análisis de isóclinas y familia de curvas, solución general y particular.
	Resolución de ED	Laboratorio 3: Resolución de ED con uso de paquete de cómputo y su graficación	Resolución de ED mediante cálculo simbólico, graficación e interpretación.
	Métodos numéricos para ED	Laboratorio 4: Resolución de ED numéricamente	Cálculo numérico para resolver ED: Métodos de Euler y Runge-Kutta cuarto orden.
2. Aplicaciones de ED de primer orden	Crecimiento logístico y Tanques simples	Laboratorio 5: Uso de software para resolver aplicaciones de Problemas de Valor Inicial (PVI)	Planteamiento, resolución e interpretación de PVI mediante uso de software (incluye el uso de Laboratorios 1, 2 y 3)
	Curvas ortogonales	Laboratorio 6: Interpretación gráfica de curvas ortogonales	Utilización de software para resolver algebraicamente ejercicios de curvas ortogonales y su interpretación gráfica.
3. Repaso de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales (SEL)	Análisis gráfico de SEL	Laboratorio 7: Uso de software para cálculos con matrices, determinantes y SEL	Análisis de sistemas de ecuaciones lineales resueltos y su interpretación.
	Matrices y determinantes		Cálculos y operaciones básicas de matrices y determinantes.
	Resolución de SEL	Laboratorio 8: Uso de software para resolución e interpretación de SEL	Resolución de SEL mediante cálculo numérico, simbólico y graficación para visualización de soluciones (3x3).
	Aplicación de SEL		Planteamiento, resolución e interpretación de aplicaciones de SEL
4. Ecuaciones Diferenciales de orden superior	Resolución de ED de orden superior	Laboratorio 9: Resolución de ED de orden superior	Utilización de software para la solución de ED de orden superior, graficación de soluciones e interpretación
	Aplicaciones de ED de segundo orden	Laboratorio 10: Aplicaciones de ED de segundo orden	Planteamiento, resolución e interpretación de aplicaciones de ED de segundo orden: circuitos y resortes.
5. Sistemas de ecuaciones diferenciales (SED)	Resolución de SED y tanques conectados	Laboratorio 11: Resolución de SED y aplicación a tanques	Proyecto: Resolución e interpretación de SED de tanques interconectados mediante cálculo numérico y simbólico
	Aplicaciones de SED	Laboratorio 12-1: Proyecto	Proyecto SED: Planteamiento y graficación del modelo
	Aplicaciones de SED	Laboratorio 12-2: Proyecto	Proyecto SED: Ajuste de parámetros del modelo y graficación
	Aplicaciones de SED	Laboratorio 12-3: Proyecto	Proyecto SED: Simulaciones e interpretación del modelo
6. Transformada de Laplace (TL)	Definición y propiedades de TL	Laboratorio 13: Introducción a Transformada de Laplace	Cálculo de TL por definición e inferencia de propiedades básicas.
	Resolución de ED con TL	Laboratorio 14: Resolución de ED con TL	Utilización de software simbólico para resolver ED con la TL.
	Tanques interconectados	Laboratorio 15: Aplicación de SED y resolución por TL	Utilización de software simbólico para resolver SED de tanques interconectados con la TL.

Fuente: propia del estudio.

La introducción del proyecto corto de investigación se realizó con el fin de vincular las ecuaciones diferenciales con las diferentes áreas de estudio de los estudiantes que matriculan el curso. Para ello se implementó una serie de actividades relacionadas con la

creación de un modelo explicado con ecuaciones diferenciales. Para todos los casos, a excepción del tema de Geodesia, los modelos de ecuaciones diferenciales se resuelven con un planteamiento de tanques interconectados, en el que la variación es justamente el tanque.

Por ejemplo, en un problema biológico el tanque puede ser el núcleo o la mitocondria, mientras que en un sistema de producción de un metabolito el tanque es representado como una caldera. Así, se tiene una misma formulación matemática pero con una interpretación propia de cada caso. Para el tema de Geodesia, el sistema de ecuaciones diferenciales se estableció a partir de trigonometría esférica.

