



Dyna

ISSN: 0012-7353

dyna@unalmed.edu.co

Universidad Nacional de Colombia  
Colombia

Mesa-Mazo, Mónica; Valencia-Calvo, Johnny; Olivar-Tost, Gerard

Model for a vehicle dynamics through a sequence of traffic lights

Dyna, vol. 81, núm. 186, agosto, 2014, pp. 138-145

Universidad Nacional de Colombia

Medellín, Colombia

Available in: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49631663019>

- ▶ How to cite
- ▶ Complete issue
- ▶ More information about this article
- ▶ Journal's homepage in redalyc.org

# Model for a vehicle dynamics through a sequence of traffic lights

Mónica Mesa-Mazo <sup>a</sup>, Johnny Valencia-Calvo <sup>b</sup> & Gerard Olivar-Tost <sup>c</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación, Universidad Nacional de Colombia, [njmesam@unal.edu.co](mailto:njmesam@unal.edu.co)

<sup>b</sup> Departamento de Ciencias de la Computación y de la Decisión, Universidad Nacional de Colombia, [jovalenciacal@unal.edu.co](mailto:jovalenciacal@unal.edu.co)

<sup>c</sup> Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación, Universidad Nacional de Colombia, [golivart@unal.edu.co](mailto:golivart@unal.edu.co)

Received: September 3th, 2013. Received in revised form: March 17th, 2014. Accepted: May 15th, 2014

## Abstract

In this paper we present an overview of a vehicular traffic model and its simulation, this model is characterized by a single vehicle traveling through a sequence of traffic lights that turn on and off with a specific frequency. The model includes three main dynamical modes, accelerated, decelerated and null state. We will show the description of the mathematical modeling used to simulate the system. The simulation was developed under an event driven strategy and implemented in Matlab. Regarding to the numerical analysis, we built a bifurcation diagram where the parameter under variation is the cycle of traffic lights. As a principal result, we evidence the effects of the cycle of traffic lights in the dynamical behavior of the system.

**Keywords:** dynamical systems; vehicular traffic; bifurcations; chaos.

# Modelo para la dinámica de un vehículo a través de una secuencia de semáforos

## Resumen

En este trabajo se presenta una visión general y simulación de un modelo de tráfico vehicular, éste describe la dinámica de un solo vehículo que se desplaza a través de una secuencia de semáforos que se enciende y se apaga con una frecuencia específica. El modelo incluye tres modos dinámicos: acelerado, desacelerado y nulo. Además se muestra la descripción del modelo matemático utilizado para simular el sistema. La simulación se desarrolló bajo un esquema basado en eventos e implementado en Matlab. En cuanto al análisis numérico, se construyó un diagrama de bifurcación variando el ciclo del semáforo. Como principal resultado se evidencian los efectos del ciclo del semáforo en el comportamiento dinámico del sistema.

**Palabras clave:** sistema dinámico; tráfico vehicular; bifurcaciones; caos.

## 1. Introducción

De cada seis seres humanos que habitan en el planeta, tres viven en ciudades y dos de ellos pertenecen a países en desarrollo, la población urbana total se estima en 3.100 millones (1.000 millones en 1960 y 2000 en 1985), según estimaciones de las Naciones Unidas la tasa de crecimiento de la población urbana total es de 1.9 por ciento anual. El continuo crecimiento de las ciudades, origina demandas crecientes sobre la infraestructura social que permitan atender las necesidades comunes. La disponibilidad de una adecuada infraestructura de transporte urbano, que permita movilizar a personas y bienes de modo digno, económico y rápido se integra en el grupo de necesidades básicas. Este problema de movilidad es compartido por casi todas las ciudades del mundo, dado que la creciente motorización y extensión del

uso de automóvil privado genera dificultades en la movilización en las ciudades, así como costos sociales en el campo ambiental y de accidentalidad, por ejemplo a nivel mundial se estima que hacia el 2015 las zonas urbanizadas causarán el 80 por ciento de las emisiones de CO<sub>2</sub> [2].

Movilizarse en algunas ciudades no es tarea fácil, debido a que la oferta de la infraestructura no cubre las necesidades de la gran demanda hacia dicha oferta, esa desigualdad produce los efectos que están padeciendo hoy en día las ciudades. Las consecuencias más graves de la congestión vehicular son la reducción de la movilidad, el aumento del consumo de energía y de la contaminación, además de la pérdida de tiempo. Las principales causas de esta congestión son la falta de sincronización de los vehículos y la frecuencia de cambio de los semáforos [1].

Uno de los causantes de que el tráfico no esté totalmente



sincronizado, es el sistema de semaforización, por lo tanto es importante plantear estrategias basadas en la configuración de los semáforos, que permitan optimizar el tiempo de desplazamiento en la ciudad.

La población y el parque automotor en las ciudades de Colombia está en constante crecimiento y por esta razón, manejar en casi cualquier ciudad se ha convertido en un problema de grandes dimensiones. Se puede afirmar que la infraestructura vial de una ciudad debe ser directamente proporcional al tamaño de su parque automotriz, pero debido a las dificultades económicas en Colombia esto no siempre se cumple. Cuando un área urbana contiene una gran densidad vehicular, disminuye las condiciones favorables de vida en general de sus ciudadanos.

