Uniciencia
E-ISSN: 2215-3470
revistauniciencia@una.cr
Universidad Nacional
Costa Rica

Vargas Vargas, Gilberto; Gamboa Araya, Ronny
EL MODELO DE VAN HIELE Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA
Uniciencia, vol. 27, núm. 1, enero-junio, 2013, pp. 74-94
Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica

EL MODELO DE VAN HIELE Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

THE VAN HIELE MODEL AND THE TEACHING OF THE GEOMETRY

Gilberto Vargas Vargas

gilbertovargasvargas@gmail.com

Colegio Técnico Profesional de Puriscal

Puriscal, Costa Rica

Ronny Gamboa Araya

rgamboa@una.ac.cr

Escuela de Matemática

Universidad Nacional (UNA)

Heredia, Costa Rica.

Recibido el 2 marzo de 2011. Corregido 4 de octubre de 2012. Aceptado el 18 de octubre de 2012

Resumen: El presente artículo trata de la aplicación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Se reflexiona sobre la importancia de estudiar geometría y lo que esto significa para la sociedad moderna; analiza, además, las concepciones y dificultades que se dan en la forma de enseñar y el aprender geometría. Introduce el Modelo de Van Hiele explicando la evolución del razonamiento geométrico a través de cinco niveles consecutivos y del apoyo que brindan sus fases a la organización del currículo, así como a partir de una comparación con la teoría del desarrollo de Piaget.

Palabras claves: Razonamiento, geometría, enseñanza, modelo de Van Hiele, concepciones, dificultades.

Abstract: This article discusses the application of the model of Van Hiele geometric reasoning and the teaching of geometry. It reflects on the importance of studying geometry and what this means for modern society, analyzing also the conceptions and difficulties that exist in the form of teaching and learning geometry. Introduce the Van Hiele model explaining the evolution of geometric reasoning through five consecutive levels and the support given, by its five stages, to the organization of the curriculum and a comparison with the development theory of Piaget.

Keywords: reasoning, geometry, teaching, Van Hiele, conceptions, difficulties.

La geometría es uno de los temas de las Matemáticas que tiene más importancia para la humanidad y su desarrollo. Se relaciona, de manera directa o indirecta, con múltiples actividades que se realizan ya sea para el progreso de la sociedad, el estudio o para la recreación.

¿Por qué es importante estudiar geometría? La respuesta a esta pregunta lleva a reflexionar sobre el nacimiento de la geometría y en cómo el ser humano, a través de la percepción de las formas, del espacio que lo rodea y la necesidad de crear y transformar el mundo en el que vive, ha buscado una manera de explicar aquello que percibe a través de los sentidos. La geometría es para el ser humano el idioma universal que le permite describir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que tiene de este al resto de la humanidad.

Aún hoy la geometría se constituye en el lenguaje a través del cual entendemos nuestra realidad. La importancia de esta rama de las Matemáticas se ha reconocido por los beneficios cognitivos que conlleva su estudio. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MENC) (2004) afirma:

> La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas. (p. 1)

La geometría despierta en el estudiante diversas habilidades que le sirven para comprender otras áreas de las Matemáticas y le prepara mejor para entender el mundo que lo rodea; además, son muchas las aplicaciones de las Matemáticas que poseen un componente geométrico. Por esto, para los docentes de Matemáticas es necesario explorar diversas formas de obtener provecho de la riqueza que posee la geometría y, por lo tanto, deben tratar de romper los esquemas a los que se habituaron, para dedicarse a la investigación, exploración y aplicación de nuevas actividades dentro y fuera del aula.

El MENC (2004) señala esta necesidad de investigar y buscar nuevos horizontes en la enseñanza de la geometría:

> Para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas en las distintas dimensiones, los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico. Entre más dimensiones y conexiones de la geometría conozcamos, podremos guiar con mayor éxito a nuestros alumnos en la experiencia de aprender a aprender geometría y les ayudaremos a sentar bases sólidas para ampliar el panorama en los siguientes años escolares y en la vida. (p. 3)

Los docentes de Matemáticas deben contar, por consiguiente, con una amplia base de conocimientos que les permitan guiar con mayor facilidad y buen criterio a sus alumnos. El docente debe ser el primero en explorar para incluir los descubrimientos, propios o ajenos, en el planteamiento diario de sus clases.

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (2003) menciona la geometría como la materia mediante la cual el estudiante estudia las formas y estructuras geométricas, y aprende a analizar sus características y relaciones. A la vez señala la visualización espacial como un aspecto importante del pensamiento geométrico, sin dejar de mencionar la construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial como una manera de describir el entorno; todo lo cual la constituye en una herramienta importante en la resolución de problemas, ya sea geométricos o de otras áreas de las Matemáticas o del conocimiento en general.

