



Economía y Sociedad

ISSN: 1870-414X

economíaysociedad@fevaq.net

Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
México

Hernández Bautista, Oscar Iván; Venegas Martínez, Francisco
Contienda entre dos partidos políticos racionales. Un enfoque de juegos diferenciales
estocásticos
Economía y Sociedad, vol. XXI, núm. 36, enero-junio, 2017, pp. 111-126
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Morelia, México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=51052064007>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

redalyc.org

Sistema de Información Científica
Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Contienda entre dos partidos políticos racionales

Un enfoque de juegos diferenciales estocásticos

Hernández Bautista Oscar Iván

Escuela Superior Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional
hboivan@yahoo.com.mx

Venegas Martínez Francisco

Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional
fvenegas1111@yahoo.com.mx

Resumen

El presente trabajo examina el efecto del gasto en promoción política de los partidos en su consolidación y prestigio a través de un juego diferencial estocástico en el marco del equilibrio general. Para lograr dicho objetivo se desarrolla un modelo dinámico de dos partidos políticos que contienden en un ambiente de incertidumbre. Asimismo, el modelo permite analizar la dinámica de los recursos utilizados en el arraigo, reputación e imagen de los partidos ante los electores, lo cual, a su vez, conlleva a un incremento en votos y a un mayor nivel de recursos federales asignados. Por último, es importante destacar que en el enfoque propuesto, las funciones de reacción entre los dos partidos se moverán en función de la sensibilidad de los electores en las campañas en medios.

Fecha de recepción:

24/12/2016

Fecha de aprobación:

07/04/2107

Los autores agradecen la revisión y sugerencias de dos dictaminadores anónimos. Cualquier error u omisión es responsabilidad exclusiva del autor.

Clasificación JEL: C73, D50, D72.

Palabras clave: Teoría de juegos, equilibrio general, competencia entre partidos políticos, juegos diferenciales estocásticos.

1. Introducción

La relación entre mayor gasto en campañas electorales y mejores resultados es un cuestionamiento de importancia actual. Por ejemplo, los trabajos de Morales-Barrientos (2007), Payne (1991), Jacobson (1978) y Green y Krasno (1988) proponen modelos teóricos y/o estudios empíricos para dar respuesta a esta interrogante. No obstante, hay muchos hechos estilizados sobre la racionalidad de los partidos y la sensibilidad de los votantes a los medios de la comunicación que dichos enfoques teóricos o prácticos no han podido explicar de manera aceptable este comportamiento. Esta investigación se concentra en el sistema político mexicano e intenta desarrollar un modelo de agentes racionales que toman decisiones en tiempo continuo en un ambiente de incertidumbre que atienda todos los aspectos antes mencionados.

Si bien, el sistema político mexicano está conformado por más de dos partidos políticos, el modelo que se propone parte del supuesto de que sólo existen dos; en el caso de varios partidos políticos sólo se estarían considerando los dos más destacados en las preferencias de los votantes. Así entonces, por simplicidad en el modelo analítico que se desarrollará se estudian sólo dos partidos que compiten entre sí para ganar elecciones y con ello tener un mejor posicionamiento político. Uno de los partidos políticos que se analizan se denotará como partido A y éste incrementa su utilidad cuando aumentan sus recursos y cuando mejora su posicionamiento en el sistema político. Esto se logra, en parte, con gasto en promoción política para atraer votos al competir contra el partido rival B . La utilidad del partido A también está en función de los recursos con que cuente el partido rival B , ya que un incremento de los recursos de B hace que disminuya la utilidad de A al sentirse amenazado por contar con menores recursos, lo cual podría menguar su posicionamiento político. Consideraciones similares se hacen para el partido B . El presupuesto total que se reparte entre los dos partidos puede ir cambiando con el tiempo. En el modelo propuesto este supuesto se describe con mayor precisión.

