



Revista Científica General José María  
Córdova

ISSN: 1900-6586

revistacientifica@esmic.edu.co

Escuela Militar de Cadetes "General José  
María Córdova"  
Colombia

Gutiérrez Mendoza, Lucía; Buitrago Alemán, María Rocío; Ariza Nieves, Luz Mary  
Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un  
OVA como mediación pedagógica

Revista Científica General José María Córdova, vol. 15, núm. 20, julio-diciembre, 2017,  
pp. 137-153

Escuela Militar de Cadetes "General José María Córdova"  
Bogotá, Colombia

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=476255362008>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal  
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica\*

6

DOI: <http://dx.doi.org/10.21830/19006586.170>

Recibido: 23 de enero de 2017 • Aceptado: 5 de junio de 2017

---

Characterization of Difficulties in Learning the Derivative Concept and Design of an OVA for Educational Mediation

---

Identification des difficultés dans l'apprentissage du concept de dérivée et design d'un OVA comme médiation pédagogique

---

Identificação de dificuldades de aprendizagem do conceito da derivada e desenho de um OVA como mediação pedagógica

---

*Lucía Gutiérrez Mendoza<sup>a</sup>  
María Rocío Buitrago Alemán<sup>b</sup>  
Luz Mary Ariza Nieves<sup>c</sup>*

---

\* Proyecto de investigación asociado al grupo ECMU, categoría C en Colciencias con código CIAS 1786, Enseñanza de la derivada con TIC. “Un caso de estudio”.

<sup>a</sup> Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia. Magíster en Didáctica de las Ciencias. <lucia.gutierrez@unimilitar.edu.co>.

<sup>b</sup> Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia. Especialista en Planificación del Desarrollo Regional. <maria.buitrago@unimilitar.edu.co>.

<sup>c</sup> Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia. Magíster en Didáctica de las Ciencias. <luz.ariza@unimilitar.edu.co>.



**Resumen.** Este artículo es parte de una investigación que se centró en la caracterización de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de la derivada de una función de variable real, en los programas de Ingeniería en la Universidad Militar Nueva Granada. La metodología de investigación fue el estudio de caso, con el fin de indagar y comprender mejor la problemática y plantear soluciones que posibiliten un mejor aprendizaje de la derivada a partir del concepto de límite. El estudio contó con la opinión de los estudiantes y algunas evaluaciones. En el análisis, en función de las categorías cognitiva y procedimental, se identificaron dificultades de tipo algebraico, aritmético y de interpretación simbólica de los límites, al abordar la derivada a partir del concepto de límite. Como un mediador pedagógico, se propone el diseño de un objeto virtual de aprendizaje (OVA) para la enseñanza de la derivada.

**Palabras clave:** aprendizaje; derivada; dificultades; mediador pedagógico; OVA.

**Abstract.** This article, as part of an investigation, focused on the characterization of students' difficulties in learning the concept of the derivative of a real variable function in Engineering (UMNG) programs. The research methodology was the case study, to investigate and better understand the problem and to propose solutions that allow a better learning of the derivative from the concept of limit. The study counted on the students' opinion and some evaluations. In the analysis, according to the cognitive and procedural categories, difficulties of algebraic, arithmetic and symbolic interpretation of the boundaries were identified when approaching the derivative from the concept of the limit. As a pedagogical mediator, It is proposed the design of an OVA (Virtual Learning Object) for the teaching of derivative.

**Keywords:** derivative; difficulties; learning; OVA; pedagogical mediator.

**Résumé.** Cet article, dans le cadre d'une enquête, a porté sur la caractérisation des difficultés présentées par les élèves dans l'apprentissage du concept de dérivée d'une fonction de variable réelle dans les programmes d'ingénierie dans (UMNG). La méthodologie de recherche était l'étude de cas, d'étudier et de mieux comprendre les problèmes et proposer des solutions qui permettent un meilleur apprentissage dérivé du concept de limites. L'étude a inclus les commentaires des étudiants et des évaluations. Dans l'analyse, en fonction des catégories cognitives et de procédure, les difficultés algébrique, arithmétique et interprétation symbolique des limites dans le traitement dérivé du concept de la limite ont été identifiés. En tant que médiateur pédagogique, est la conception d'un OVA (objets virtuels d'apprentissage) pour la dérivée de l'enseignement est proposé.

**Mots-clés:** apprentissage; difficultés découlant; médiateur pédagogique; OVA.

**Resumo.** Este artigo, como parte de uma investigação, centrou-se na caracterização das dificuldades apresentadas pelos alunos em aprender o conceito de derivada de uma função, de variável real, em programas de engenharia da Universidad Militar Nueva Granada. A metodologia de pesquisa foi um estudo de caso, para investigar e compreender melhor os problemas e propor soluções que permitem uma melhor aprendizagem da derivada a partir do conceito de limites. O estudo incluiu feedback dos estudantes e algumas avaliações. Na análise, com base em categorias cognitivas e processuais, dificuldades algébrica, aritmética e interpretação simbólica dos limites na abordagem da derivada a partir do conceito do limite foram identificados. Como um mediador pedagógico, se propõe a concepção de um OVA (objeto virtual de aprendizagem) para o ensino da derivada.

**Palavras chave:** aprendizagem; dificuldades decorrentes; mediador pedagógico; OVA.



## Introducción

El cálculo diferencial es una de las ramas que más se relaciona con las aplicaciones a la ingeniería, pues con estos conocimientos los ingenieros pueden realizar estudios que dependan de cantidades o magnitudes y logran deducir en un proceso determinado las cantidades máximas o mínimas requeridas. El estudio de funciones, las formas de representar variables relacionadas y la razón de cambio, cumple un papel importante en la formación de los ingenieros, no solo ahora sino a través de la historia, en la medida en que los dota de herramientas matemáticas para interpretar datos, reconocer cualquier fenómeno y explicar los procesos de cambio.

Los fenómenos de variación se pueden abstraer en un modelo matemático y se representan a partir de gráficas y datos calculados, de modo que el estudio de las ecuaciones y las expresiones matemáticas obtenidas permite evaluar otras características del fenómeno no vistas antes. Abordar el cálculo diferencial y estudiar sus propiedades les posibilita a los estudiantes desarrollar el pensamiento variacional y la capacidad de análisis de situaciones problemáticas cuyas estructuras están cambiando sujetas a diferentes condiciones establecidas. A partir de este enfoque se pueden estudiar diferentes ejes temáticos de aplicación, como la optimización, razón de cambios y trazo de curvas, cuyo estudio permite explorar particularidades que no son tan evidentes en diferentes hechos o fenómenos.