El proyecto de investigación fue realizado en grupos de estudiantes de la misma área académica, donde el docente tiene un papel de asesoría a través de las 3 secciones del Laboratorio 12, como se detalla en la Tabla 1. Previamente a la sesión 1, el tema se asignó con a los grupos de trabajo y se dio una serie de conceptos relacionados con la aplicación, con lo que debían indagar al respecto. Luego se brindó una guía de trabajo, para el cual construyó de una red de tanques que explicara el problema y su construcción en el software Cell Designer, con la incorporación de las ecuaciones diferenciales.

Tabla 2.

*Descripción de temas de proyectos cortos de investigación*

Tema de proyecto	Objetivo	Descripción básica	Área académica
Ecuación de Lotka-Volterra para cadena trófica	Modelar la relación predador-presa para una cadena trófica lineal con la cinética de Lotka-Volterra	Las poblaciones de especies en una cadena trófica varían en forma cíclica y coordinada, pero la alteración de alguna de las condiciones puede llevar a un cambio en la dinámica global. Se quiere modelar el sistema y ver los efectos de perturbaciones.	Biología y enseñanza de las ciencias
Cadena trófica y Ciguatera	Modelar el biotransporte de la ciguatoxina en una cadena trófica lineal	La ciguatoxina se transporta, mediante una cadena trófica, por diversas especies marinas y puede llegar hasta el ser humano. Se requiere modelar la cantidad de especies afectadas y determinar el tiempo de veda, que corresponde al periodo en el que se reducen las especies con la toxina.	Ingeniería de alimentos e ingeniería en Biosistemas
Distribución de drogas en organismo	Describir una red que modele la farmacocinética de una droga en el organismo.	Las drogas en el organismo pasan por procesos de absorción, distribución, metabolismo y excreción, el cual puede ser modelado. Además, se puede evaluar los efectos de dichos procesos en diversas condiciones patológicas que cambien la cinética usual.	Farmacia y enseñanza de las ciencias



Glicólisis y enfermedad de Tarui	Modelar la vía de la glicólisis y la enfermedad de Tarui para identificar blancos para revertir la enfermedad.	La enfermedad de Tarui es una deficiencia en la enzima fosfofructokinasa de la glicólisis, que imposibilita el aporte de energía a las células. Se quieren identificar posibles blancos para terapia que reviertan la enfermedad.	Farmacia, enseñanza de las ciencias y Biología
Vía activación NfKb en pancreatitis	Identificar blancos terapéuticos para disminuir el efecto inflamatorio exacerbado de una pancreatitis por el alto nivel de TNF-alfa	La vía NFkB mediada por TNFa participa en la pancreatitis, ocasionando una exacerbada inflamación que agrava la enfermedad. Se quieren encontrar posibles pasos para reducir el efecto inflamatorio que ocasiona las complicaciones de la enfermedad.	Farmacia
Biorreactores para un producción de metabolitos	Establecer un modelo de tanques para describir un biorreactor que produce metabolitos bacterianos.	Los biorreactores son grandes sistemas para la producción de moléculas, producto del metabolismo bacteriano. Se quiere modelar el sistema y determinar las alteraciones del sistema que maximizan la producción de metabolitos.	Ingeniería de alimentos e ingeniería en Biosistemas
Análisis geodésico: Problema directo	Aplicar un modelo de sistema de ecuaciones diferenciales para resolver el problema directo de la geodesia.	El problema directo de la geodesia consiste en determinar las coordenadas geodésicas de un punto B a partir de otro punto A, conociendo los ángulos sobre el elipsoide que representa la tierra y la distancia al nuevo punto. Se quiere plantear y resolver numéricamente el problema, usando un método de Runge-Kutta de cuarto orden.	Topografía y Geología

Fuente: propia del estudio.

En una segunda sesión, se incorporaron los valores de los parámetros y así evaluar el comportamiento del sistema mediante graficación. A partir del modelo ajustado, la tercera sesión incluyó la alteración del sistema para brindar explicaciones del comportamiento global en el contexto del problema, el cual constituye la principal sección para la investigación. En la última sesión del curso, los trabajos del curso fueron expuestos a los compañeros con un diseño de investigación clásico, incluyendo una introducción, problema, hipótesis, metodología y resultados con discusión.