Sin embargo y a pesar de su importancia, la enseñanza de esta disciplina se ve afectada por una serie de problemas. Según lo afirman Báez e Iglesias (2007); Paredes, Iglesias y Ortiz (2007), la mayoría de las instituciones educativas desarrollan la enseñanza de la geometría de una manera tradicional caracterizada, principalmente, por la clase magistral, por el trabajo en grupos y, sobre todo, por el uso del discurso del profesor como principal medio didáctico. Sea cual sea la modalidad educativa que se aplica, en la mayoría de los casos se tiene un factor en común: se brinda una enseñanza basada en el lápiz y papel, o de pizarra y tiza, que no ofrece, al estudiante, mayores posibilidades de desarrollo.

Hernández y Villalba (2001) indican que, en los cursos de geometría, se presenta al estudiante un producto final y ya terminado, lo cual no da lugar a que él tome un papel activo en el desarrollo de su conocimiento matemático; además, no propicia el fomento de la creatividad y del aprendizaje significativo en el estudiante. Barrantes y Blanco (2004) indican que estudiantes ya graduados consideran que el estudio de la geometría a nivel escolar constituye el tema más difícil.

Barrantes (2002) afirma que la enseñanza de la geometría se concentra, actualmente, en la memorización de conceptos y su aplicación, sin que el estudiante pueda llegar a una conceptualización más allá de lo que sus propias capacidades se lo permitan.

Es significativo plantearse, desde este punto de vista, la importancia de estudiar geometría en el mundo actual y cómo debe ser la enseñanza de esta disciplina. ¿Cuál debe ser el conocimiento mínimo que sobre dicha disciplina debe tener un estudiante al finalizar determinado nivel? ¿Cuáles son las dificultades que se le presentan tanto al estudiante como al docente? ¿Existe un modelo de enseñanza y aprendizaje que ayude al docente y promueva en el estudiante el estudio y el aprendizaje más efectivo de la geometría?

Este artículo pretende analizar los puntos anteriores y estudiar el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, el cual propone una manera de analizar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes, a la vez que apoya al docente en la organización del currículo de manera que ese aprendizaje sea efectivo. Además, con el fin de analizar sus diferencias y semejanzas, se realiza una comparación entre este modelo y la teoría del desarrollo de Piaget.

Importancia de la enseñanza de la Geometría

Sea cual sea el rango de escolaridad en el que se encuentre una persona que estudia Matemáticas, una de las preguntas obligadas es: ¿Cuál debe ser el grado de conocimiento que este individuo debe tener cuando termine este nivel? También nos preguntamos sobre el tipo de conocimiento matemático que una persona debe tener de acuerdo con las exigencias del mundo moderno y sus propias expectativas.

El NCTM (2003) propone, sobre el estudio de las Matemáticas, que "(…) aquellos que comprendan y puedan usar matemáticas tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar su futuro. La competencia matemática abre las puertas de un porvenir productivo" (p. 5). Más adelante continúa señalando que "(…) se requieren unos estándares ambiciosos para lograr una sociedad que tenga la capacidad de pensar y razonar matemáticamente, y una base útil de conocimientos y destrezas matemáticas" (p. 42). Es decir, el nivel de conocimientos necesarios en el individuo debe superar ampliamente las expectativas tanto de él mismo como de la sociedad a la que pertenece, para así poder entrar en sintonía con el vertiginoso avance de los tiempos modernos.

Entre los conocimientos generales que el individuo debe obtener para una educación matemática de calidad, corresponde al estudio de la geometría una posición de gran importancia. Andonegui (2006) afirma que el estudio de la geometría ayuda a potenciar habilidades de procesamiento de la información recibida a través de los sentidos y permite al estudiante desarrollar, a la vez, muchas otras destrezas de tipo espacial que le permiten comprender e influir el espacio donde vive. El mismo autor señala que la geometría también nos ayuda a conocer y comprender el mundo en el que habitamos al hacer representaciones que imitan nuestro entorno y permitir, con eso, el análisis de objetos geométricos. A la vez, ayuda a rescatar las habilidades espaciales y concretas que en muchas ocasiones se ven relegadas frente a aquellas de corte lógico-abstracto.

Parte de la importancia de la geometría es que ayuda al individuo a desarrollar destrezas mentales de diversos tipos, como la intuición espacial, la integración de la visualización con la conceptualización, y la manipulación y experimentación con la deducción, pues por más sencilla que sea la situación geométrica enfrentada, esta le provee de grandes posibilidades de exploración, análisis y de formulación de conjeturas, independientemente del nivel en el que se encuentra.

> Probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos. (…) no hay mejor lugar que la geometría para dilucidar el papel de la prueba y la demostración en matemáticas. (MENC, 2004, p. 2)

Hernández y Villalba (2001), agregan que la geometría puede concebirse como:

- ✓ La ciencia del espacio, vista esta como una herramienta para describir y medir figuras, como base para construir y estudiar modelos del mundo físico y otros fenómenos del mundo real.
- ✓ Un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en Matemáticas y en otras ciencias; por ejemplo, gráficas y teoría de gráficas, histogramas, entre otros.
- ✓ Un punto de encuentro entre una Matemática teórica y una Matemática como fuente de modelos.
- ✓ Una manera de pensar y entender.
- ✓ Un ejemplo o modelo para la enseñanza del razonamiento deductivo.
- ✓ Una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovadoras, como por ejemplo, gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones.

Todo esto nos da una idea de la importancia de la geometría para el desarrollo del individuo, tanto a nivel social como a nivel personal; por tanto, el docente debe tratar de llevar a cabo su labor explotando al máximo las posibilidades que le ofrece la geometría, según lo indica Andonegui (2006): como potenciadora de múltiples habilidades y formas de pensamiento; permite utilizar, a la vez, las múltiples opciones que le ofrece la tecnología; todo lo cual proporciona una mayor versatilidad y campo de acción. Con ello se pretende orientar la enseñanza de la geometría en la generación de situaciones problema que le permitan al estudiante, a través de la guía del docente, descubrir las bondades de esta disciplina y la importancia para su desarrollo.

Dificultades y concepciones en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría

El estudio de la geometría presenta algunas dificultades en su desarrollo formal. Básicamente estas se dan a partir de las concepciones y creencias del estudiantado y del profesorado, manifiestas en el salón de clase. De acuerdo con Barrantes y Blanco (2004), el personal docente, debido a las concepciones y experiencias adquiridas en su formación, planea las lecciones y utiliza los mismos recursos que experimentó, en su momento, como estudiante. Muchas veces su vivencia personal le impide llevar a cabo una experiencia de aprendizaje que guíe al estudiante al descubrimiento de la geometría como generadora de conocimiento.

> (…) nuestro estudio nos muestra, a pesar de los esfuerzos de los investigadores por presentar nuevos métodos, recursos o materiales sobre enseñanza de la geometría, que muchos estudiantes siguen llegando a las facultades con las mismas experiencias, falta de conocimientos y concepciones sobre la geometría y su enseñanza que hace unos años, lo que indica que se sigue enseñando igual que antes de tales reformas. (Barrantes y Blanco, 2004, p. 249)

Así mismo, estos autores señalan que el auge de las Matemáticas modernas en la década de los setenta provocó que la geometría pasase a segundo término en el ámbito escolar, relegándose al final de los contenidos anuales de estudio, por lo que muchas veces no se abarcaban dichos temas.

> Esta circunstancia dio lugar a que los estudiantes para maestros llegaran a los centros de educación con un conocimiento casi nulo de la geometría y sin apenas referentes sobre su enseñanza-aprendizaje. La formación posterior que recibieron como estudiantes para maestro estaba más relacionada con otros temas, como el numérico, que con la geometría y su enseñanza-aprendizaje. (Barrantes y Blanco, 2004, p. 248)

De acuerdo con estos autores, la forma de enseñar geometría es algo que se ha ido comunicando a través de distintas generaciones y parece una larga cadena que no se ha podido romper. Las experiencias pasadas de los docentes tienen mucho peso en su forma de planear las clases de geometría, ya que, en su proceso de formación, carecen de un punto de referencia o comparación que les permita explorar nuevas formas de enseñanza de la geometría a partir de lo ya conocido. Esto provoca, según Barrantes y Blanco (2004), que los profesores en las clases de Matemáticas se inclinen hacia aquellos temas considerados más asequibles y también más importantes para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, por lo que temas de geometría se ven relegados al ser considerados poco importantes.

> Todo esto hace que los temas numéricos, que son a los que más tiempo dedicaba el maestro, sean considerados más asequibles y más importantes en el contexto de la enseñanza-aprendizaje. Así, en sus expectativas, estos temas son prioritarios y serán los temas que enseñen, si en los centros de formación no hay actuaciones adecuadas que sean capaces de modificar estas concepciones. También la influencia de sus conocimientos y experiencias les hace concebir que la geometría plana es más fácil que la geometría espacial, por tanto es más importante, y su enseñanza es básica. (Barrantes y Blanco, 2004, p. 242)

Por esto, resulta de vital importancia darle, nuevamente, a la geometría un lugar preponderante en la clase de Matemáticas. De esta manera, las nuevas generaciones tendrían las vivencias que no han gozado otros individuos anteriormente, incluyendo sus propios profesores, y esto se traduciría en una mejor experiencia de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, que provoque un desarrollo a nivel social y cultural de la geometría como "tema importante" en el área de la educación matemática.