La literatura existente sobre el tema es escasa y para el caso de México todavía lo es más. De los pocos trabajos que han estudiado el tema, algunos autores han analizado los efectos en gastos de campaña en los resultados electorales. Por ejemplo, Jacobson (1978) encuentra que los candidatos a la cámara de representantes en los Estados Unidos de Norteamérica que incrementan su gasto en campaña no siempre obtienen resultados electorales favorables. De igual forma, Green y Krasno (1988) encuentran que el gasto en campaña podría tener un efecto limitado sobre los resultados electorales. Estos autores tratan de indagar si existe una relación con los gastos de campaña y los resultados electorales, primero a través de un modelo teórico y después con un análisis empírico. Al respecto, para el caso mexicano, en el Cuadro 1 y la Gráfica 1, se compara

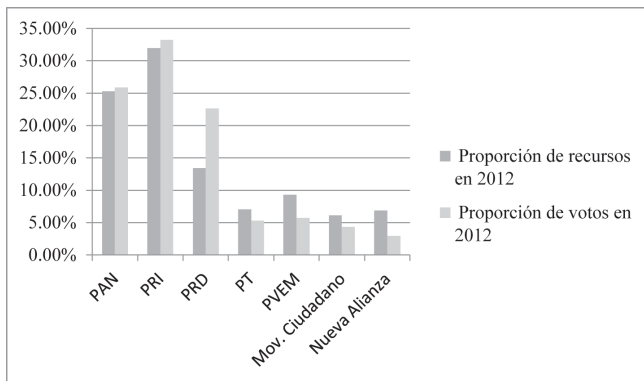
el nivel de gasto en campaña y los resultados electorales en 2012 y se observa cierta relación positiva entre dichas variables.

Cuadro 1. Presupuesto en precios corrientes a gastos de campaña y la relación porcentual de votos y recursos asignados para la elección presidencial de 2012

Partido político	Presupuesto de campaña 2012	Proporción de recursos en 2012	Proporción de votos en 2012
PAN	\$424,784,163.94	25.28%	25.89%
PRI	\$537,269,854.03	31.97%	33.25%
PRD	\$225,745,363.72	13.43%	22.61%
PT	\$118,098,139.85	7.03%	5.28%
PVEM	\$156,507,101.22	9.31%	5.70%
Mov. Ciudadano	\$103,060,128.93	6.13%	4.33%
Nueva Alianza	\$115,095,669.09	6.85%	2.94%
TOTAL	\$1,680 560,420.78		

Fuente: Elaboración propia con datos del INE

Gráfica 1. Relación porcentual de votos y recursos asignados en la elección presidencial de 2012



Fuente: Elaboración propia con datos del INE

De acuerdo con Payne (1991), los gastos de campaña electorales tienen efectos en los resultados de la votación. En la teoría electoral del gasto de Payne (1991) se establecen tres ideas fundamentales: primero, que los votantes están reflejando su propio interés racional votando por los representantes que más gastan; segundo, los votantes están mal informados y son irracionales dejando que las elecciones sean dominadas por los votantes de especial interés; y, tercero, las donaciones y los gastos de campaña

son la clave del éxito. Desde la óptica de Payne (1991) se tiene que los que gastan más obtienen mayores beneficios electorales y que, en la competencia electoral, el miedo al fracaso fuerza a los representantes a gastar más, incluso, de lo que ellos mismos creían necesario. Al respecto, es importante mencionar que Morales-Barrientos (2007) y Green y Krasno (1988) encuentran que no existe evidencia empírica que sustente una relación directa entre gasto de campaña y triunfo electoral para el periodo 1997-2003.

A partir de los últimos procesos electorales en México se observa la relevancia que existe en el gasto de campaña y el tiempo que se destina en radio y televisión. El 25.3% de los gastos de campaña en 1994 se destinó a la compra de tiempos en radio y televisión, este rubro creció a 55% en el año electoral 1997, una cifra similar (54.3%) se registró en 2000, En 2006, los datos del INE permiten identificar que el 95% del financiamiento público a los partidos se destinó a la compra de espacios en medios electrónicos. En el cuadro 2 se muestra el financiamiento para gastos de campaña en la elección de 2012 por partido y la cantidad de votos que se obtuvieron.