Abordar el concepto de la derivada a partir del concepto del límite representa serias dificultades, de acuerdo con lo que afirma Flores (2014), pues si bien los estudiantes exitosos comprenden y adquieren un dominio para derivar y aplicar los conceptos en la solución de problemas, no todos los alumnos adquieren estas habilidades e, incluso, los mismos estudiantes sobresalientes tienen dificultades para explicar los conceptos de límite, de la derivada, lo cual deja en evidencia concepciones erróneas.

Este problema viene de la formación básica y media en matemáticas, hecho que es evidente en los resultados del examen de Estado Icfes (López, 2005) como requisito para ingresar a las Instituciones de Educación Superior (IES). También es evidente en el reporte porcentual un poco alto de estudiantes que muestran bajo rendimiento académico en la universidad porque no cumplen las competencias mínimas requeridas en matemáticas (escasa relación de los conceptos previos con la introducción al cálculo), lo cual constituye un obstáculo para el aprendizaje del cálculo y otras áreas de las matemáticas. Además, se suma a esto las metodologías o estrategias didácticas empleadas por los docentes en el aula de clase, las cuales pueden convertirse en experiencias positivas o negativas para los estudiantes.

El estudio realizado dentro del proyecto de investigación CIAS 1786 de la Universidad Militar Nueva Granada<sup>1</sup>, se relaciona con la caracterización de algunas dificultades que se presentan en el aprendizaje de la derivada a partir del concepto de límite, con el fin de poder definir algunas estrategias para mejorar el aprendizaje.

En esta etapa del proyecto, se inició con una encuesta aplicada a los estudiantes de Ingeniería (en el periodo 2015-I) para indagar lo que ellos consideran que saben. Estos resultados se cruza-

<sup>1</sup> Proyecto adscrito al grupo ECMU, categoría C en Colciencias, con título: Enseñanza de la Derivada con TIC. “Un caso de estudio”.



ron con el análisis de pruebas escritas aplicadas a los alumnos, con el fin de validar lo que ellos consideran temas de su dominio en el estudio de “la derivada”.

Una vez se identificaron las dificultades y con las herramientas que ofrecen las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC), se propuso el diseño de un objeto virtual de aprendizaje (OVA) como mediador pedagógico para la enseñanza de la derivada.

## Antecedentes

El análisis del cambio instantáneo y el cambio promedio como un proceso de variación, siempre ha estado asociado a procesos de la vida cotidiana y a diversas situaciones de tipo natural, las cuales se describen tanto cualitativa como cuantitativamente. Es de interés del ingeniero conocer cómo se incrementa una situación o cómo decrece un valor, cuál es el valor más pequeño o el más grande, asimismo, describir y cuantificar ha permitido reconocer y dar solución a situaciones problemáticas del entorno y a la vez tomar registros numéricos de dichos cambios (temperatura, lluvias, aumento poblacional, la producción de metales y otros) con el propósito de pronosticar situaciones, analizar y evaluar los resultados.

## Evolución histórica del cálculo diferencial

A través de la historia se realizaron estudios de los conceptos *razón de cambio promedio* y *razón de cambio instantánea*. Entre estos se pueden citar los trabajos realizados por Tales de Mileto (año 585 a. C) en los que aborda el estudio de las razones y proporciones para comparar medidas diferentes entre segmentos y poder analizar las relaciones entre dichas magnitudes. Asimismo, el estudio de los triángulos semejantes hizo posible establecer la relación que existe entre los ángulos y los lados de esta figura geométrica, en tanto otros matemáticos utilizaron las representaciones geométricas para explicar las relaciones entre magnitudes variantes. También se abordó el estudio de un cuerpo en movimiento, a partir del cual se pudo vincular el tiempo y la velocidad como dos variables relacionadas en constante cambio.

En los años 1564-1642, Galileo Galilei hizo una descripción del mundo en términos del tiempo, la distancia, la fuerza y la masa, y a partir de representaciones geométricas abordó el estudio de la velocidad para luego determinar el teorema de la velocidad. Más adelante, Descartes y Fermat avanzaron sus estudios del problema variacional, utilizando ecuaciones por medio de las cuales se relacionaban dos cantidades variables (Rendón, 2009). Luego apareció L'Hopital con el uso de las gráficas para representar los cambios entre diferentes magnitudes y posteriormente aparecieron los trabajos de Newton y Leibnitz, en los cuales se concreta el concepto de razón de diferencias entre valores infinitamente pequeños (razón de cambio).

En este sentido, a través de la historia la razón de cambio y el concepto de la derivada no solo han posibilitado el estudio y análisis de fenómenos cambiantes, sino que además han servido para caracterizar diferentes problemas y representarlos matemáticamente, como se ha podido conocer.

El cambio o variación de una situación se puede describir a partir de un contexto sociocultural (cuantitativo), con lo cual se generan diversidad de predicciones o pronósticos, mientras que el



cambio relacionado con el hecho de medir conlleva un modelo riguroso de las matemáticas para predecir los cambios eventuales que se puedan presentar de acuerdo con unas condiciones iniciales. Matemáticamente, se puede asociar un modelo donde es posible realizar una aproximación de la realidad para luego hacer un análisis más contundente y preciso.

## Enseñanza del cálculo diferencial y sus obstáculos

En este sentido, el cálculo variacional representa una herramienta fundamental para ser utilizada por los ingenieros y profesionales de diferentes áreas, no basta con utilizar las gráficas como formas de representar la variación, también es necesario que el concepto sea comprendido y analizado por el estudiante para que obtenga una posible solución del problema en cuestión. Por lo tanto, se requiere de un proceso de modelación matemática y del uso de métodos heurísticos para ayudar al alumno a comprender, interpretar y analizar el problema a partir de razones de diferencias entre magnitudes infinitamente pequeñas; entre estos métodos, se cuenta con el uso de representaciones a partir de gráficas, datos numéricos o el uso de diagramas Polya (Campos, 2001), con el fin de llegar a estructuras más simples y así alcanzar una posible interpretación y solución.

- *Representación numérica*: se registran diferentes datos numéricos (datos medidos) en una tabla (tabulación), de acuerdo con las magnitudes involucradas en el fenómeno físico o experimental.
- *Representación gráfica*: se hace por medio de una curva que se traza en el plano cartesiano o en el plano polar, a partir de un registro de datos de las magnitudes involucradas.
- *Representaciones algebraicas*: a partir de los registros numéricos, se pueden construir expresiones algebraicas (ecuaciones) que se ajustan al comportamiento de las variables involucradas.