Por otra parte, los temas de los proyectos correspondieron a temas de interés por área académica, y que fueron seleccionados al indagar la literatura y diferentes especialistas ya graduados en las carreras que deben matricular el curso. En total se contaron con 7 temas para trabajar, de los cuales 3 asignados a estudiantes de Farmacia, ya que constituyen el grupo dominante en la matrícula (cerca del 50 %). Los detalles de cada tema, objetivo y las áreas académicas vinculadas son mostrados en la Tabla 2.

La importancia de la introducción de la investigación ya es por sí sola una herramienta invaluable en proceso enseñanza-aprendizaje, en el que la creación de consciencia y un razonamiento crítico es estimulado. Pero estas ventajas son aún más potenciadas con la

combinación del modelado matemático de problemas de la vida cotidiana, al formular, resolver y elaborar propuestas matemáticas que sirvan para explicar el comportamiento de un sistema y, a largo plazo, realizar predicciones en cierto contexto y con ciertas condiciones.

## Resultados y discusión

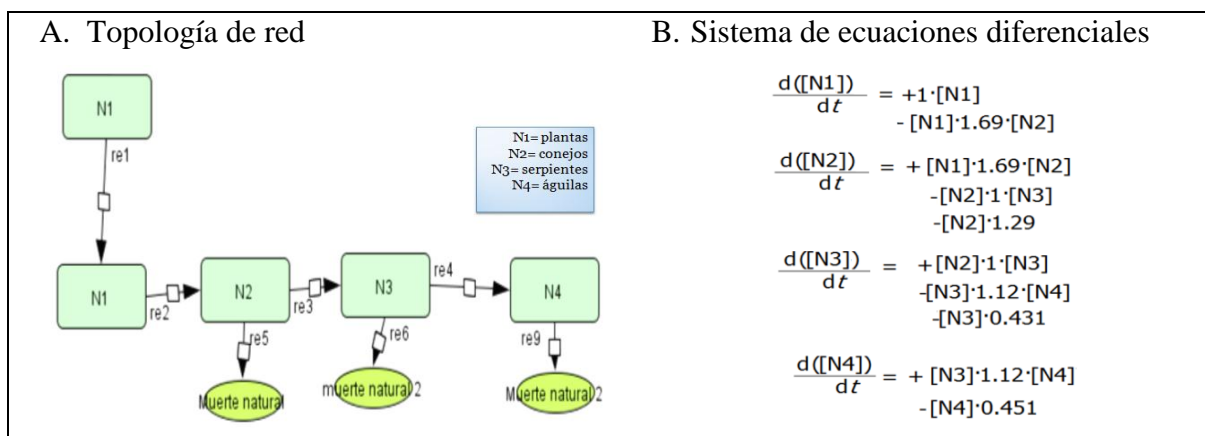
De forma breve, las experiencias de la implementación de los modelos con el uso de las TICs, modelado y el desarrollo del proyecto son descritas a continuación. En todos los casos se realizó una formulación de topología, descripción matemática mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, simulaciones con y sin alteraciones y predicciones del comportamiento del sistema. Aunque el ejercicio académico se inició en un nivel básico-medio, permitió al estudiante apreciar el potencial y utilidad de la formulación matemática en la resolución de problemas en su área académica.

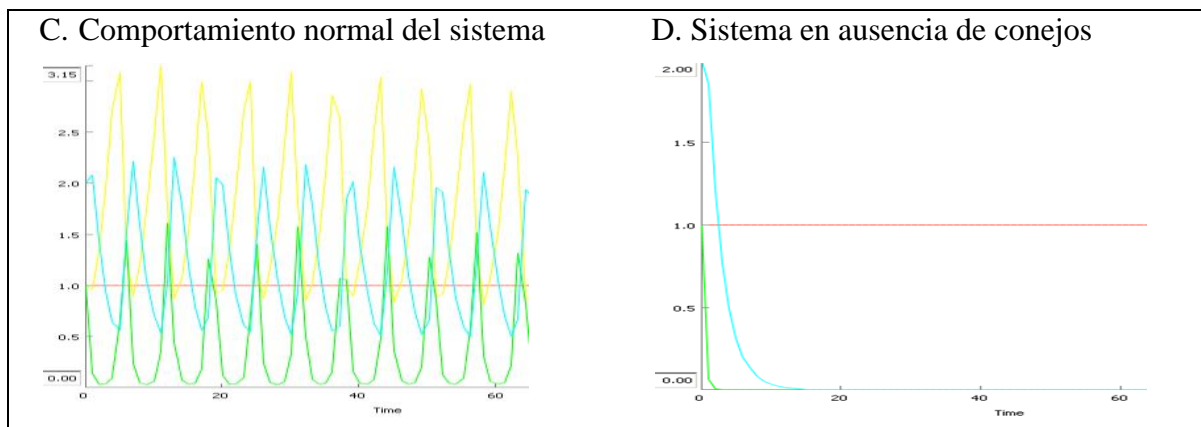
En la Gráfica 1 se presenta un ejemplo del tema que corresponde a la “Cadena trófica con el uso de la ecuación de Lotka-Volterra”, cuya topología es mostrada en la Gráfica 1-A. Las flechas corresponden a la relación entre las especies, siendo el primer paso de N1 a N1 el modelado del crecimiento exponencial “natural” de la planta, la cual se asume constante. En los demás casos se da una relación de predación o de muerte natural.