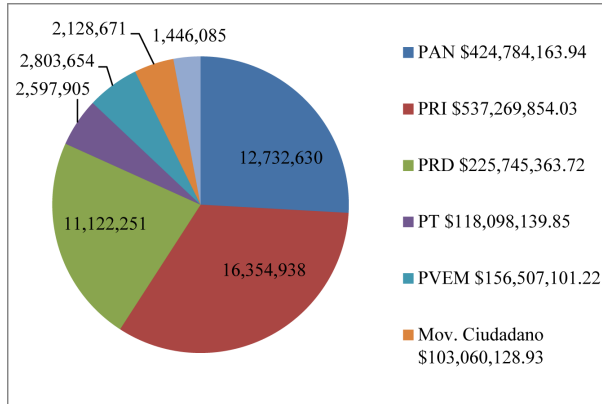
Cuadro 2. Relación de presupuesto para gasto de campaña y la cantidad total de votos para la elección presidencial de 2012

Partido político	Presupuesto de campaña 2012	Número de votos en 2012
PAN	\$424,784,163.94	12,732,630
PRI	\$537,269,854.03	16,354,938
PRD	\$225,745,363.72	11,122,251
PT	\$118,098,139.85	2,597,905
PVEM	\$156,507,101.22	2,803,654
Mov. Ciudadano	\$103,060,128.93	2,128,671
Nueva Alianza	\$115,095,669.09	1,446,085
TOTAL	\$1,680,560,420.78	49,186,134

Fuente: Elaboración propia con datos del INE

En el Gráfica 2 se puede observar que el partido con mayores recursos para la campaña fue el que ganó la elección también fue el que tuvo mayores tiempos en radio y televisión, como se muestra en el Cuadro 3 y la Gráfica 3. En la gráfica 3 se observa que la mayor cantidad de tiempos en radio y televisión fue uno de los factores que incidieron en los resultados electorales de 2012.

Gráfica 2. Cantidad de votos por partido y presupuesto asignado para la elección presidencial de 2012



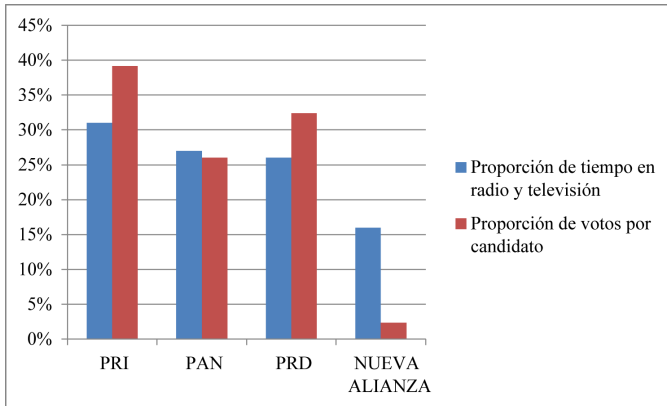
Fuente: Elaboración propia con datos del INE

Cuadro 3. Proporción de tiempos en radio y televisión para la elección presidencial 2012

Candidato presidencial en 2012	Proporción de tiempo en radio y televisión	Proporción de votos por candidato	Número de votos por candidato
PRI	31%	39.19%	19,158,592
PAN	27%	26.05%	12,732,630
PRD	26%	32.42%	15,848,827
Nueva Alianza	16%	2.34%	1,146,085
TOTAL			48,886,134

Fuente: Elaboración Propia con datos del IFE

Gráfica 3. Tiempos de radio y televisión para la elección presidencial 2012



Fuente: Elaboración propia con datos del INE

La información de la contienda electoral de 2012, en la Gráfica 3, muestra que al menos para esa elección, el presupuesto para gastos de campaña y el tiempo en radio y televisión sí fueron relevantes. En el Cuadro 4 se muestra información sobre gastos de campaña en las elecciones federales de 2009.