Los lineamientos curriculares y algunos trabajos de investigación plantean nuevos enfoques en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático variacional. Como se mencionó al principio, el concepto de *variación* es muy importante en la formación de un ingeniero, en la medida en que posibilita la modelación, interpretación, comprensión y análisis de fenómenos de constante cambio, como es el estudio del flujo de corriente, el estudio de fenómenos periódicos, el estudio de magnitudes para calcular áreas o perímetros. Sin embargo, la fundamentación del tema conlleva dificultades de aprendizaje y obstáculos para que el estudiante logre una conceptualización significativa y exitosa en su campo de formación.

El concepto de *infinitesimal*, entendiéndose como la diferencia entre dos valores de una misma variable, de longitud tan pequeña que tiende a cero sin llegar a ser cero, y sus aplicaciones a diversidad de fenómenos, no es algo fácil de entender y conceptualizar por parte de los estudiantes. No obstante, desde sus diferentes ramas de aplicación, este concepto se utiliza para minimizar costos, materiales, para evaluar velocidades, aceleraciones, fuerzas, entre otras múltiples aplicaciones.



En su trabajo de investigación, López (2005) afirma que es muy bajo el desempeño académico en el área de las matemáticas de los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería, lo cual dificulta el aprendizaje del cálculo diferencial y tiene como consecuencia un alto índice de deserción escolar, pero también sostiene que este problema no se presenta solo en las universidades privadas, sino que también afecta las universidades públicas. Como consecuencia, algunas universidades han diseñado estrategias de aprendizaje con el fin de fortalecer las competencias, por ejemplo, algunas ofrecen cursos complementarios de precálculo para nivelar a los estudiantes, como lo hace la Universidad de los Andes. Por su parte, la Escuela de Ingeniería Julio Garavito ofrece cursos en los que se implementa la resolución de problemas acompañados de trabajos en los laboratorios de informática, en tanto que otras instituciones ofrecen tutorías, talleres de reforzamiento complementarios a las clases magistrales, o implementan como metodología el aprendizaje basado en problemas y el uso de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En el mismo estudio, López (2005) concluye que una de las causas que dificulta el aprendizaje de las matemáticas es la desmotivación de los estudiantes hacia esta área, el índice de mortalidad, la repetición de la asignatura y la falta de comprensión.

### **Cambios en la enseñanza de las matemáticas apoyadas por las TIC**

Es de particular interés en las Instituciones de Educación Superior (IES) generar condiciones y cambios académicos y administrativos que favorezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje en este nuevo siglo, en particular de las ciencias matemáticas, teniendo en cuenta que todos los planes curriculares contemplan asignaturas de esta área. En el siglo XXI se puede evidenciar la contraposición entre dos modelos pedagógicos, uno con la tendencia del modelo tradicional y el otro con la nueva tendencia de las TIC, el cual se considera como el nuevo modelo que abre paso al desarrollo social, cultural y educativo. No obstante, se debe tener en cuenta que el cambio se debe dar en las formas de transmitir los conocimientos, en las formas de conocer, de actuar y de enseñar, de modo que el estudiante aprende de manera activa y participativa en los nuevos escenarios en los cuales se desarrolla la educación (Guazmayán, 2004).

De igual manera, Salomon (2001) expone que “la asociación con herramientas poderosas caracterizadas sobre todo por la delegación cognitiva puede mejorar el desempeño (conjunto) y hasta redefinir las tareas intelectuales [...]” (p. 181). Esta afirmación refuerza la importancia de utilizar las herramientas tecnológicas en los diferentes procesos académicos que posibiliten el desarrollo de pensamiento analítico y variacional.

No es suficiente que las IES promocionen programas con la participación de docentes y estudiantes, también es preciso que se planteen estrategias didácticas y pedagógicas que incluyan el uso de las TIC, con el propósito de generar posibles mejoras en diferentes aspectos referentes al sistema educativo y sus procesos. Las TIC, en cuanto elemento integrador y transformador del entorno educativo, desde la acción y la práctica pedagógica, impulsan cambios en el paradigma de la educación tradicional, en la medida en que centran los procesos de aprendizaje más en el estudiante y flexibilizan el espacio y los tiempos de estudio. Para Campos (2009), las TIC son “una herramienta cognitiva en la medida en que posibilitan el estudio de un problema matemático desde diferentes puntos de vista y representaciones de manera articulada” (p. 1).



La estructura matemática está formada por postulados, teoremas y lemas, cuyo rigor se fundamenta en la demostración y las relaciones lógicas o numéricas. Sin embargo, estas estructuras a veces no son de fácil entendimiento para los estudiantes, por lo cual estos conocimientos se pueden divulgar a partir de múltiples registros o representaciones, como tablas, gráficas, ecuaciones, símbolos. En este orden de ideas, desde un nuevo paradigma, las TIC posibilitan la enseñanza de las matemáticas con la participación activa de los estudiantes, en la medida en que ellos pueden manipular objetos matemáticos por medio de actividades interactivas, pueden realizar diferentes tipos de operaciones (aritméticas, lógicas y simbólicas), de tal manera que facilitan la construcción de los conceptos matemáticos en estudio.

Esto significa que en la actualidad no es suficiente saber matemáticas, sino que también es necesario que el docente de Matemáticas conozca el currículo que imparte y que integre en sus prácticas los recursos tecnológicos.

En tal sentido, este trabajo diseñó una metodología desde el enfoque de las TIC y la didáctica de las matemáticas con el objetivo de que los alumnos mejoren sus procesos de aprendizaje de “la derivada” (Carneiro, Toscano & Díaz, 2009).

Los recursos ofrecidos por el desarrollo tecnológico apoyan los procesos educativos de las matemáticas (sin llegar a solucionar totalmente la problemática de su aprendizaje), en la medida en que facilitan la creación de entornos de aprendizaje y el uso de “técnicas visuales como uno de los principales elementos de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje” (Campos, 2001); no basta con transmitir conceptos, los objetos matemáticos deben ser representados en diferentes formas (gráfica, tablas, ecuaciones) para que haya una verdadera comprensión y asimilación de los conceptos.

En los diferentes programas que ofrece la Universidad Militar Nueva Granada, se tiene la modalidad presencial y a distancia. En la primera es frecuente el trabajo directo en el aula, donde se desarrollan las clases de forma magistral, con la exposición del tema por parte del docente. En el caso de la derivada, esta se expone a partir del concepto de *límite*, incluyendo sus propiedades y sus aplicaciones (razón de cambio, optimización, trazo de curvas y regla de L'Hopital). Estos conceptos se han fundamentado durante más de treinta años para los diferentes programas de Ingeniería de acuerdo con las políticas educativas.