En una ciudad con problemáticas en movilidad, se aumentará el nivel de estrés de los conductores y de los peatones, además del incremento en los índices de contaminación; por ejemplo si una avenida sin intersecciones mueve  $x$  carros en un lapso de tiempo, la contaminación en promedio será proporcional a  $x$ , pero si sobre dicha avenida se construye una intersección con semáforos, por la cual cruzan igualmente  $x$  vehículos en el mismo tiempo, la contaminación en la zona no será proporcional a  $2x$ , sino mucho mayor, ya que detener los autos en los semáforos, implica mayor consumo de combustible, cada vez que un vehículo se detiene y se pone en marcha de nuevo. Por lo anterior, antes de considerar los semáforos como una solución a la movilidad, se debe también tener en cuenta que una inadecuada ubicación y/o configuración podrían acrecentar la problemática en discusión [1].

Existen diversos estudios realizados en modelación de tráfico vehicular, algunos estudios se mencionan a continuación:

En la referencia [3], Toledo construye un modelo en el cual se considera un solo vehículo moviéndose a través de una secuencia de semáforos de dos tiempos, con un período específico, la contribución más relevante de este trabajo, es que la dinámica no trivial depende de la aceleración finita y de la capacidad de frenado de los vehículos para un conjunto de parámetros. En un trabajo posterior, Toledo plantea en [4] estrategias de control, basadas en la sincronización de los semáforos, las cuales permitieron mejorar el flujo vehicular, además en este trabajo se estudió la resonancia en términos del tiempo de viaje, la velocidad y el consumo de combustible. Un resultado importante del modelo de Toledo aplicando las estrategias de control es que el comportamiento cercano a la resonancia no depende de la aceleración finita y la capacidad de frenado del vehículo. Además en este modelo determinista, se demostró que la resonancia era un comportamiento universal independiente de la geometría del sistema para el caso de la estrategia de la ola verde.

En el 2009, Varas investigó si el comportamiento universal cercano a la resonancia persiste, cuando varios carros interactúan sobre una misma vía. Para conocer el comportamiento de esta dinámica, hicieron uso de un modelo autómata celular [6].

En la referencia [7], una nueva exploración, se hace al comportamiento caótico y no trivial del modelo propuesto por Toledo, y se muestra que el comportamiento no trivial surge incluso en la región no caótica debido a la existencia de trayectorias periódicas que tienen múltiple período, esta

dinámica microscópica no puede ser observada en un modelo autómata celular tradicional. Para realizar el análisis del comportamiento caótico y de la dinámica no trivial, encontraron la región caótica, la cual se define como la región del diagrama de bifurcación donde se puede estimar un exponente de Lyapunov positivo; para caracterizar la región del modelo propuesto en Toledo, encontraron los límites de la región, en la cual ocurre el comportamiento caótico y la dinámica no trivial, calculando numéricamente los exponentes de Lyapunov. Bajo esta metodología concluyeron que cuando se incrementa la capacidad de frenado, la región caótica aumenta, y cuando se incrementa la capacidad de frenado tres veces o más que la capacidad de aceleración se obtiene caos.

Espinosa en la referencia [8] desarrollo un controlador de tráfico difuso, que dispone de un algoritmo de visión artificial, el cual contabiliza el número de automóviles presentes en imágenes, captadas por cámaras que están ubicadas estratégicamente y en respuesta, proporciona la secuencia de acciones que optimizan el flujo vehicular, haciendo que opere de manera autónoma, centralizada y eficiente. Cabe destacar, que en la aplicación del algoritmo, obtuvieron una disminución del 20 por ciento en los tiempos de retraso para cada vehículo, además de demostrar su rápida adaptabilidad y eficiencia a los cambios propios del tráfico vehicular.

Dadas las condiciones actuales de la problemática global, nace la necesidad de realizar estudios teóricos que brinden fundamentos científicos a las posibles estrategias implementadas por las entidades gubernamentales para el mejoramiento de la movilidad en las ciudades. Entonces, este documento propone modelar el comportamiento de un vehículo con base en el modelo de Toledo [3], y realizar un análisis cualitativo de la dinámica de este vehículo cuando viaja a través de una secuencia de semáforos, y de esta manera determinar la influencia de la configuración de los semáforos en la dinámica del vehículo.

Este documento se encuentra organizado de la siguiente manera, en la sección dos se encuentra la descripción del modelo matemático y el esquema de simulación utilizado, en la sección tres se muestran algunos resultados obtenidos bajo el esquema de simulación planteado y finalmente las conclusiones.

## 2. Modelado y Simulación

Para realizar este artículo y comprender el comportamiento complejo de interacción entre varios vehículos, es necesario conocer la dinámica de un solo vehículo. Por este motivo se hace uso del modelo microscópico unidimensional de tráfico vehicular de Toledo [3]. Este modelo ideal se basa en el comportamiento cinemático de un solo vehículo que viaja a través de una secuencia de  $n$  semáforos, los cuales presentan dos estados (rojo y verde) y están separados entre sí una distancia  $L_n$ .

El modelo unidimensional de Toledo [3], supone que un automóvil viaja a través de una secuencia de semáforos, como se observa en la Fig. 1, presentando los siguientes comportamientos:

Aceleración positiva  $a_+$  hasta alcanzar la velocidad de crucero o velocidad máxima  $v_{\max}$ .

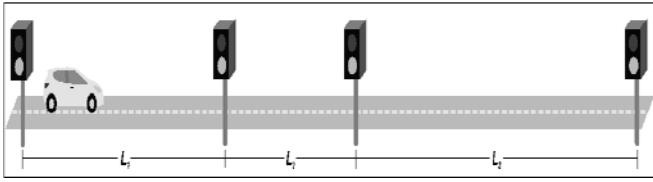


Figura 1. Secuencia de semáforos

Fuente: Los autores

- Velocidad constante  $v_{max}$ , cuando la aceleración es cero.
- Desaceleración  $-a_-$  hasta detenerse.
- Ampliando la descripción presentada por Toledo [3], se consideran dos estados más, como sigue:
- Detenido en el semáforo, cuando éste se encuentre en rojo.
- Desaceleración  $-a_-$  sin detenerse y acelerar de nuevo.