> La enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre el papel; en la mayoría de los casos, los alumnos no cuentan con objetos, formas, ejemplos reales que les permitan captar mejor los contenidos; las clases de geometría generalmente son dictadas de manera abstracta, razón por la cual, surge la necesidad de implementar nuevas estrategias al momento de enseñarla. En este sentido, el educador tiene la obligación de buscar y/o [*sic*] crear estrategias que permitan el desarrollo y razonamiento intelectual de los estudiantes. (Goncalves, 2006, p. 96)

Para este autor, los docentes deben buscar nuevas estrategias didácticas que les permitan hacer que los estudiantes descubran con mayor facilidad que la geometría es una herramienta para la vida. Menciona, además, la importancia de conocer, aplicar y especializarse en el Modelo de Van Hiele, de desarrollo de pensamiento geométrico en el proceso de enseñanza de la geometría y en los niveles propuestos por este modelo propone para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Los niveles de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría

De acuerdo con Crowley (1987) y Jaime (1993), el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele tiene su origen en los trabajos doctorales presentados, en la Universidad de Utrech, por dos profesores holandeses de Matemáticas de enseñanza secundaria, Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, quienes mostraron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo. El estudiante se ubica en un nivel dado al inicio del aprendizaje y, conforme vaya cumpliendo con un proceso, avanza al nivel superior. El modelo de Van Hiele también indica la manera de apoyar a los estudiantes a mejorar la calidad de su razonamiento, pues proporciona pautas para organizar el currículo educativo y así ayudar al estudiante a pasar de un nivel a otro.

Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

De acuerdo con Jaime (1993), el modelo de Van Hiele abarca dos aspectos básicos:

- Descriptivo: mediante este se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar su progreso.

- Instructivo: marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran.

El modelo de Van Hiele ayuda a explicar cómo, en el proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento geométrico de los estudiantes transcurre por una serie de niveles. Para dominar el nivel en que se encuentra y así poder pasar al nivel inmediato superior, el estudiante debe cumplir ciertos procesos de logro y aprendizaje. Este modelo distribuye el conocimiento escalonadamente en cinco niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados. Dentro de cada nivel propone una serie de fases de aprendizaje que el estudiante debe cumplir para avanzar de un nivel a otro, lo que constituye la parte instructiva del modelo. Ningún nivel de razonamiento es independiente de otro y no es posible saltarse ninguno: el individuo debe pasar y dominar un nivel para subir al siguiente.

A este respecto, Fouz (2006) afirma que al subir de nivel se hacen explícitos en el estudiante los conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior, lo cual indica que va aumentando de esta manera el grado de comprensión y dominio del conocimiento. Esto hace que los objetos de trabajo de este nivel superior sean extensiones de aquellos del nivel anterior.

La caracterización del modelo de Van Hiele se elabora a través de 5 niveles, respecto de los que no hay unanimidad en cuanto a su numeración: algunos autores hablan de los niveles del 0 al 4 y otros los enumeraran del 1 al 5. Para efectos de este artículo, con el propósito de evitar ambigüedades, se tomó la segunda numeración.

La siguiente descripción del modelo de Van Hiele se ha tomado principalmente de los autores Fouz y De Donosti (2005), Jaime (1993), Jaime y Gutiérrez (1994) y Beltranetti, Esquivel y Ferrari (2005).

Los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele están ordenados de la siguiente manera:

Nivel 1: Reconocimiento o visualización

Nivel 2: Análisis

Nivel 3: Deducción informal u orden

Nivel 4: Deducción

Nivel 5: Rigor

A continuación se caracterizan estos niveles:

Nivel 1: El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Puede, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.

Nivel 2: El individuo puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría se establecen a partir de propiedades, no puede elaborar definiciones.

Nivel 3: El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas. Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Sigue demostraciones pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones. Al no poder realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, el individuo no comprende el sistema axiomático de las Matemáticas. El individuo ubicado en el nivel 2 no era capaz de entender que unas propiedades se deducían de otras, lo cual sí es posible al alcanzar el nivel 3. Ahora puede entender, por ejemplo, que en un cuadrilátero la congruencia entre ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados opuestos.