En un principio, las asignaturas para Ingeniería se diseñaron y se planificaron teniendo en cuenta los tiempos de trabajo directo con los estudiantes y los espacios de trabajo, más identificados como las aulas de clase, en este caso el aula de matemáticas, lugar en donde un grupo de estudiantes asiste a la clase magistral que imparte su docente en el área disciplinar. En la Universidad Militar Nueva Granada, realmente no es común hablar del aula de matemáticas como se hace en otras asignaturas, como lo es el aula de Inglés o el laboratorio de Física, por la sencilla razón de que dichas aulas están dotadas de recursos tecnológicos y didácticos que se utilizan para el desarrollo de clase. Es muy común que una clase de matemáticas se desarrolle magistralmente, es decir, se exponen los temas a los estudiantes y estos a su vez desarrollan ejercicios rutinarios, técnicos y memorísticos como respuesta a un proceso donde se repiten conceptos y se memorizan fórmulas, teoremas y propiedades. Por esta razón, es importante llamar la atención de que en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en el desarrollo de las clases de matemáticas en la modalidad



presencial o a distancia es fundamental considerar el uso de nuevas metodologías en las cuales se incluyan las TIC con el fin de lograr los objetivos de los cursos o las asignaturas.

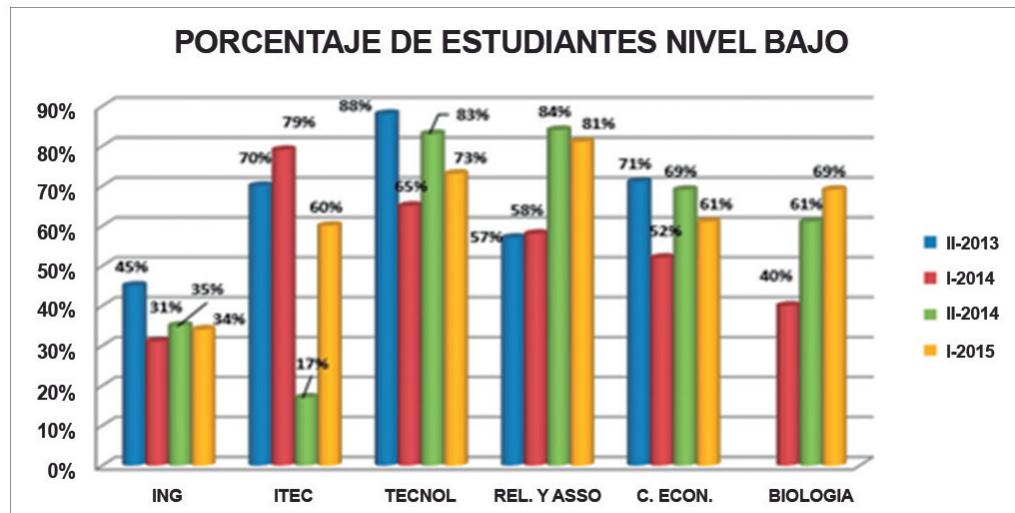
Desde esta óptica, en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Militar Nueva Granada se han generado propuestas pedagógicas para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la educación superior. Por ejemplo, se ha implementado el uso de aulas virtuales en Moodle, realizado tutorías presenciales a los estudiantes y talleres dirigidos. Asimismo, se han formalizado propuestas de proyectos de investigación enfocados en las metodologías de enseñanza y en las competencias que se desea desarrollar en los estudiantes, puesto que el rendimiento de los alumnos y la enseñanza de las matemáticas son vistos como un problema bastante complejo en diferentes escenarios académicos, de acuerdo con los reportes estadísticos de reprobación arrojados por el sistema Univex de la institución. Claro está que esta situación es común en otras instituciones y por lo tanto la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas también ha sido objeto de estudio por diferentes investigadores en la educación matemática (García, Azcárate & Moreno, 2006).

Como una propuesta de cambio frente a los procesos de enseñanza, la Universidad Militar Nueva Granada se incorporó al programa PlanEStic<sup>2</sup>, con el fin de ayudar a precisar los modelos educativos en el marco de la política de inserción de las TIC en los procesos educativos y para el desarrollo de la comunidad. En este sentido, en cuanto IES, la Universidad cuenta con una buena infraestructura que la hace competitiva a nivel nacional e internacional y que, en su medida, le ha permitido desarrollar programas con alta calidad académica y brindar diferentes servicios y programas *online* a su comunidad; sin embargo, muchos estudiantes utilizan las TIC con otros fines diferentes a los de tipo académico.

Por su parte, el Departamento de Matemáticas de la Universidad, desde el año 2013, ha implementado diferentes estrategias (test escritos o pruebas de diagnóstico) para identificar las competencias básicas con las que ingresan los estudiantes de los diferentes programas que oferta la institución, pues es importante determinar el tipo de población y los conocimientos previos de su formación básica del área disciplinar, teniendo en cuenta que el aprendizaje implica una participación en comunidad. Con base en estas estrategias, a continuación se presentan los reportes estadísticos tomados del Departamento de Matemáticas, los cuales describen los niveles de competencias con que ingresan los estudiantes a la Universidad Militar.

En el informe estadístico se observan tres indicadores en los niveles bajo, medio y alto (figura 1). Se encuentra que del total de los estudiantes que ingresan en los semestres del 2013-II a 2015-I, la Facultad de Ingeniería reporta el grupo con menor porcentaje, cuyas competencias se centran en los del nivel bajo, en el 2013-II se reporta el 45%, en el 2014-I el 31%, en el 2014-II el 34% y en el 2015-I se reporta el 34%.

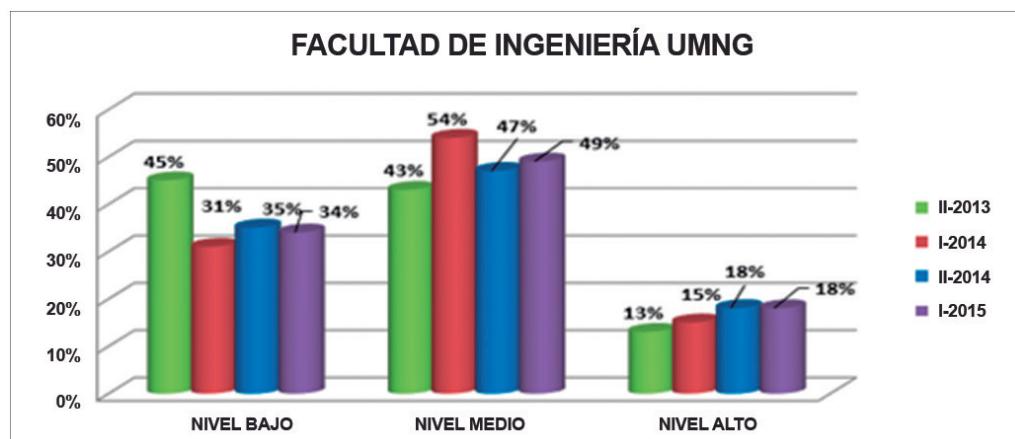
2 Comunidad de práctica y planeación estratégica de incorporación de TIC en procesos educativos, IES.