Es de notar que  $v_{max}$ ,  $a_+$  y  $a_-$  son positivas y que se utilizan  $a_+$  y  $a_-$  para denotar los estados de aceleración y desaceleración respectivamente, teniendo en cuenta que pueden presentar diferentes valores; es decir,  $a_+ \neq a_-$ .

Bajo estas condiciones, la dinámica para el automóvil se representa por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} a_+ \theta(v_{max} - v), & \text{si acelera} \\ -a_- \theta(v), & \text{si desacelera} \\ 0, & \text{si } v = 0 \text{ ó } v = v_{max} \end{cases} \quad (1)$$

Donde  $\theta(v)$  es la función de Heaviside, la cual impide que la velocidad del móvil sea superior a la máxima e inferior a cero.

$$\theta(v) = \begin{cases} 0, & \text{si } v < 0 \\ 1, & \text{si } v \geq 0 \end{cases}$$

Además se considera que el  $n$ -ésimo semáforo se encontrará en verde, si la función  $\sin(\omega n t + \phi n) > 0$ , y en rojo si  $\sin(\omega n t + \phi n) \leq 0$ , donde  $\omega n$  y  $\phi n$  son la frecuencia de cambio y el desfase del  $n$ -ésimo semáforo respectivamente. Estos parámetros controlan el flujo vehicular.

Cuando el vehículo se aproxime al  $n$ -ésimo semáforo con velocidad  $v$ , el conductor debe tomar la decisión de frenar o no, dependiendo de la señal del semáforo siguiente. Haciendo uso de la Fig. 2, se define la distancia de seguridad como  $d_s = L - d_r$ , la cual garantiza que cuando el conductor frena el auto llegue al semáforo con velocidad cero, donde  $L$  es la distancia entre dos semáforos consecutivos y  $d_r$  es la distancia recorrida que lleva el vehículo hasta que decide frenar.

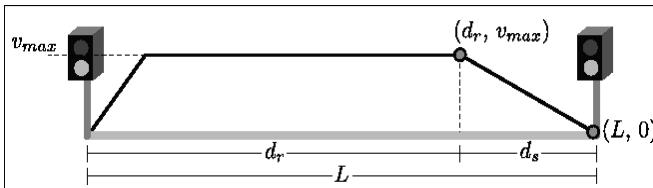


Figura 2. Comportamiento del vehículo entre dos semáforos

Fuente: Los autores

Bajo las condiciones anteriores y por (1), el móvil se desplaza sobre una trayectoria recta estando sometido a una aceleración constante o desaceleración constante. Luego, haciendo uso de las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA), se tiene:

$$d_s = \frac{v_{max}^2}{2a_-} \quad (2)$$

Obsérvese el punto  $(d_r, v_{max})$ , en la Fig. 2, que significa, que el vehículo lleva una velocidad máxima  $v_{max}$  cuando éste alcanza la posición  $d_r$ , este punto será llamado punto de seguridad. Además el punto  $(L, 0)$  indica que el vehículo tiene una velocidad nula cuando se encuentra junto al semáforo, el cual está ubicado en la posición  $L$ . Haciendo uso de estos puntos se calcula la pendiente de la recta que pasa por ellos, es decir,

$$m = \frac{-v_{max}}{L - d_r} = \frac{-v_{max}}{d_s} \quad (3)$$

Además la ecuación de dicha recta es:

$$v = m(d - L) \quad (4)$$

Donde  $v$  y  $d$  son la velocidad y la distancia del automóvil respectivamente.

Haciendo uso de las ecuaciones del MRUA se cumple que si  $\frac{v_{max}^2}{2a_+} + \frac{v_{max}^2}{2a_-} < L$  entonces el auto alcanza la velocidad máxima o crucero antes del punto de seguridad  $(d_r, v_{max})$ .

Además, con el propósito de que el semáforo no commute tan rápido debe cumplirse que el período o ciclo del semáforo satisaga la desigualdad:

$$\frac{2\pi}{\omega_n} > \max\left(\frac{v_{max}}{a_+}, \frac{v_{max}}{a_-}\right) \quad (5)$$

## 2.1. Normalización del modelo

Con base en los trabajos de Toledo [3] y Villalobos [7], el primer propósito es comprender el comportamiento de un vehículo cuando se considera que todos los semáforos presentan distancias fijas, y tienen la misma frecuencia de cambio con un desfase nulo; es decir,  $L_n = L$ ,  $\omega n = \omega$ ,  $\phi = 0$  respectivamente.

Tabla 1. Variables normalizadas

Velocidad	$u = \frac{v}{v_{max}}$
Distancia	$y = \frac{d}{L}$
Tiempo	$\tau = \frac{t}{T_c}$
Tiempo crucero	$T_c = \frac{L}{v_{max}}$

Fuente: Los autores

Para alcanzar dicho propósito, es necesario realizar la normalización del modelo de la sección anterior, con el fin de facilitar los cálculos. Para encontrar una versión normalizada del modelo presentado en (1), se definen las variables normalizadas de la siguiente manera: haciendo uso de las nuevas variables presentadas en la Tabla (1) se obtiene el modelo normalizado que se muestra en (6).

$$\frac{du}{d\tau} = \begin{cases} A_+ \theta(1-u), & \text{si acelera} \\ -A_- \theta(u), & \text{si desacelera} \\ 0, & \text{si } u \text{ nula o máxima} \end{cases} \quad (6)$$