El sistema de ecuaciones diferenciales asociado al modelo se presenta en la Gráfica 1-B y cuya solución es presentada gráficamente en la Gráfica 1-C, que refleja el comportamiento cíclico y acoplado de la cantidad de individuos de cada especie. Una de las perturbaciones ejemplificadas en el proyecto fue la extinción de los conejos por alguna causa externa, cuya implicación biológica es que lleva a la extinción de las otras especies de la cadena trófica (suponiendo una relación lineal estricta de que una especie únicamente depreda al igual que el modelo) y cuyo efecto se refleja a nivel gráfico en la Gráfica 1-D.

Gráfica 1.

*Ejemplo de proyecto con ecuación Lotka-Volterra*





Fuente: propia del estudio.

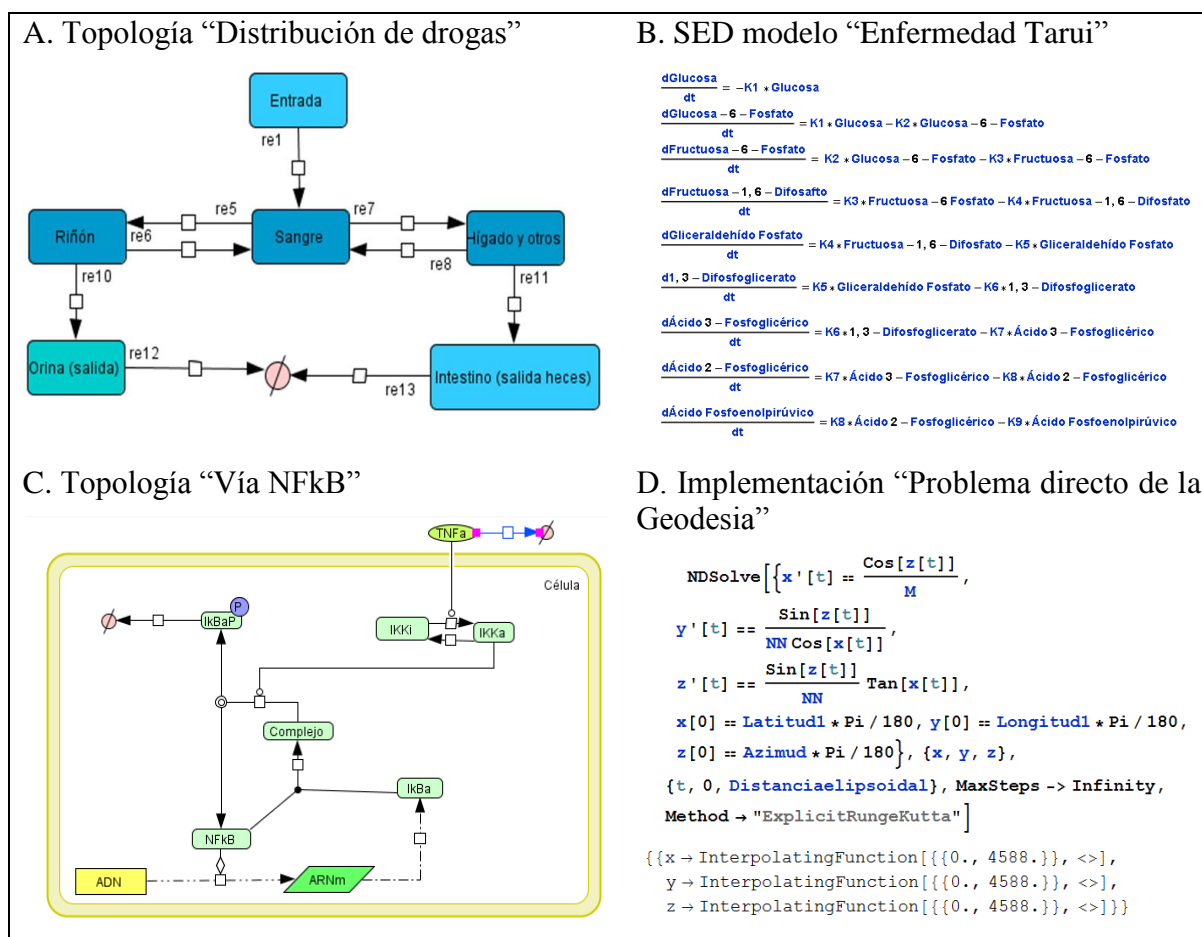
En el caso del proyecto de “Ciguatera”, se logró simular el comportamiento del número de especies afectadas en una cadena trófica, constituida por algas, peces y el ser humano. El planteamiento fue similar al caso anterior, y logrando así determinar el efecto de la reducción de alguna población o incluso el tiempo necesario para que se reduzcan las especies afectadas, dando una idea del periodo de veda para no consumir dichas especies.