Nivel 4: En este nivel ya el individuo realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, al reconocer su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Comprende y maneja las relaciones entre propiedades y formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. Comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, lo que le permite entender que se puedan realizar distintas demostraciones para obtener un mismo resultado. Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto grado de razonamiento lógico, obtiene una visión globalizadora de las Matemáticas. El individuo puede desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, percibe la posibilidad de una prueba, sin embargo, no reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.

Nivel 5: El individuo está capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, tal como lo sugieren estudios sobre el tema. Alsina, Fortuny y Pérez (1997) y Gutiérrez y Jaime (1991) afirman que solo se desarrolla en estudiantes de la Universidad, con una buena capacidad y preparación en geometría.

En el modelo de razonamiento de Van Hiele es posible observar la concordancia que poseen los diferentes niveles entre sí, además de recalcar el hecho de que un individuo no puede saltarse ningún nivel de razonamiento.

Las fases del Modelo de Van Hiele

Los Van Hiele propusieron cinco fases de aprendizaje que guían al docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel a otro. Dentro del modelo, las fases no son exclusivas de un nivel sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continua así, de tal forma que al terminar la fase 5 debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente (Jaime, 1993).

Las fases de aprendizaje correspondientes al Modelo de Van Hiele son las siguientes:

Fase 1: Información.

Fase 2: Orientación dirigida.

Fase 3: Explicitación.

Fase 4: Orientación libre.

Fase 5: Integración.

Descripción de las fases, según Jaime (1993) y Fouz y De Donosti (2005):

Fase 1: Información. En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en cuanto a este. Fouz y De Donosti (2005) citan a Azubel (1978) para respaldar que este es el primer acercamiento a los conocimientos del alumno: “Si tuviera que reducir toda la Psicología Educativa a un solo principio diría lo siguiente: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno/a sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia” (p. 72). Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

Fase 2: Orientación dirigida. Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes), con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor debe seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades y, cuando lo necesiten, orientar a sus alumnos hacia la solución. De acuerdo con Jaime (1993), esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. Al respecto cita a Van Hiele (1986), quien señala que "(…) las actividades (de la segunda fase), si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior" (p. 10). El papel del profesor resulta primordial en esta fase, ya que debe seleccionar las actividades adecuadas para permitir al estudiante aprender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales para el nuevo nivel de razonamiento. Corberán, Gutiérrez, Huerta, Jaime, Margarit, Peñas y Ruiz (1994) indican sobre la planificación de la fase 2 que "(…) una planificación cuidadosa de la secuencia tendrá en cuenta la necesidad de conseguir pequeños éxitos que estimulen su autoestima y favorezcan una actitud positiva hacia las matemáticas" (p. 36).

Fase 3: Explicitación. Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando. Deben aprender y afianzar el vocabulario propio del nivel. En esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, en cuanto a estructuras o contenidos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad, a partir de conclusiones, práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando. El tipo de trabajo que se debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolverse los ejercicios anteriores, elementos, propiedades y relaciones que se han observado o utilizado.

Fase 4: Orientación libre. En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos. El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas. En palabras de Van Hiele (1986), citado por Jaime (1993), "(…) los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales" (p. 11). Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase.

Fase 5: Integración. Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos. Se trata de lograr una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. No hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonar con los anteriores. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al profesor comprobar si ya se ha conseguido.

El paso por cada una de estas fases y la observación de las mismas potencia, en gran medida, la posibilidad de que un estudiante avance del nivel en el que se encuentra y así pueda desarrollar sus habilidades y capacidad de razonamiento geométrico.

Propiedades del modelo de Van Hiele

Para comprender mejor el modelo de Van Hiele, es necesario analizar y tomar en cuenta las siguientes características (Beltrametti, Esquivel y Ferrarri, 2005; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez 1990):

Recursividad: El éxito en un nivel depende del grado de asimilación que tenga el estudiante de las estrategias del nivel anterior. Los objetos de un nivel se convierten en los objetos de estudio del siguiente, es decir, se hacen explícitos aquellos conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior. Van Hiele (1986), citado por Jaime (1993), afirma que "(…) el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel" (p. 14).

Secuencialidad: No se puede alcanzar un nivel sin haber superado de forma ordenada todos los niveles inferiores, cada nivel de razonamiento se apoya en el nivel anterior, hay que tener cuidado ya que una mala instrucción o aprendizaje en un nivel anterior puede llevar a aparentar que ya están preparados para pasar al siguiente nivel, cuando no es así. Van Hiele decía que la edad no es un factor determinante para el paso de los niveles.