Donde  $\theta(u)$  es la función de Heaviside y

$$A_+ = \frac{a_+ L}{v_{max}^2}, \quad A_- = \frac{a_- L}{v_{max}^2} \quad (7)$$

Usando las desigualdades de la sección anterior, se tiene que:

$$\text{Si } \frac{v_{max}^2}{2a_+} + \frac{v_{max}^2}{2a_-} < L, \text{ donde } \frac{v_{max}^2}{2a_+} = \frac{L}{2a_+} \text{ y } \frac{v_{max}^2}{2a_-} = \frac{L}{2a_-} \text{ entonces } \frac{1}{A_+} + \frac{1}{A_-} < 2. \text{ Además si } \frac{2\pi}{\omega_n} > \max\left(\frac{v_{max}}{a_+}, \frac{v_{max}}{a_-}\right), \text{ donde } \frac{v_{max}}{a_+} = \frac{L}{A_+ v_{max}} \text{ y } \frac{v_{max}}{a_-} = \frac{L}{A_- v_{max}}, \text{ entonces } \frac{2\pi}{\omega_n T_c} > \max\left(\frac{1}{A_+}, \frac{1}{A_-}\right).$$

Por lo tanto, al cumplirse las desigualdades anteriores se tiene que el automóvil alcanzará la velocidad máxima  $u = 1$  antes del punto de seguridad y los semáforos no comutarán rápido.

Además, se considera que el  $n$ -ésimo semáforo cumple las siguientes condiciones:

Se encontrará en verde, si la función  $\sin(T_{sn}\tau + \phi) > 0$ . Se encontrará en rojo, si  $\sin(T_{sn}\tau + \phi) \leq 0$ . Donde  $T_{sn} = \omega_n T_c$ , es el ciclo normalizado del  $n$ -ésimo semáforo y  $\omega_n = 2\pi T_n$ , siendo  $T_n$  el ciclo del  $n$ -ésimo semáforo. Es importante, resaltar la importancia de la ecuación:  $T_n = 2\pi L / T_{sn} v_{max}$ , la cual permitirá obtener el ciclo del  $n$ -ésimo semáforo en unidades de tiempo.

## 2.2. Descripción de cada estado del vehículo

Como se ha visto en (6), en el modelo se presentan tres situaciones, las cuales dependen de la aceleración; es decir, estado acelerado, estado nulo con velocidad nula ó velocidad máxima y estado desacelerado.

Para realizar una descripción adecuada de cada evento o estado, partiendo de (6), se realiza un cambio de variable, representando el sistema en variables de estado  $x_1 = y$  y  $x_2 = u$  donde  $y$  y  $u$  son la posición y la velocidad normalizadas del vehículo respectivamente en un tiempo  $\tau$ . De esta manera se define el siguiente sistema, que va a cambiar dependiendo de qué condiciones se cumplan.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A \end{cases} \quad (8)$$

La constante  $A$  se encontrará en términos de la aceleración, como lo indica (7), la cual cambiará dependiendo en qué estado se encuentre el vehículo. Haciendo uso del sistema (8), se tiene que cada estado dinámico puede expresarse de la siguiente manera.

### 2.2.1. Estado acelerado

Este estado se da cuando el conductor aumenta su velocidad de forma constante; es decir, el automóvil tiene una aceleración constante y positiva hasta que alcanza la velocidad máxima permitida sobre la vía. De esta manera el sistema queda como sigue:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A_+ \theta(1 - x_2) \end{cases} \quad (9)$$

### 2.2.2. Estado nulo

Este modo se puede presentar en dos situaciones; la primera, cuando el vehículo alcanza la velocidad máxima permitida en la vía. Por esta razón se debe mantener en esta velocidad; es decir, que su aceleración es nula. Luego el sistema de ecuaciones queda determinado así:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

El segundo caso es cuando el vehículo se encuentra en reposo en la posición de un semáforo, esperando a que éste cambie a verde. Bajo estas condiciones se tiene que la representación en el espacio de estados está dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

### 2.2.3. Estado desacelerado

Cuando la evolución del sistema esté en modo desacelerado, es porque el vehículo se ve forzado a disminuir su velocidad de forma constante, debido a que el semáforo se encuentra en rojo. Es decir, el vehículo presenta una aceleración negativa. Luego las ecuaciones asociadas a este estado son:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -A_- \theta(1 - x_2) \end{cases} \quad (12)$$

## 2.3. Esquema numérico

Las principales estrategias para integración numérica de soluciones de sistemas con las características anteriores son los esquemas basados en eventos [5] y los de paso de tiempo fijo. El primero se basa en una formulación híbrida, mientras que el segundo se inspira en la solución de problemas con

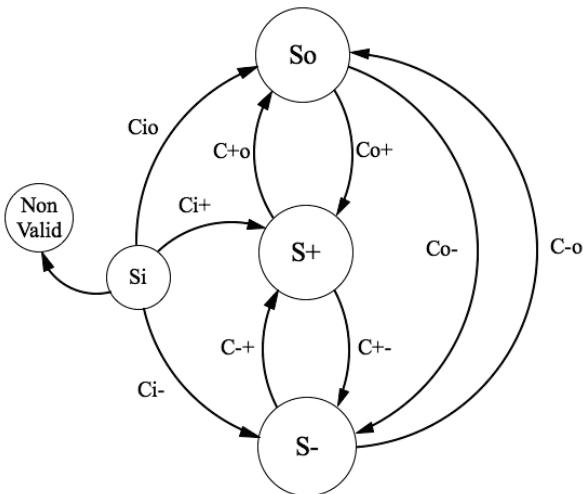


Figura 3. Diagrama de transición de estados  
Fuente: Los autores

Tabla 2.  
Estados

Estado inicial	$S_i$
Estado nulo	$S_o$ : cuando la velocidad es cero.
	$S_o$ : cuando la velocidad es máxima.
Estado acelerado	$S_+$
Estado desacelerado	$S_-$
Condición no valida	<i>Non valid</i>

Fuente: Los autores

variables complementarias. Para el esquema basado en eventos, bajo el cual se realiza la integración numérica para este caso de estudio, se tienen tres estados dinámicos principales. A continuación se muestra la descripción del algoritmo y las condiciones necesarias que se tienen en cuenta para simular el sistema. En la Fig. 3 se muestra una descripción del diagrama de transición de estados DTE.