**Figura 1.** Comparativo por carreras de los estudiantes clasificados en nivel bajo

Fuente: tomado de la base de datos del Departamento de Matemáticas de la Universidad Militar Nueva Granada en el año 2015.

También se observa que los porcentajes en el nivel bajo durante los últimos tres períodos académicos (2014-I, 2014-II y 2015-I) se han mantenido en el 33% en promedio, frente al 45% reportado en el periodo 2013-II, de lo cual se infiere un mejoramiento muy leve del nivel de conceptos básicos con que ingresan los estudiantes a la Universidad.



**Figura 2.** Comparativo por niveles para la Facultad de Ingeniería

Fuente: datos tomados del Departamento de Matemáticas de la Universidad Militar Nueva Granada en el año 2015.

De igual forma, los resultados de la figura 2 reflejan un desempeño bajo en promedio del 36% y el 48% en promedio en el nivel de competencias básicas mínimas en lo referente a los conocimientos matemáticos básicos, de manera que el 48% de la población estudiantil se concentra en las



competencias mínimas requeridas. Tan solo el 16% en promedio de los estudiantes se clasifican en el nivel alto, aspecto un poco preocupante dado que esta cifra es menor frente a los estudiantes clasificados en el nivel bajo, así que se observa que tan solo el 17% en promedio para los últimos tres semestres (2014-I, 2014-II y 2015-I) se clasifica en el nivel alto.

Estos resultados, junto con el bajo rendimiento académico de los estudiantes en las asignaturas de Matemática Básica y Cálculo Diferencial, donde se reportan índices de reprobación superiores al 30%, refleja un desempeño perjudicial y preocupante para la comunidad académica, en particular para los alumnos.

Atendiendo los hallazgos anteriores, la Universidad tiene el reto de promover proyectos que fortalezcan los procesos de enseñanza-aprendizaje de las ciencias básicas, en los cuales sea posible reestructurar la formación del ingeniero y le permita avanzar en su formación integral, según sus intereses, capacidades y habilidades a lo largo de su carrera profesional. Dentro de los procesos curriculares, es importante analizar y corregir aquellos aspectos que están obstaculizando su aprendizaje, lo cual implica, entre otras cosas, poder determinar las dificultades reales en el área disciplinar que afectan su buen desempeño a corto y largo plazo. Con estas consideraciones, se decidió diseñar estrategias didácticas apoyadas con recursos brindados por las TIC que favorezcan los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

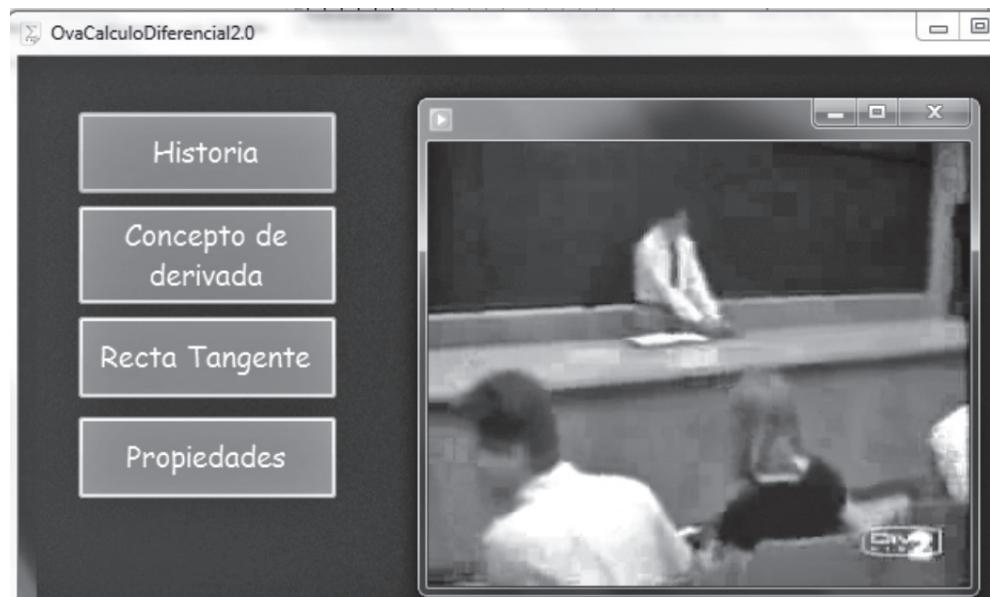
## Metodología

Para indagar sobre las dificultades que tienen los estudiantes se utilizó como metodología de estudio la investigación de tipo cualitativo, enmarcada dentro de lo descriptivo e interpretativo. Se eligió el estudio de caso como método de investigación que brinda elementos para analizar de manera particular la problemática expuesta y proponer posibles soluciones (Cerda, 2005).

### Diseño de un objeto virtual de aprendizaje (OVA)<sup>3</sup>

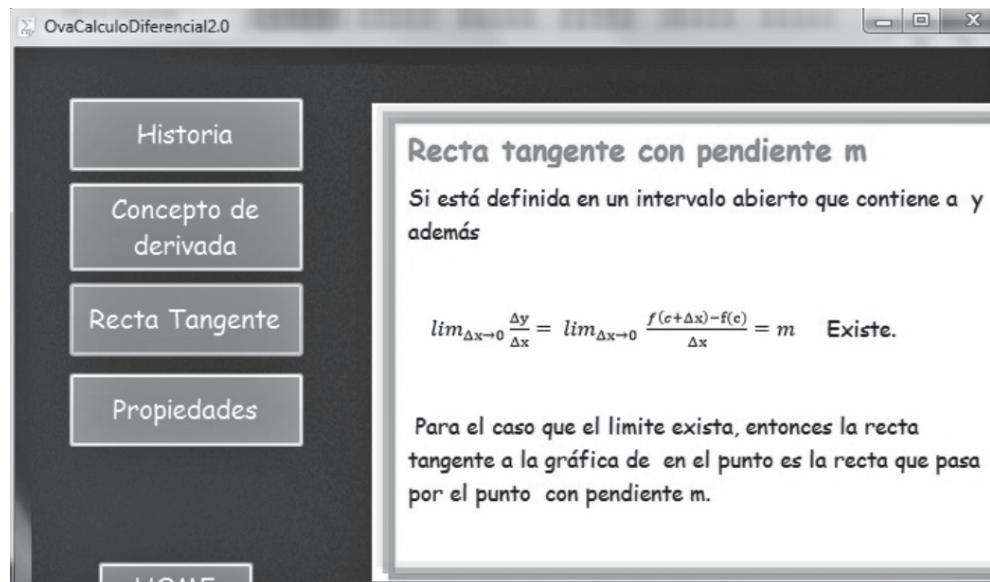
Teniendo en cuenta que las TIC ofrecen herramientas de apoyo a los procesos de enseñanza-aprendizaje y abren nuevas posibilidades en cuanto al manejo del espacio y el tiempo (síncrono o asíncrono), en esta investigación se propuso como innovación el diseño de un OVA como mediador pedagógico en la enseñanza de la derivada, en busca de mejorar la comprensión y el aprendizaje de sus conceptos fundamentales (Gutiérrez, Buitrago & Ariza, 2015).