Especificidad del lenguaje: Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de Van Hiele no solo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje y un significado específico del vocabulario matemático; por tanto, el docente debe ajustarse al nivel en que están sus estudiantes.

Continuidad: Se refiere a la forma en cómo el individuo pasa de un nivel a otro. El paso en los niveles de Van Hiele se produce de forma continua y pausada, puede tardar varios años en los niveles 4 y 5. Se puede dar el caso de que el individuo no llegue a alcanzar el nivel 5.

Localidad: Por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría. Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento. Una vez alcanzado un nivel en algún concepto o campo de la geometría, será más fácil para el individuo alcanzar ese mismo nivel para otros conceptos o áreas.

Evaluación en el modelo de Van Hiele

De acuerdo con Fouz y De Donosti (2005), el punto clave en la utilización del modelo de Van Hiele es precisamente la evaluación. En el marco de este modelo interesa la valoración de un individuo tomando en cuenta las razones por las que dio determinada respuesta. A partir de esto, los mismos autores indican que lo más recomendable para la evaluación, a la luz de este modelo, es la combinación de la entrevista y el test; además brindan las siguientes ideas previas a tomar en cuenta en la evaluación:

1. El nivel de razonamiento de los alumnos depende del área de las matemáticas que se trate.
2. Se debe evaluar cómo los alumnos contestan y el porqué de sus respuestas, más que lo que no contestan o contestan bien o mal.
3. En las preguntas no está el nivel de los alumnos, sino en sus respuestas.
4. En unos contenidos se puede estar en un nivel y, en otros diferentes, en un nivel distinto.
5. Cuando se encuentran en el paso de un nivel a otro, puede resultar difícil determinar la situación real en que se hallan.

En este caso, es importante resaltar el hecho de que lejos de la forma tradicional de evaluación a la que estamos ligados, dado el sistema en el que nos desenvolvemos día tras día, el modelo de Van Hiele debe ser evaluado de forma distinta. En él, el porqué de una respuesta es más importante que resaltar si esta es correcta o incorrecta y, por lo tanto, los instrumentos que apliquemos para lograr evaluar los niveles de razonamiento en geometría, a la luz de este modelo, deben ser acordes con esta filosofía.

Teoría del desarrollo de Piaget

De la Torre (2003) afirma que Piaget contribuyó de manera importante a la psicología experimental con su punto de vista genético, el cual lo llevó a estudiar el desarrollo de las funciones cognitivas, es decir, aquellas que proporcionan un conocimiento del mundo externo. Piaget concibió el desarrollo cognitivo del individuo como un avance gradual hacia el logro de una adaptación inteligente al entorno, que se manifiesta por un equilibrio más completo. Afirma, además, que dos de las nociones más fértiles introducidas por Piaget son la asimilación y el acomodamiento, íntimamente asociadas con los conflictos cognitivos que se presentan en los periodos de transición entre una fase dada y la siguiente.

De acuerdo con Campbell (2006), Piaget fue el primero que presentó el concepto de niveles de aprendizaje y sustentó que el paso de un nivel a otro del conocimiento se daba por cambios biológicos, además de que el nivel siguiente era innato una vez que los estudiantes se percataban de este.

Asimismo afirma que Piaget describía el desarrollo del individuo a través de cuatro niveles de desarrollo: sensomotor (0-2 años), preoperacional (2-7 años), operaciones concretas (7-11 años) y operaciones formales (11años en adelante). Piaget, de acuerdo con el autor, afirma que el lenguaje no tiene mucho que ver con el desarrollo cognitivo en general.

Los niveles de razonamiento de Van Hiele y la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget

Según Braga (1991) y De la Torre (2003), tanto la teoría de Piaget como el modelo de Van Hiele conciben el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos como una secuencia de planteamientos inductivos y cualitativos que conducen hacia formas de razonamiento cada vez más deductivas y abstractas; a la vez, ambos modelos se basan en niveles o etapas de carácter recursivo. Afirman que Van Hiele es uno de los investigadores de la educación matemática que ha tomado en cuenta el método socrático en la enseñanza de distintos conceptos de las Matemáticas y que la situación típica del método socrático corresponde a la solución de problemas. Sostienen que este método es efectivo solo en la medida en que cada estudiante alcance su solución mediante su trabajo personal.

Sin embargo, manifiestan que el modelo de Van Hiele es de mayor virtualidad didáctica, pues señalan que la piagetiana es una teoría del desarrollo –no del aprendizaje-, por lo que, en principio, no se planteó el problema de cómo provocar el avance de los niños y niñas de un nivel al siguiente, ya que el aprendizaje se considera como un proceso madurativo.