Donde cada estado se denota como en la Tabla 2.

Además se expresan las condiciones de cambio como  $C_{kj}$ , donde k y j representan las transiciones entre estados, las cuales se encuentran usando (4) y Fig. (3).

### 3. Resultados

En esta sección se mostrarán una serie de simulaciones numéricas del modelo normalizado (6), suponiendo que todos los semáforos tienen la misma frecuencia de cambio, es decir  $\omega_n = \omega$ , de esta manera todos los semáforos tienen el mismo ciclo normalizado, es decir,  $T_{sn} = T_s$ . Con el propósito de describir y entender la dinámica de un vehículo cuando  $T_s$ , ciclo normalizado del semáforo, va variando y los demás parámetros son fijos. Estos valores fueron tomados de fuentes secundarias [9] y son mostrados en la siguiente tabla.

Tabla 3.  
Variables y parámetros

Frecuencia de cambio	$\omega = \frac{2\pi}{T_s}$
Desfase	$\varphi_n = 0$
Distancia entre semáforos	$L = 200m$
Velocidad máxima	$v_{max} = \frac{14m}{s}$
Aceleración positiva	$a_+ = \frac{2m}{s^2}$
Aceleración negativa	$a_- = \frac{6m}{s^2}$

De la ecuación (7) y usando los valores de la Tabla (3) se tiene que  $A_+ = 100/49$  y  $A_- = 300/49$ .

En la Fig. 4 se tiene como parámetro de bifurcación el ciclo normalizado  $T_s$  del semáforo el cual se grafica a lo largo del eje horizontal y, en el eje vertical, se muestra la posición del automóvil en los diferentes ciclos del semáforo. En este diagrama se observan diferentes fenómenos, que indican la riqueza dinámica del sistema; tales como fractalidad, períodos múltiples, doblamientos de período, caos, entre otros.

En la Fig. 4, cuando  $T_s$  toma valores entre 0.7 y 1 se observan unas líneas que se van acumulando a medida que  $T_s$  se acerca al valor de uno, y se observan múltiples períodos. Luego, cuando  $T_s$  va incrementándose presenta un doblamiento de período hacia el caos, donde este comportamiento caótico es truncado y aparece nuevamente una órbita de período dos y finalmente una órbita de período uno.

La Fig. 5 se obtuvieron cuando el ciclo normalizado es  $T_s = 1.4$  y usando  $T_s = 2\pi L/v_{max}$  se obtiene el ciclo de los semáforos el cual es  $T \approx 64.11\text{seg}$ , el cual indica que el semáforo se encontrará 32,05seg en verde y 32,05seg en rojo.

En la parte a) de la Fig. 5 se encuentra el retrato de fase de la velocidad normalizada vs la posición normalizada del automóvil, cuando el ciclo del semáforo es  $T_s = 1.4$ . La interpretación de este retrato se debe hacer en contra de las manecillas del reloj, donde la velocidad del vehículo se grafica a lo largo del eje horizontal y, la posición, en el eje vertical. La Fig. 5 b) muestra la evolución en el tiempo de las variables de estado donde la velocidad normalizada se representa con la línea continua gruesa, la posición normalizada con la línea discontinua y la señal del semáforo con la línea continua delgada, además los círculos indican la posición del vehículo en el instante que el semáforo cambia de verde a rojo.