<sup>3</sup> El diseño del OVA se expuso en el XX Congreso de Informática Educativa. TISE 2015.

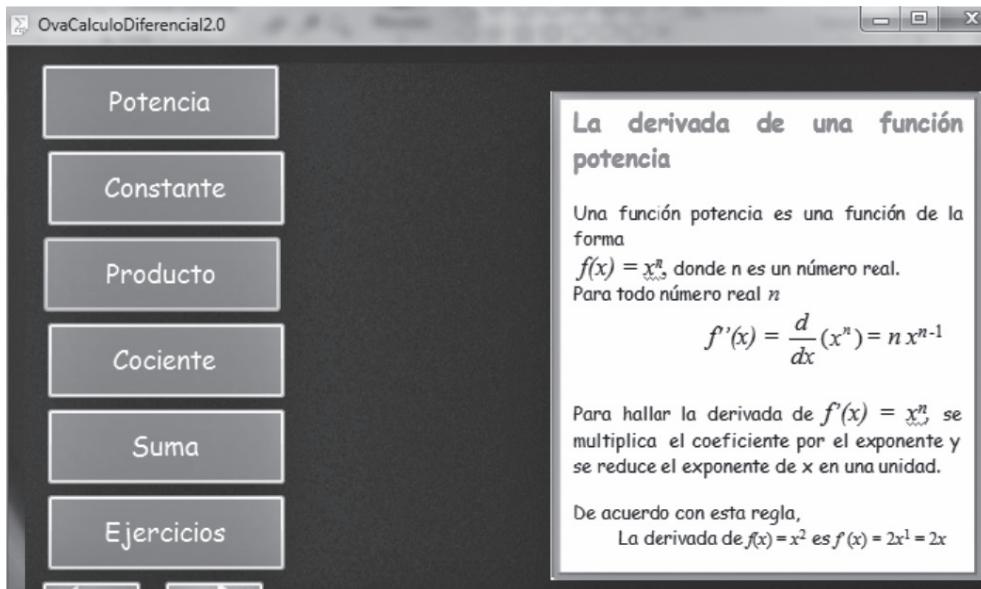


**Figura 3.** Imagen de un video sobre la historia de la derivada.  
Fuente: tomada de <https://www.youtube.com/watch?v=4yIINMa2vf0>

Esta diapositiva (figura 3) se incluye en un video sobre el desarrollo del cálculo diferencial a través de la historia, el concepto de la derivada como razón de cambio y como la pendiente de la recta tangente a una curva determinada.



**Figura 4.** Ejemplo de recta tangente a una curva en un punto  $x=c$   
Fuente: tomada de <https://www.youtube.com/watch?v=4yIINMa2vf0>



**Figura 5.** Ejemplo de derivada de una función de un producto, cociente, potencia.

Fuente: tomada de <https://www.youtube.com/watch?v=4yIINMa2vf0>

El OVA se diseña teniendo en cuenta el contenido curricular y la dificultad de conceptualizar la derivada a partir del concepto de límite, por lo cual en el recurso digital se incluyen definiciones de límite, ejemplos de la derivada con sus respectivas gráficas, definición de la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea con ejemplos aplicados a la física, ejemplos de la derivada, las propiedades de la derivada para la suma, el producto y el cociente (figuras 4 y 5). Además, se incluye la regla de la cadena y se explican paso a paso los métodos para calcular la derivada de diferentes funciones (trigonométricas y sus inversas, exponenciales, y logarítmicas), se emplean otros recursos de apoyo al proceso de aprendizaje (videos, lecturas del eje temático, gráficas), y se diseñan algunas actividades complementarias y evaluaciones (Ramírez, 2009) importantes en este proceso educativo. Cada ejercicio que realice el estudiante en el OVA tiene una retroalimentación, en la cual se especifica cada proceso realizado, además con algunos ejemplos, los estudiantes pueden comparar la gráfica de la función dada con su respectiva función derivada.

## Exploración de dificultades

Con el objetivo de diseñar estrategias (OVA) y de concretar actividades que favorezcan el aprendizaje del cálculo diferencial, en el semestre 2015-I se aplicó una encuesta y una prueba escrita a los estudiantes de tres grupos diferentes que permitiera recoger información para identificar las dificultades más sentidas que afectan el aprendizaje de los conceptos básicos del curso Cálculo Diferencial, en particular los conceptos de *límite* y de la *derivada* como una razón de cambio.



La encuesta, de tipo exploratoria, se aplicó a los estudiantes para indagar sobre las dificultades en el aprendizaje de la derivada desde los aspectos cognitivos, procedimentales y actitudinales. Para la evaluación de cada ítem se utilizó la escala de Likert (*Nunca*, *Casi nunca*, *A veces*, *Casi siempre* y *Siempre*) según el nivel de acuerdo o desacuerdo en cada pregunta, por parte de ellos.

## Análisis de dependencia

El análisis de la información se realizó aplicando a las variables objeto de estudio la prueba Chi-cuadrado de Pearson para determinar el nivel de dependencia entre diferentes preguntas.

## Resultados

Se realizó un estudio de tipo cualitativo, agrupando diferentes preguntas y analizando las respuestas que sobre ellas dieron los estudiantes. Los resultados se organizaron en tablas de contingencia de acuerdo con la escala Likert. Para el análisis de los hallazgos se seleccionaron algunas preguntas de la encuesta aplicada según la relación existente entre ellas.

Con la prueba Chi cuadrado se observó dependencia entre la pregunta dos y la ocho de la encuesta, respectivamente: *Identifica las reglas de derivación que debe utilizar para derivar una función dada* y *Utiliza correctamente las reglas de derivación*. Del cruce de esta información con los resultados del instrumento utilizado para el análisis del primer parcial, se encontró que la mayoría de los estudiantes consideran que ellos casi siempre identifican y utilizan correctamente las reglas de derivación, como se observa en la tabla 1, sin embargo en el desarrollo del parcial (figura 6), el 61% de los estudiantes tuvieron procedimientos incorrectos y el 72% tuvieron la respuesta incorrecta.