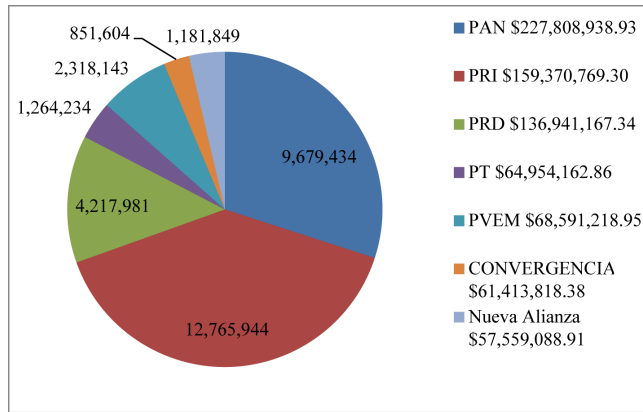
Cuadro 4. Gasto de campaña para las elecciones 2009 (pesos corrientes)

Partido político	Gasto de campaña 2009	Cantidad de votos 2009	Proporción de recursos en 2009	Proporción de votos en votos 2009
PAN	\$227,808,938.93	9,679,434	27.80%	29.99%
PRI	\$159,370,769.30	12,765,944	19.45%	39.55%
PRD	\$136,941,167.34	4,217,981	16.71%	13.07%
PT	\$64,954,162.86	1,264,234	7.93%	3.92%
PVEM	\$68,591,218.95	2,318,143	8.37%	7.18%
Convergencia	\$61,413,818.38	851,604	7.49%	2.64%
Nueva Alianza	\$57,559,088.91	1,181,849	7.02%	3.66%
Partido Socialdemócrata	\$42,849,711.64		5.23%	
TOTAL	\$819,488,876.31	32,279,189		

Fuente: Elaboración propia con datos del INE

En la Gráfica 4 se observa que no es el partido con mayor presupuesto el que obtiene mayores votos, pero sí es el segundo partido con mayor presupuesto de campaña quien obtiene una mayor cantidad de votos ya que, aun cuando su presupuesto fue menor, su gasto en campañas en medios electrónicos fue mayor.

Gráfica 4. Cantidad de votos por partido y presupuesto asignado para la elección presidencial de 2009 (pesos corrientes)



Fuente: Elaboración propia con datos del INE

Para la elección de 2006 no es tampoco el partido con mayor presupuesto el que obtiene la mayor cantidad de votos; sin embargo, es importante mencionar que la diferencia entre votos del primer y segundo lugar es relativamente pequeña, apenas superior a medio punto porcentual, no así los presupuestos de campaña, ya que el presupuesto asignado a quien ganó la elección fue casi el doble a la del segundo lugar, pero de acuerdo con el cuadro 7 el segundo lugar tuvo ocho puntos porcentuales más en radio y televisión con respecto de quien ganó la elección, lo cual explica en cierta medida que a pesar de la desventaja en presupuesto de campaña pudo cerrar la brecha en las votaciones con más tiempo en radio y televisión. Sin embargo, no se puede aseverar que este factor fue el único que influyó en el resultado, pero sin duda fue un aspecto relevante. En los cuadros 5 y 6 se observa que son varios los factores que podrían explicar los resultados de una elección: el presupuesto asignado a partidos, el gasto de campaña, y los tiempos en radio y televisión. Por supuesto, estos factores no determinan al ganador de una contienda, pero son elementos importantes en los procesos electorales.

Cuadro 5. Número de votos por partido para elección presidencial 2006

Partido político	Número de votos
PAN	15,000,284
PRI, PVEM	9,301,441
PRD, PT, Convergencia	14,756,350
Nueva Alianza	401,804
Social Demócrata	1,128,850
No registrados	297,989
Nulos	904,604

Fuente elaboración propia con datos del INE

Cuadro 6. Proporción de tiempos en radio y televisión para la elección presidencial 2006

Partido	Proporción de tiempo en radio y T.V.	Proporción de votos	Gasto de campaña (pesos corrientes)
PRD	24.43%	35.31%	\$ 225,745,363
PRI	20.73%	22.26%	\$ 537,269,854
PAN	16.57%	35.89%	\$ 424,784,163

Fuente: Elaboración propia con datos del INE

El modelo que se desarrollará en este trabajo, en el marco de un juego diferencial estocástico de equilibrio general, examina la relación entre el nivel de gasto en campaña y los resultados electorales. El modelo estocástico propuesto incorpora el gasto en promoción política como un bien de inversión de un partido. Este gasto puede verse como los recursos destinados en distintos medios de comunicación en una campaña para incrementar el prestigio y la consolidación de dicho partido ante los electores. Asimismo, en el modelo propuesto, un cambio en el nivel de recursos que el partido rival destine en su promoción política conduce a una reacción del otro partido y sus recursos se moverán en función de la sensibilidad de los electores en las campañas en medios.