Braga (1991) y De la Torre (2003) expresan que el modelo de Van Hiele surge como una respuesta a los problemas que los docentes encontraban en la clase de geometría, por lo que el principal problema de investigación lo constituía el ayudar a los estudiantes a pasar de un nivel de razonamiento al siguiente, lo que la constituye una teoría de la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Además, el modelo de Van Hiele es un buen representante de las líneas más actuales de investigación en didáctica de las Matemáticas, a pesar de su antigüedad, y constituye una teoría propia en una sub-área de investigación (geometría) que da gran importancia a los contextos interactivos en el aula y al papel del profesor.

Estos mismos autores aseveran que, a pesar de que los Van Hiele recibieron una gran influencia de Piaget, se separaron de él en algunos puntos cruciales:

- ✓ Piaget se refiere más al desarrollo del niño que al aprendizaje, opuesto a los Van Hiele, quienes indican que se debe estimular a los niños para que asciendan de un nivel al otro, lo cual plasman en su teoría de las fases. Además, Piaget cita a Van Hiele y afirma que sería un error deplorable el suponer que se puede lograr un nivel por mera maduración biológica.
- ✓ La importancia que juega el lenguaje en el paso de un nivel a otro no fue captado en su totalidad por Piaget, mientras que el modelo de Van Hiele indica que el estudiante desarrolla un lenguaje específico para cada nivel de pensamiento.
- ✓ El modelo de Van Hiele concibe las estructuras de nivel superior como el resultado del estudio de un nivel inferior, al haber sido explícitas y estudiadas las reglas que gobiernan el nivel inferior, para convertirse estas en una nueva estructura; mientras tanto, para Piaget los niños nacen dotados de una estructura superior y solo necesitan tomar conciencia de ella.
- ✓ Piaget afirma que el desarrollo del espíritu humano conduce a ciertos conceptos teóricos. Van Hiele, en cambio, pone el énfasis en que dichos conceptos son construcciones humanas resultantes de procesos de aprendizaje en los cuales interviene el periodo histórico.

A continuación se presenta un resumen en el que se comparan ambas teorías y se analizan sus semejanzas y diferencias.

<table>
<tr><th></th><th>Piaget</th><th>Van Hiele</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Semejanzas</td><td colspan="2">En ambos modelos el desarrollo de conceptos espaciales y geométricos se da como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos hacia razonamientos cada vez más deductivos y abstractos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ambos modelos se basan en niveles o etapas de carácter recursivo.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Diferencias</td><td>Es una teoría del desarrollo no del aprendizaje. En este el proceso de aprendizaje es considerado como un proceso madurativo, por lo que el valor de la enseñanza, es disminuido.</td><td>Es una teoría de la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Se plantea el problema de cómo ayudar a los estudiantes a pasar de un nivel de razonamiento a otro.</td></tr>
<tr><td>No otorga gran importancia al lenguaje como promotor del paso de un nivel de razonamiento al siguiente.</td><td>El lenguaje juega un papel muy decisivo en el paso de un nivel a otro y se desarrolla en niveles de forma paralela a los niveles de razonamiento. La estructuración del lenguaje se va construyendo de forma pareja a la estructuración geométrica visual y a la estructuración abstracta del pensamiento.</td></tr>
<tr><td>Está a favor del movimiento de las Matemáticas modernas, vigente al momento de su surgimiento.</td><td>En contra del movimiento de Matemáticas modernas, pues se aproxima más a la naturaleza del conocimiento matemático visto como actividad, inducción e investigación que avanza desde el empirismo hasta la abstracción.</td></tr>
<tr><td>Para Piaget los niños nacen dotados de una estructura superior y solo necesitan</td><td>Los Van Hiele conciben las estructuras de nivel superior como el resultado del estudio de un nivel inferior para convertirse estas en una nueva estructura.</td></tr>
</table>

Piaget	Van Hiele
tomar conciencia de ella.	
	Los conceptos son construcciones humanas resultantes de procesos de aprendizaje en los cuales interviene el periodo histórico.
El desarrollo del espíritu humano conduce a ciertos conceptos teóricos.	

Comentarios finales

El estudio de las Matemáticas y, en especial de la geometría, brinda al individuo una mayor oportunidad de influir en su futuro y en el de la sociedad. Una sociedad más sabia, geométricamente hablando, tiene mayores posibilidades de desarrollo. Las habilidades que se incentivan con el estudio de esta disciplina (razonamiento, justificación, entre otros) son de aplicación no solamente en las Matemáticas sino en la vida en general.