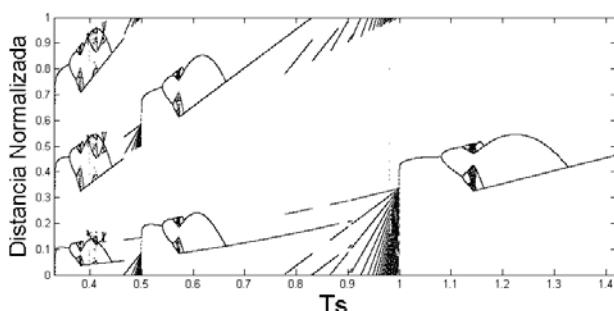


Figura 4. Diagrama de bifurcación  
Fuente: Los autores

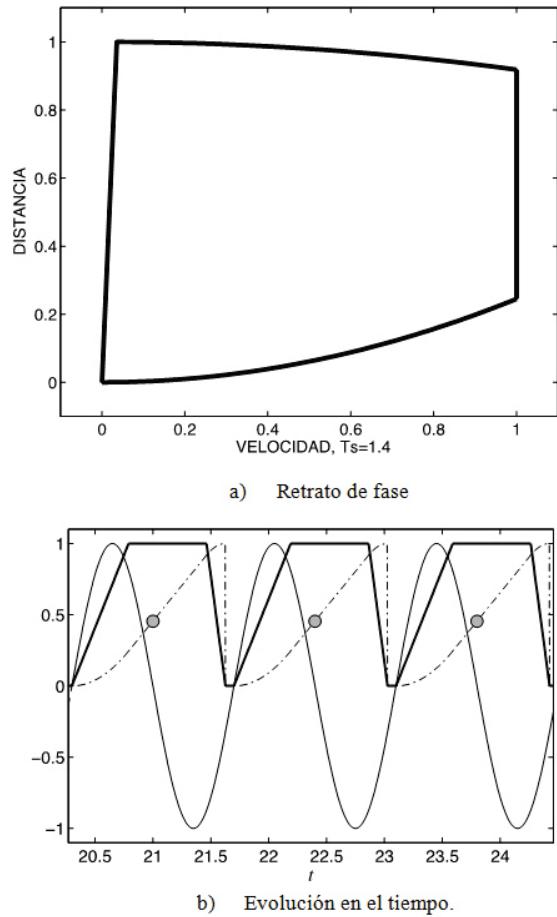


Figura 5.  $T_s = 1.4$   
Fuente: Los autores

Comparando el diagrama de bifurcación de la Fig. 4 con la Fig. 5, se tiene que cuando  $T_s = 1.4$  se observa una órbita de período uno. En la Fig. 5 parte b), con ayuda del círculo, se visualiza la posición normalizada del vehículo en el instante que el semáforo comienza. Importante destacar, que la posición siempre es la misma en cada semáforo. En el retrato de fase se observa un ciclo límite, donde la trayectoria se cierra en el trayecto de viaje de un semáforo a otro.

Al ubicarse en la condición  $X_0 = (0, 0)$  en el retrato de fase Fig. 5 parte a) se tiene que el vehículo se encuentra justo en el semáforo con velocidad normalizada  $x_2 = 0$  y posición normalizada  $x_1 = 0$ . Luego, la posición se va incrementando a medida que la velocidad alcanza su valor máximo  $x_2 = 1$ . Un comportamiento similar se presenta en la Fig. 5 parte b), el vehículo se encuentra con velocidad  $x_2 = 0$  y posición  $x_1 = 0$ . En el instante en que el semáforo pasa a verde, el auto inicia su recorrido. A medida que el tiempo se va incrementando, la velocidad y la posición lo hacen también, hasta alcanzar el valor máximo de la velocidad. Esta variable de estado permanece en este valor máximo durante determinado tiempo mientras la posición va aumentando; este último comportamiento se observa en el segmento de recta vertical del retrato de fase debido a que

la coordenada en el eje horizontal permanece fija en  $x_2 = 1$ .

Continuando con el recorrido en la Fig. 5 parte a) la velocidad empieza a disminuir mientras que la posición se approxima a su valor máximo  $x_1 = 1$ .

Esto indica que el vehículo se está acercando al semáforo siguiente, pero la velocidad decrece rápidamente a cero lo cual muestra que ha llegado al semáforo y se encuentra en rojo. En el esquema de evolución temporal se aprecia un comportamiento similar debido a que el vehículo disminuye su velocidad ya que la función  $\sin(T_s\tau + \phi) < 0$ . Pero el auto se ve forzado a detenerse porque el semáforo permanece en rojo y por esa razón la posición decrece rápidamente del valor máximo al valor mínimo indicando que el auto se encuentra en un nuevo semáforo. Lo anterior confirma la existencia de la órbita periódica para el parámetro de bifurcación en  $T_s = 1.4$ . Además, se aprecia, en el retrato de fase, que la trayectoria se cierra en un solo período como lo ilustra la Fig. 5 parte b).

De manera similar que al caso anterior se hará una comparación entre el diagrama de bifurcación de la Fig. 4 y la Fig. 6. En la Fig. 4, cuando el ciclo del semáforo toma el valor de  $T_s = 1.2$ , se tiene que el ciclo de todos los semáforos es de  $T \approx 74,798$  seg, para este valor del parámetro se observa una órbita de período dos. En la Fig. 6, los círculos muestran la posición del vehículo en el instante en que el semáforo cambia de verde a rojo, y ésta coincide cada dos semáforos, lo cual es una evidencia de la existencia de la órbita de período dos. Además se aprecia que el vehículo inicia su recorrido hasta alcanzar la velocidad máxima permitida como lo ilustra la línea continua gruesa, permanece en ese estado durante un tiempo, después se ve forzado a disminuir la velocidad debido a que el semáforo está en rojo, y el automóvil está próximo al semáforo dado que la línea discontinua, que es la posición, se está aproximando a su valor máximo. Pero este comportamiento es interrumpido debido a que el semáforo comienza y por esa razón el conductor acelera de nuevo hasta alcanzar la velocidad máxima. Un comportamiento similar ocurre al acercarse al siguiente semáforo pero aquí sí se ve forzado a detenerse, dado que el vehículo alcanzó el semáforo y éste continuaba en rojo.