Para el grupo de “Distribución de drogas en el organismo” se logró construir una topología que modela el comportamiento de la cinética de una droga en el organismo, pasando por sangre, hígado, riñón, heces y orina. Dicha topología se muestra en la Gráfica 2-A. En este caso, el comportamiento muestra que rápidamente la droga llega a sangre y se metaboliza en el hígado, pasando luego a riñón o a la bilis, para salir lentamente en orina o heces, respectivamente (gráfico no mostrado). Esto es de particular importancia para la detección de ciertas drogas de abuso, como la marihuana, cocaína, anfetaminas y éxtasis, ya que en sangre duran pocas horas mientras que en orina pueden durar entre aproximadamente 5 a 8 días, por lo que los análisis tipo doping se realizan en orina.

En la Gráfica 2-B se muestra el sistema de ecuaciones diferenciales para el modelo del tema de la “Enfermedad de Tarui”, el cual representa la glicólisis en la célula de músculo. En este caso, se asumió una contante de reacción disminuida en el paso de la producción de frutosa-2-fosfato, la cual corresponde al defecto enzimático en la enfermedad y que lleva a que la producción de ATP sea baja, afectando la disponibilidad de energía cuando se hace ejercicio. Se determinó que una forma de revertir el defecto sería aumentar la producción de ATP mediante una droga que interfiera en el paso de producción de ácido fosfoenolpiruvico, lo cual deberá probarse a nivel de laboratorio.

## Gráfica 2.

## Ejemplos de proyectos implementados



Fuente: propia del estudio.

Algo similar ocurrió en el caso del proyecto relacionado con la “Vía NFkB en pancreatitis”, cuya topología es mostrada en la Gráfica 2-C. En este proyecto, se establece que el problema de la pancreatitis es la gran activación de NFkB, lo que provoca una inflamación exagerada que lleva al daño del páncreas.

La estrategia consistió en usar una droga que pueda disminuir la activación de la vía pero sin dejarla ausente, ya que la activación inicial es requerida para defender al organismo de la causa de la pancreatitis. Se determinó que usar una droga en el paso de fosforilación del complejo por la IKKa logra disminuir la activación a un periodo temporal menor, sugiriendo un posible sitio de acción para el diseño de un fármaco.

Por otra parte, con el tema de “Biorreactores para la producción de metabolitos” se logró recrear un sistema que modela la producción bacteriana de sustancias, los cuales pueden ser de importancia para la producción de alcoholes, toxinas u otras moléculas. Se evaluó el efecto de cerrar diversos pasos de tuberías y con ello como se maximizaba la producción (gráficos no mostrados).