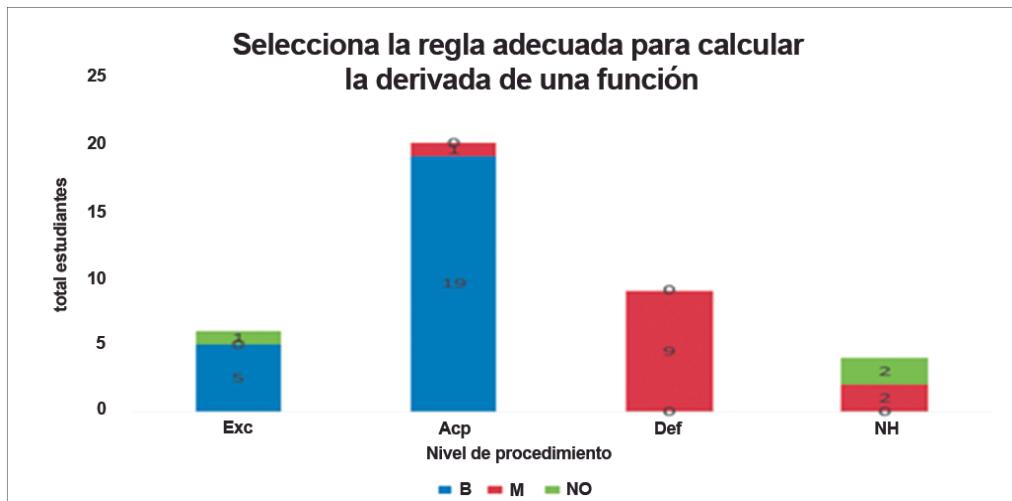
**Tabla 1.** Tabla de contingencia pregunta dos versus pregunta ocho

		<b>Pregunta 8:</b> Utiliza correctamente las reglas de derivación				<b>Total</b>
		<b>Casi nunca</b>	<b>A veces</b>	<b>Casi siempre</b>	<b>Siempre</b>	
<b>Pregunta 2:</b> Identifica las reglas de derivación que debe utilizar para derivar una función dada	<b>Casi nunca</b>	1	0	0	0	1
	<b>A veces</b>	3	6	0	0	9
	<b>Casi siempre</b>	0	5	25	1	31
	<b>Siempre</b>	0	0	0	13	13
<b>Total</b>		4	11	25	14	54

Fuente: elaboración de los autores.



Con la prueba Chi cuadrado se observó dependencia entre los siguientes aspectos (figura 6).



**Figura 6.** Nivel de procedimiento en el cálculo de la derivada.

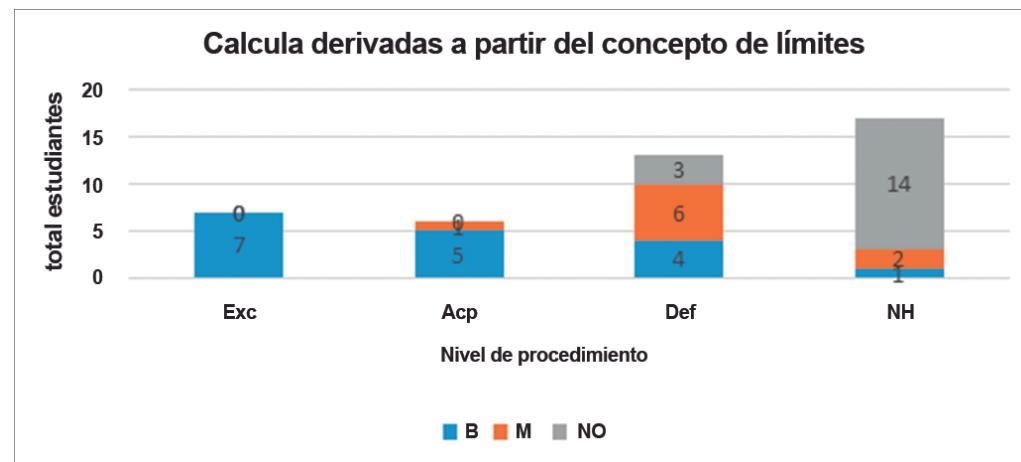
Fuente: elaboración de los autores.

Asimismo, la prueba permitió establecer dependencia entre las preguntas uno y siete de la encuesta, respectivamente: *Comprende las diferentes representaciones simbólicas de los límites* y *Calcula derivadas a partir del concepto de límite*. Del cruce de esta información, con los resultados del instrumento utilizado para el análisis del primer parcial, se encontró que aunque la mayoría de los encuestados consideran que sí calculan la derivada a partir del concepto de límite y también comprenden las diferentes representaciones de los límites (tabla 2), se observa que el 30% de los estudiantes realizaron procedimientos deficientes en el cálculo de las derivadas y el 40% no realizó ningún proceso (figura 7). Asimismo, en las evaluaciones se observa que el 77% de los estudiantes presentan un manejo semiótico deficiente del concepto de límite y solo el 5% comprenden las diferentes representaciones simbólicas del límite (figura 8).

**Tabla 2.** Tabla de contingencia pregunta uno versus pregunta siete

		<i>Pregunta 7: Calcula derivadas a partir del concepto de límite</i>					Total
		Nunca	Casi nunca	A veces	Casi siempre	Siempre	
<i>Pregunta 1:</i> Comprende las diferentes representaciones simbólicas de los límites	<b>Casi nunca</b>	1	0	0	0	0	1
	<b>A veces</b>	4	15	2	0	0	21
	<b>Casi siempre</b>	0	0	15	9	0	24
	<b>Siempre</b>	0	0	0	4	4	8
<b>Total</b>		<b>5</b>	<b>15</b>	<b>17</b>	<b>13</b>	<b>4</b>	<b>54</b>

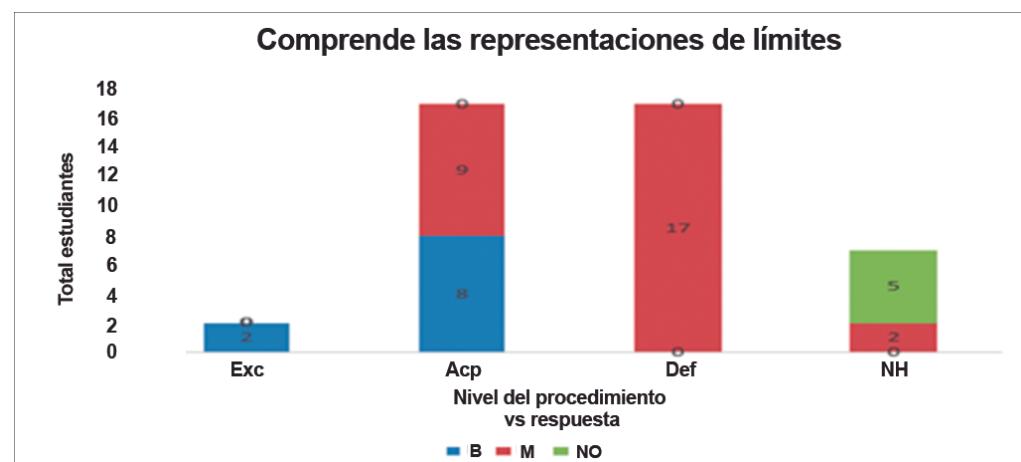
Fuente: elaboración de los autores.