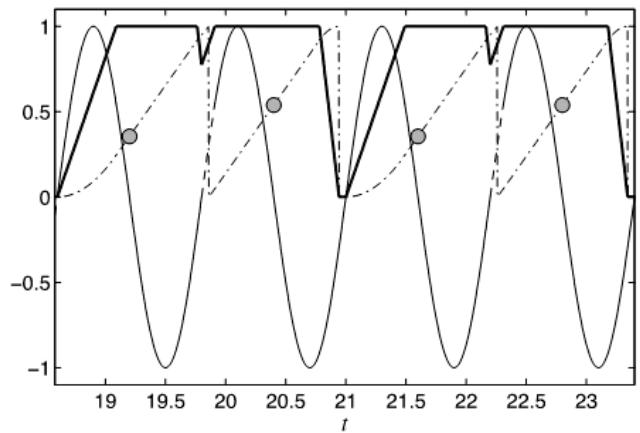


Figura 6. Evolución en el tiempo para  $T_s = 1.2$   
Fuente: Los autores

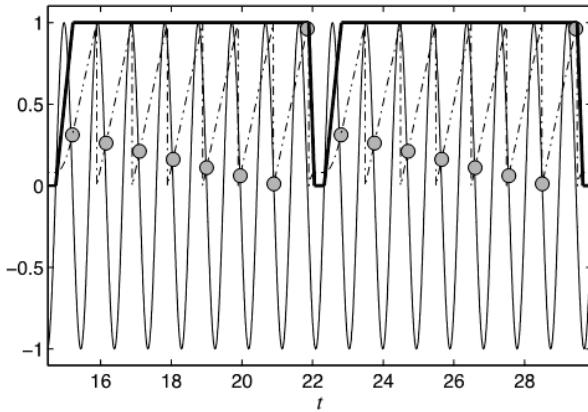


Figura 7. Evolución en el tiempo para  $T_s = 0.95$

Fuente: Los autores

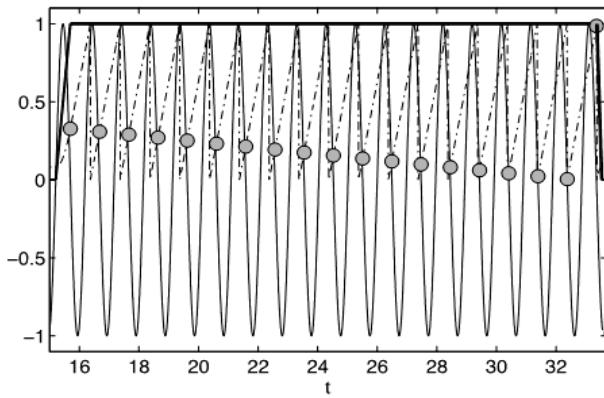


Figura 8. Evolución en el tiempo para  $T_s = 0.981$

Fuente: Los autores

Al observar las Fig. 7 y Fig. 8, se aprecia el incremento del período a medida que el ciclo normalizado del semáforo  $T_s$  se aproxima a uno. Y se observa que entre más cercano sea  $T_s$  a uno el vehículo logra pasar más semáforos en verde con su velocidad máxima, permitiendo que el tiempo de viaje a través de la secuencia de semáforos sea menor.

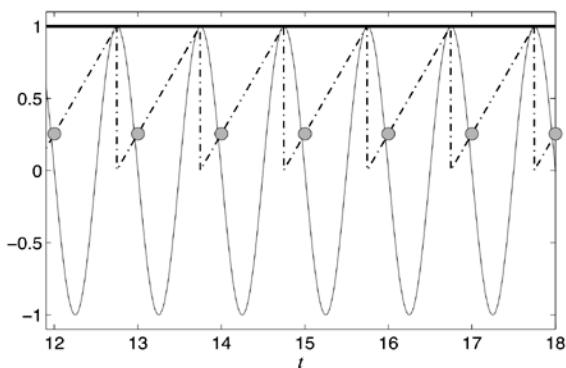


Figura 9. Evolución en el tiempo para  $T_s = 1.0$

Fuente: Los autores

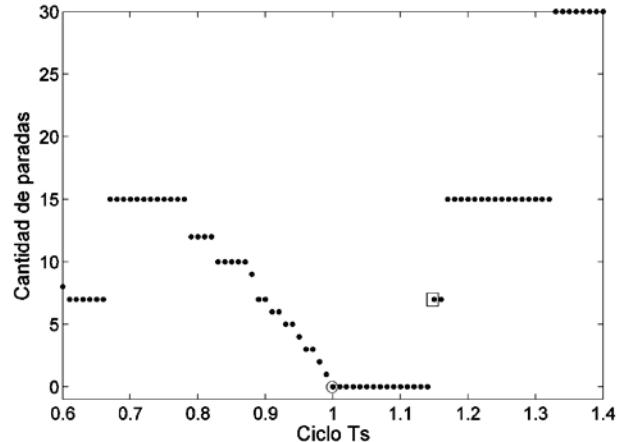


Figura 10. Cantidad de paradas del vehículo variando  $T_s$

Fuente: Los autores

En la Fig. 9, cuando  $T_s = 1.0$ , se observa que casi todo el tiempo el vehículo mantiene su velocidad máxima y logra cruzar todos los semáforos en verde, este comportamiento es conocido como ola verde.

La pregunta que surge ahora es: ¿Para qué valores del ciclo del semáforo  $T_s$  el vehículo se detiene el menor número de veces en las intersecciones?

En la Fig. 10 se grafica a lo largo del eje horizontal el ciclo normalizado del semáforo y en el eje vertical se muestra el número de paradas del automóvil durante todo el recorrido; esta gráfica permite dar respuesta a la pregunta anterior.

Por ejemplo, el rectángulo indica que cuando el ciclo normalizado del semáforo es  $T_s = 1.17$ , el vehículo se detiene ocho veces durante el recorrido a través de la vía. Además al observar el círculo en el punto  $(1,0)$ , se evidencia que el vehículo no se detuvo durante el recorrido, confirmando así, el resultado que se obtuvo en la Fig. 9.

#### 4. Conclusiones

Se ha presentado un esquema de modelado y simulación para un sistema de tráfico. Para simular este sistema es necesario conocer las ecuaciones que describen su flujo en cada estado y las condiciones en las fronteras de transición entre los estados dinámicos. Con esta información y los diagramas de bifurcación, es posible simular un amplio rango de fenómenos que este tipo de sistemas exhiben. Ejemplo de ello son los comportamientos periódicos, bifurcaciones suaves y no suaves e incluso caos que se reflejan en el diagrama de bifurcación.

Desde el punto de vista de la teoría de bifurcaciones, los resultados presentados en este documento son una herramienta útil para mejorar el modelo, de manera que, en trabajos futuros se desarrollen estrategias de control con el propósito de alcanzar dinámicas específicas como la ola verde.