En la Gráfico 2-D se muestra el sistema de ecuaciones diferenciales y el código implementado para resolver el sistema para el modelo del “Problema directo de la geodesia”, implementado en Mathematica. Este correspondió al único modelo que no utilizó una formulación con tanques interconectados, sino que se planteó con un elipsoide de referencia usado en topografía geodésica y relaciones trigonométricas esféricas. Se logró realizar una aproximación de las coordenadas de un punto dado las coordenadas de uno inicial, la distancia y el azimut, y se comparó con un algoritmo oficial de cálculo ([http://www.ngs.noaa.gov/PC\\_PROD/Inv\\_Fwd/](http://www.ngs.noaa.gov/PC_PROD/Inv_Fwd/)) logrando una buena aproximación para la latitud, pero más modesta para la longitud del punto; en ambos casos se realizaron los cálculos de aproximación usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Los diversos modelos trabajados lograron realizar una interpretación a un problema en un área específica, ejemplificando el posible uso de los sistemas de ecuaciones diferenciales para el modelado. Esta adaptación curricular fue facilitada por el uso de software, convirtiéndose en un hilo conductor en el proceso.

El curso de ecuaciones diferenciales aplicadas va dirigido a estudiantes donde el modelado es muy natural a su quehacer profesional, por lo que la introducción de modelos y el uso de software especializado logra una conexión a un lenguaje más acorde a sus intereses y desarrollar habilidades críticas para determinar la idoneidad de los modelos y las implicaciones que tienen al hacer predicciones.

En la introducción de las TICs, la visualización constituyó uno de los principales atractivos al desarrollar contenidos y que se pudo abordar con el modelado matemático con el desarrollo de un proyecto. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen, y que puede ser facilitado con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas (Macías, 2007), así como para el estudio de aplicaciones a la vida real.

La implementación de la triada TICs, la enseñanza por modelos y por proyectos posibilitó la exploración y comprobación de hipótesis, así como verificar numéricamente soluciones utilizando herramientas computacionales. Con lo anterior, se logró una mejora en la motivación de los estudiantes hacia los tópicos del curso.

Cómo exponen Chavarría (2014), muchos de los problemas en el aprendizaje de la matemática puede ser ocasionada por la actitud afectiva y emocional hacia la matemática, donde no es claro el posible uso de lo aprendido para aplicarlo a sus futuras carreras, pero

que el papel del profesor en las experiencias de aprendizaje, las estrategias de regulación y el manejo de recursos puede ser clave para lograr una motivación. Esto contrasta con la enseñanza de la matemática que clásicamente se ha realizado con un registro semiótico a nivel algebraico, formal y abstracto (Gatica y Ares, 2012).

Las incorporación de las TICs, el modelado y el desarrollo de proyectos debe entonces darse a nivel transversal, en el que no sólo se empleen las estrategias, sino que se comprendan e integren en el proceso propio de la enseñanza-aprendizaje, logrando que se adquieran las competencias para los actores en educación, se propicie la investigación y la gestión docente (Belando, 2014).



## Conclusión

Se presentó una experiencia de la integración del aprendizaje basado en proyectos cortos de investigación, el modelado matemático y las TICs en un curso de Ecuaciones Diferenciales Aplicadas, logrando la interpretación de cada uno de los casos de acuerdo a la cinética del modelo y las diversas perturbaciones según el contexto planteado. Sin embargo, el estudio no es de carácter inferencial y sólo pretende describir la estrategia que se ha implementado.

Se comprobó el poder de algunas herramientas computacionales para plantear y resolver sistemas de ecuaciones diferenciales mediante algoritmos de aproximación, así como la importancia de resaltar las posibles aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en el área académica de los estudiantes. Estas estrategias pueden ser consideradas para otros cursos de ecuaciones diferenciales o ser adaptadas en otros como cálculo, análisis numérico o matemática superior. Así, el vínculo de los sistemas de ecuaciones diferenciales con diferentes problemas de las áreas académicas de los estudiantes se ofrece un eje motivacional a considerar en el quehacer del proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas.