Por otro lado, existen varias limitaciones que la teoría clásica de juegos tiene para el análisis dinámico de la contienda entre dos partidos políticos. Por ejemplo, los modelos desarrollados son, en general, elaborados en el marco determinista y en tiempo discreto. Otra desventaja es que no se incorporan otros agentes, diferentes a los competidores, que pueden ser afectados por las decisiones de los competidores, por ejemplo, los votantes y los medios. El modelo que se propone intenta enmendar las dificultades anteriores a través de la incorporación de la incertidumbre futura y del paradigma de tiempo continuo, en donde los agentes toman decisiones instantáneas. Por otro lado, los efectos que las decisiones de los partidos tienen sobre los votantes y los medios, y viceversa, son agregados en el modelo.

Este trabajo se organizó de la siguiente forma: en la siguiente sección se desarrolla un modelo dinámico estocástico útil para describir y explicar la influencia de los recursos destinados a medios de comunicación, así como el crecimiento de los recursos de los partidos en función de las preferencias electorales; en la sección 3 se analiza el impacto en la riqueza (recursos) del partido ante un cambio en los gastos promedios de campaña, y recursos destinados a medios; finalmente, en la sección 4 se proporcionan las conclusiones del trabajo.

2. Gasto en promoción política como bien de inversión de un partido político

La teoría de juegos clásica refleja una situación de supuestos básicos de cómo se involucran los participantes en una interacción particular y está interesada en averiguar que sucede, posteriormente, cuando cada participante ve por su propio beneficio sujeto a sus limitaciones de información y presupuesto (Thakor, 1991). En este sentido se hace un análisis del gasto que hacen los partidos políticos en su promoción política, el cual realmente es visto como una inversión por lo cual se propone un modelo que incorpore el gasto en promoción política como un bien de inversión. Este gasto puede verse como los recursos destinados en distintos medios de comunicación en una campaña. Una buena imagen y difusión de propuestas e ideologías tiene por objeto motivar en los electores cierta preferencia o gusto por un partido, lo que podría incidir en que se vote o no por él y así obtener más recursos federales y espacios en el sistema político. Este gasto de promoción también es parte de los recursos destinados a la conformación de redes (incluyendo redes sociales) y operadores políticos a favor del partido en las distintas regiones del país o el gasto para desprestigiar al partido rival; véase, al respecto, Flanigan *et al.* (2015).

2.1 Planteamiento del modelo

Debido a que el gasto en promoción política se considera un bien de inversión, entonces se puede modelar parte de la acumulación de capital del partido como la consolidación en prestigio que implica dicho gasto. Se denota el nivel de gasto en promoción del partido A mediante $p(t)$, y el nivel de capital del partido se representará por $k(t)$, por lo que la riqueza total del partido A se puede escribir como $r_t = k_t + p_t$. En este sistema político se parte del supuesto de que sólo existen dos partidos políticos en el que ambos están en una disputa para obtener mayores beneficios. El parámetro μ_r representa la tendencia media de la riqueza del partido A , σ_r la volatilidad de la riqueza de A . De manera análoga, la riqueza del partido rival B es de la forma $r_t^* = k_t^* + p_t^*$, donde $p_t^*(t)$ es el nivel de gasto en la promoción (prestigio) del partido contrario y $k_t^*(t)$ su nivel de capital.

La utilidad del partido político A depende del tiempo en su promoción política, principalmente en radio y televisión, definido como $g(t)$, la riqueza total $r(t)$, y la riqueza total del partido B dada por $r^*(t)$. Por lo tanto se define la utilidad del partido

como $u(g_p, r_p, r^*)$.