Las dificultades que se presentan en la enseñanza de la geometría tienen un componente aportado por la experiencia personal del docente que traslada algo de la forma como él aprendió a sus clases. Las instituciones encargadas de formar a los profesores de Matemáticas deben incluir en sus planes de estudio cursos específicos de didáctica de la geometría, en los que el futuro docente tenga la posibilidad de aprender a implementar distintas estrategias metodológicas útiles para su práctica docente.

El Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele es un modelo de enseñanza y aprendizaje que brinda la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico y pautas a seguir para fomentar la consecución de niveles más altos de razonamiento. Al usar este modelo, el docente debe hacer una evaluación inicial que identificará el nivel en el que se encuentra cada uno de los estudiantes. Esto le permita describir el avance del razonamiento geométrico de cada uno de ellos luego de aplicar las actividades programadas.

Dado que la evaluación en el modelo de Van Hiele no es del tipo tradicional, ya que da importancia a lo que los alumnos contestan y el porqué de sus respuestas, para obtener resultados confiables tras su aplicación, es importante usar los instrumentos de evaluación con sumo cuidado. El modelo de Van Hiele da importancia al desarrollo del lenguaje, pues este es crucial en el paso de un nivel a otro. Por esto, los docentes deben establecer actividades en las que el estudiante tenga la oportunidad de comunicar sus ideas matemáticas, en un ambiente que le permita aprender de sus errores y mejorar en el uso del lenguaje matemático.

Desde esta perspectiva, ya no es posible concebir la enseñanza de la geometría como la aplicación de una serie de algoritmos y procedimientos rutinarios sin reflexión. Tampoco se trata de un proceso donde el docente es el actor principal, mientras el estudiante se "limita" a ser un receptor de información. El docente debe ser consciente de que su función es ser un medio para que el estudiante adquiera conocimientos, los reconstruya y puede utilizarlos. Por lo tanto, debe basarse en distintas herramientas, metodologías y teorías que le permitan orientar el proceso educativo para el logro de un aprendizaje significativo en sus estudiantes.

Referencias

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para ESO*. Madrid, España: Síntesis.

Andonegui, M. (2006). Desarrollo del pensamiento matemático. *Cuaderno N° 12 Geometría: conceptos y construcciones elementales*. Caracas, Venezuela: Federación Internacional Fe y Alegría.

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL. *"El Mácaro". Revista Enseñanza de la Matemática, 12 al 16*(número extraordinario), 67-87.

Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 241-250.

Barrantes, M. (2002). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje* (Tesis de Doctorado). Departamento de Didáctica de la Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Facultad de Educación. Universidad de Extremadura. España.

Beltrametti, M., Esquivel, M. y Ferrarri, E. (2005). *Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes de profesorado en Matemática*. Recuperado de http://www.unne.edu.ar/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-019.pdf

Braga, G. (1991). Apuntes para la enseñanza de la geometría. *Signos Teoría y Práctica de la Educación 4*, 52-57. Recuperado de http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=562

Campbell, R. (2006). *Jean Piaget's Genetic Epistemology: Appreciation and Critique [Epistemología Genética de Jean Piaget: Apreciación y crítica]*. Recuperado de http://hubcap.clemson.edu/~campber/piaget.html

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. Madrid: C.I.D.E., M.E.C.

Crowley, M. (1987). *El Modelo de Van Hiele*. Recuperado de www.proyectosur.com/descarga%20innovacion/van_hiele.doc.

De la Torre, A. (2003). El Método socrático y el Modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, *24*, 99-121. Recuperado de http://www.scm.org.co/Articulos/733.pdf

Fouz, F. y De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. *Un paseo por la geometría*. Recuperado de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf

Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el Modelo de Van Hiele. *Sigma Revista de Matemáticas 28*(5), 33-58. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_28/5_test_geometrico.pdf

Goncalves, R. (2006). Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en geometría. *Revista de Ciencias de la Educación*, *27*, 84-98. Universidad de Carabobo, Venezuela.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991). El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática 3*(2), 49-65.

Hernández, V. y Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares; M. Sánchez, (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*. Colección Ciencias de la Educación, *4*, 295-384. Sevilla, España: Alfar.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels [Un modelo para evaluar los niveles de Van Hiele]. En J. da Ponte & J. Matos (Eds.), *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME-18th) [Actas de la Conferencia Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME-18th)]*, 41-48. Lisboa, Portugal.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, España.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales.* Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. Bogota, Colombia.

National of Council of Teacher of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Traducción de Manuel Fernández Reyes. Original en inglés, 2000. España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática

Paredes, Z., Iglesias, M. y Ortiz, J. (2007). Sistemas de cálculo simbólico y resolución de problemas en la formación inicial de docentes. *Revista Enseñanza de la Matemática, 12 al 16* (número extraordinario), 89-107.