Parte de las limitaciones de la propuesta incluye el acceso que pueden tener los estudiantes fuera de la clase de laboratorio, así como el acceso de algunos programas. Se ha tratado de hacer uso software de acceso libre o aquel que la institución puede facilitar a los estudiantes. Además, nuevos problemas referentes al uso de la tecnología son comunes entre los estudiantes, los cuales se van resolviendo conforme el avance del curso y que pueden distraer respecto a los verdaderos retos matemático-computacionales a los que se espera que se enfrenten los estudiantes. Esto sugiere que se debe valorar y rescatar diferencialmente las dificultades que las TICs-modelado-proyectos traen de forma implícita, y con ello nuevas evaluaciones, estudios y propuestas.

Además, actualmente la implementación piloto se ha realizado a nivel de un único grupo por semestre, donde usualmente son en total 5 grupos, lo cual propone una invitación a otros docentes a interesarse por la implementación. Por la dificultad de interpretación y el sesgo inherente (horarios, nota de matrícula, docente, entre otros), no se ha realizado la comparación de grupos de estudiantes de cursos de ecuaciones diferenciales que no son parte de la implementación, pero que sería interesante de explorar. La investigación tampoco incorpora la evaluación y apreciación de los estudiantes respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje, aunque si se ha realizado y ha funcionado para redirigir las actividades a lo largo de 3 años de evolución.

## Referencias

- Alfaro, A., Alpízar, M. & Chaves, E. (2012). Recursos metodológicos utilizados por docentes de I y II ciclos de la educación general básica en la dirección regional de Heredia, al impartir los temas de probabilidad y estadística. *Revista Uniciencia*, 26 (1 y 2), 135-151.
- Angel, J. & Bautista, G. (2001). Didáctica de las matemáticas en enseñanza superior: la utilización de software especializado. Recuperado de: <http://www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107030/mates.html#bibliografia>.
- Belando, M. (2014). Formación permanente del profesorado. Algunos recursos TIC para la docencia universitaria. *Revista Iberoamericana de Educación*, 65 (1), 1-11.
- Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las tic en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 171-194.
- Cerda, C. (2002). Elementos a considerar para integrar tecnologías del aprendizaje de manera eficiente en el proceso enseñanza-aprendizaje. *Revista de Estudios Pedagógicos*, 28, 179-191.
- Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Revista Uniciencia*, 28(2), 15-44.
- De Faria, E. (2001). Simulaciones con calculadora graficadora TI-89/92+. Recuperado de: [http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/memorias/2CIEMAC/Ponencias/Simulaciones\\_con\\_la\\_calculadora\(Edison\).pdf](http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/memorias/2CIEMAC/Ponencias/Simulaciones_con_la_calculadora(Edison).pdf)
- Fernández, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(2), 171-187.
- Gatica, S. y Ares, O. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Revista de Educación Mediática y TIC*, 1(2), 88-107.
- Herrera, M. (2004). Las nuevas tecnologías en el aprendizaje constructivo. *Revista Iberoamericana de Educación*, 34(4), 1-20.
- Macías, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 42, 4-10.
- Morales, Y. (2009). Enfoques y dificultades en aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Recuperado de: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/45%20Morales.pdf>

- Morales, Y. y Salas, O. (2010). Incorporación de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6 (1), 155-172.
- Moursund, D. (1999). Aprendizaje por Proyectos con las TIC (capítulos I y II). Recuperado de: <http://www.eduteka.org/modulos.php?catx=7&idSubX=184&ida=563&art=1>.
- Paredes, Z., Iglesias, M., & Ortiz, J. (2009). Los docentes y su formación inicial hacia el aula de matemática: Una propuesta con modelización y nuevas tecnologías. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 7(1), 86-102.
- Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 113-134.
- Ré, M., Arena, L. y Giubergia, M. (2012). Incorporación de TICs a la enseñanza de la Física: Laboratorios virtuales basados en simulación. *Revista Iberoamericana de Educación en Tecnología y Tecnología en Educación*, 8, 16-22.
- Villalobos, J., Brenes, S. & Mora, S. (2012). Herramienta asistida por computadora para la enseñanza del álgebra relacional en bases de datos. *Revista Uniciencia*, 26, 179-195.



Experiencia basada en la triada TICs, enseñanza por proyectos y modelado para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales (Jose-Arturo Molina-Mora) por [Revista Uniciencia](#) se encuentra bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 3.0 Unported](#).