Se eligió un marco adecuado para modelar y simular el sistema. En donde, el ciclo del semáforo es un parámetro importante como se evidencia en el diagrama de bifurcación. Por lo anterior, cuando el ciclo del semáforo es

próximo a uno, la ola verde aparece, de esta manera el tiempo de viaje es menor, dado que logra recorrer toda la secuencia de semáforos en verde. De esta manera es posible implementar estrategias de optimización basadas en el ciclo del semáforo.

Los beneficios para el sistema de tráfico vehicular que se discutieron en este documento, inicialmente, son la reducción en el tiempo de viaje debido a la configuración de los semáforos, bajo la condición de un ciclo de semáforo que minimice el número de paradas en un trayecto y, en investigaciones futuras, estudiar los efectos de posibles combinaciones entre los valores de los parámetros que definen el sistema.

## Referencias

- [1] Jaramillo, D., Simulación y control de tráfico vehicular por semaforización, Tesis de Grado, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia, 2005.
  - [2] Lupano, R.J., Políticas de movilidad urbana e infraestructura urbana de transporte, Publicación de las Naciones Unidas, 2009.
  - [3] Toledo, B.A., Muñoz V., Rogan, J., Tenreiro, C. and Valdivia, J.A, Modeling traffic through a sequence of traffic lights, *Physical Review*, 70 (1), 2004.
  - [4] Toledo, B.A., Cerda E., Rogan, J., Muñoz, V., Tenreiro, R., Zarama, and Valdivia. J., Universal and nonuniversal features in a model of city traffic, *Physical Review* 75 (2), 2007.
  - [5] Valencia, J. and Osorio, G., Nonlinear numerical analysis of a cam-follower impacting system, *Circuits and Systems (LASCAS)*, IEEE Second Latin American Symposium, 2011, pp.1-4.
  - [6] Varas, A., Cornejo, M., Toledo, B., Muñoz, V. Rogan, J., Zarama, R. and Valdivia, J., Resonance, criticality, and emergence in city traffic investigated in cellular automaton models: *Physical Review*, 80 (5) 2009.
  - [7] Villalobos, J., Toledo, B., Pastén, D., Muñoz, V., Rogan, J., Zarama, R., Lammoglia N. and Valdivia, J., Characterization of the nontrivial and chaotic behavior that occurs in a simple city traffic model: American Institute Physics 2010.
  - [8] Espinosa, F.A., Gordillo, C.A., Jiménez, R. y Aviles O.F, Machine vision algorithms applied to dynamic traffic light control, *DYNA* 80 (178), pp. 132-140, 2013.
  - [9] Villalobos, J., Chaos in transit systems, Tesis de Doctorado Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 2010.
- M.J. Mesa-Mazo**, recibió el título de Matemática por la Universidad del Cauca en 2007. A partir de enero de 2007 se convirtió en estudiante de Maestría en Biomatemáticas en la Universidad del Quindío, desarrollo un proyecto de investigación sobre Efectos de la difusión de un contaminante en la dinámica y la dispersión poblacionales en un medio acuático: Modelado y aproximación. Desde 2008 se vinculó a la Universidad del Quindío, donde actualmente trabaja como profesora ocasional de tiempo completo. Actualmente se desempeña como estudiante de doctorado en la Universidad Nacional de Colombia, vinculada al grupo de investigación - Percepción y Control Inteligente PCI, bajo la dirección del Doctor Gerard Olivar Tost, desarrollando temas de investigación relacionados con sistemas de tráfico vehicular. Su experiencia en investigación la ha llevado a involucrarse en temas relacionados con el análisis dinámico y métodos numéricos, con especial atención en el modelado, simulación y experimentación.
- J. Valencia-Calvo**, en Marzo de 2010 recibió su grado en Ing. Electrónica. Desde Agosto de 2009 se encuentra vinculado al grupo de investigación - Percepción y Control Inteligente PCI, de la Universidad Nacional de Colombia. A partir de enero de 2010, se convirtió en estudiante Maestría en Automatización Industrial en la misma universidad y desarrollo un proyecto de investigación sobre la bifurcación por impacto con esquina en el sistema leva seguidor. Actualmente se desempeña como estudiante de doctorado en la Universidad Nacional de Colombia, parte del grupo de trabajo académico "Sistemas e Informática", bajo la dirección del Doctor Carlos Jaime Franco y el Doctor Gerard Olivar Tost, desarrollando temas de investigación relacionados con mercados eléctricos. Su experiencia en investigación lo ha llevado a involucrarse en temas relacionados con el análisis dinámico, dinámica no lineal y la dinámica de sistemas, con especial atención en el modelado, simulación y aplicaciones de la matemática en ingeniería.  
ORCID: 0000-0003-1821-2039
- G. Olivar**, recibió el título de Matemático por la Universitat de Barcelona, España en 1987 y de Doctor en Ciencias – Matemáticas por la Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España; en 1997 (Cum Laude). Desde 1987 hasta 2005 estuvo adscrito al Departamento de Matemática Aplicada IV en la Universitat Politècnica de Catalunya, donde se desempeñó como Profesor Titular. Desde 2005 se vinculó a la Universidad Nacional de Colombia, donde actualmente trabaja como Profesor Titular. Sus temas de interés se encuentran en la Ingeniería Matemática y la Matemática Aplicada. Concretamente, en las aplicaciones a la ciencia y la ingeniería del modelado y la simulación, la dinámica no lineal y los sistemas complejos. Desde 2011 ostenta la Presidencia de la Sección Colombiana de la SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics).  
ORCID: 0000-0003-1862-4842