**Figura 7.** Cálculo de derivadas (Procedimiento vs. Respuesta).

Fuente: elaboración de los autores.

Lo anterior muestra la diferencia entre lo que los estudiantes consideran que comprenden y lo que realmente saben hacer.



**Figura 8.** Representaciones simbólicas de límites (Procedimiento vs. Respuesta).

Fuente: elaboración de los autores.

## Análisis de resultados

Las dificultades encontradas se categorizaron en *cognitivas* y *procedimentales*, teniendo en cuenta que el análisis se realiza desde la mirada de los estudiantes y desde las pruebas aplicadas a ellos.



**Tabla 3.** Análisis de los resultados

Categoría	Desde la óptica de los estudiantes	Análisis de la prueba
<b>Cognitiva</b>	El 81% de los encuestados aseguran que identifican las reglas de derivación cuando se requiere.	El 61% de los estudiantes no identifican las reglas de derivación.
	El 59% de los encuestados consideran que comprenden las diferentes representaciones simbólicas de los límites.	El 61% de los estudiantes presentan manejos deficientes en la representación simbólica de los límites y el 16% no realizan los procedimientos. Esto demuestra la falta de comprensión de las diferentes representaciones de los límites.
<b>Procedimental</b>	El 72% de los encuestados aseguran que utilizan correctamente las reglas de derivación.	El 39% de los estudiantes utilizan correctamente las reglas de derivación, es decir que el 61% presentan deficiencias en la utilización de las reglas.
	El 59% de los encuestados reconocen tener dificultades en el cálculo de la derivada a partir del concepto del límite.	El 70% de los estudiantes tienen dificultades en el cálculo de la derivada a partir del concepto del límite.

Fuente: elaboración de los autores.

## Conclusiones

En relación con los objetivos propuestos en esta investigación y de acuerdo con el análisis realizado a las respuestas dadas por los estudiantes en la encuesta y en las pruebas escritas, se llegó a las siguientes conclusiones:

- Aunque la mayoría de los estudiantes consideraron tener buen dominio de los conceptos fundamentales de la derivada a partir de la definición del límite, el análisis de las pruebas escritas permitió evidenciar dificultades cognitivas y procedimentales respecto a estos conceptos. Esta situación se convierte en un obstáculo para el aprendizaje y el logro de los objetivos de las evaluaciones.
- No obstante los estudiantes desarrollan procesos mecánicos correctos en el cálculo de las derivadas, existen grandes dificultades para abordar la derivada como una razón de cambio, dado que el concepto de la derivada a partir de la definición con límite no se comprende ni se conceptualiza, ni en la misma función ni la derivada en un punto específico  $x=c$ .
- Un alto porcentaje de estudiantes identifican las reglas de derivación, pero en el momento de aplicarlas muestran dificultades de tipo algebraico y aritmético, así como en



la estructura algebraica de las funciones, lo cual hace difícil establecer la jerarquía que demanda las reglas de derivación.

- Los resultados obtenidos posibilitaron diseñar un OVA con el fin de apoyar la apropiación y la comprensión del concepto de la derivada. Este OVA está disponible para los estudiantes que cursen Cálculo Diferencial en cualquier campo profesional.
- El OVA enfocado hacia el aprendizaje de la derivada posibilita cobertura masiva sin discriminación para personas del nivel profesional en cualquier categoría o condición social<sup>4</sup>.
- La construcción del cálculo diferencial llevó varios años de trabajo arduo por parte de grandes matemáticos, lo cual nos permite reflexionar sobre la forma en la que los docentes fundamentamos la derivada en las aulas de clase. De por sí, el concepto de la *derivada* no es tan fácil de asimilar y reconstruir a partir del concepto de *límite*, por lo que se deben buscar metodologías que faciliten su comprensión y su aprendizaje.

## Referencias

1. Campos, E. (2001). La tecnología y las múltiples representaciones. *Innovaciones Educativas. Tecnología para la enseñanza de las matemáticas y las Ciencias*, 1, 2-6.
2. Carneiro, R., Toscano, J. & Díaz, T. (2009). *Los desafíos de las TIC para el cambio educativo*. Madrid, España: OEI-Fundación Santillana.
3. Cerdá, H. (2005). *Los elementos de la investigación*. Bogotá: El Búho.
4. Flores, A. (2014). Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: Ejemplos con uso de tecnología interactiva. *Revista El Cálculo y su Enseñanza*, 5 (5), 1-26.
5. García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de Ciencias Económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 85-116. Recuperado de [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S166524362006000100005&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S166524362006000100005&lng=es&tlng=es).
6. Guazmayán, C. (2004). *Internet y la investigación científica. El uso de los medios y las nuevas tecnologías en la educación*. Bogotá: Magisterio.
7. Gutiérrez, L., Buitrago, R. & Ariza, L. (diciembre, 2015). *Diseño de un OVA como mediador pedagógico para la enseñanza de la derivada*. XX Congreso Internacional de Informática Educativa. Universidad de Chile, Santiago de Chile.
8. López, R. (2005). *Deficiencias en matemáticas que afectan el aprendizaje del cálculo diferencial en estudiantes de Ingeniería de una universidad privada* (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.
9. Ramírez, D. (2009). Objetos virtuales de aprendizaje en e-learning 2.0. *XVI Congreso Internacional sobre Educación Electrónica, Virtual y a Distancia. Comité Académico Teledu2009*. Bogotá.
10. Rendón, P. (marzo, 2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión*. (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquia, Medellín.
11. Salomon, G. (2001). *Cogniciones distribuidas*. Buenos Aires: Amorrortu.

<sup>4</sup> El diseño del OVA pretende ilustrar de manera dinámica la derivada y está por implementarse en los cursos siguientes de cálculo diferencial.