Se propone una función de utilidad para el partido político A , $u(g_p, r_p, r^*)$, tal que $u(\cdot)' > 0$, $u(\cdot)'' < 0$. Así, mientras se destinen más recursos en medios de comunicación el partido siempre obtiene utilidad, pero cada vez menos. Se parte del supuesto que la dinámica en la riqueza del partido contrario sigue una tendencia estocástica

$$dr_t^* = r_t^* \mu_r dt + r_t^* \sigma_r dW_{1t}, \quad dW_{1t} \sim N(0, dt) \quad (1)$$

Donde dW_{1t} es una variable aleatoria que sigue un proceso de Wiener. Es decir, es una variable aleatoria normal con media cero y varianza dt con incrementos independientes. Así mismo, el cambio marginal de la riqueza del partido A se debe a los cambios marginales de su capital y del gasto que destina para su promoción. De este modo se tiene que $dr_t = dk_t + dp_p$, y de manera general el cambio marginal de la riqueza se expresa de la siguiente forma $dr_t = dN_t - g_t dt - D_t^* dt$. En donde N_t representa el nivel de recursos totales que el gobierno destina para ambos partidos. Así, el cambio marginal en la riqueza del partido (capital y prestigio) es igual al incremento marginal de los recursos federales asignados a ambos partidos, menos sus gastos en medios electrónicos como radio y televisión. El nivel de recursos federales asignados al partido rival D_t^* . El partido A , ahora tiene que elegir su nivel de capital, nivel de recursos para su promoción política y gastos en medios electrónicos que maximicen su utilidad descontada la tasa ρ .

Se supone que el cambio marginal de los recursos que el gobierno destinará a los partidos tiene un comportamiento incierto, ya que depende de muchos factores, tanto propios del aspecto electoral como fuera de él, por ejemplo, el aspecto legislativo en el decreto del presupuesto asignado al partido, por lo cual se propone que este cambio marginal de recursos siga un comportamiento estocástico dado por:

$$dN_t = A k_t dt + A k_t \sigma_N dW_{2t}, \quad dW_{2t} \sim N(0, dt) \quad (2)$$

donde, como antes, dW_{2t} es una variable aleatoria que sigue un proceso de Wiener. Se denota a la proporción del gasto en promoción política con respecto de su riqueza total como $\gamma = p_t / (p_t + s_t)$, esto conlleva a que $(1-\gamma) = k_t / (k_t + p_t)$, y en virtud los incrementos marginales en la riqueza del partido como en los recursos totales que se destinan para ambos partidos, de la ecuación (2), entonces

$$d\gamma_t \equiv \left[\left((1-\gamma)_t \right) - \gamma_t \right] d\gamma_t + \left[(1-\gamma)_t \right] \sigma_N dW_{2t}, \text{ lo que conduce a} \\ d\gamma_t \equiv \left[\left((1-\gamma)_t \right) - \gamma_t \right] d\gamma_t + \left[(1-\gamma)_t \right] \sigma_N dW_{2t} \quad (3)$$

donde $F((1-\gamma)r_t) = A((1-\gamma)r_t)$.

Con esto se establece otra de las restricciones a la que el partido A se sujeta para

maximizar su utilidad. El problema del partido consiste en maximizar su utilidad, descontada a una tasa subjetiva ρ :

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } E_0 \left[\int_0^{\infty} u(g_t, r_t, r_t^*) e^{-\rho t} dt \right] \\ & \text{s. a } d\left[\frac{1}{\gamma} \left((1-\gamma) r_t - g_t - r_t^* \right) \right] + \left[(1-\gamma) r_t \right] \sigma_N dW_{2t}, \\ & dr_t^* = \mu_r r_t^* dt + \sigma_r r_t^* dW_{1t} \end{aligned}$$

El problema se aborda desde la teoría del control óptimo estocástico.¹ Para ello se define la función de valor²:

$$J(k_t, p_t^*, t) = \max E_0 \left[\int_0^{\infty} u(g_t, p_t, p_t^*) e^{-\rho t} dt \right].$$

De esta manera, $J(k_t, p_t^*, t) = \max E_0 \left[\int_t^{t+dt} u(g_t, p_t, p_t^*) e^{-\rho t} dt + \int_{t+dt}^{\infty} u(g_t, p_t, p_t^*) e^{-\rho t} dt \right]$. Por lo tanto,

$$J(k_t, p_t^*, t) = \max E_0 \left[\int_t^{t+dt} u(g_t, p_t, p_t^*) e^{-\rho t} dt + J(k_t + dk_t, p_t^* + dp_t^*, t + dt) \right] \quad (4)$$

A partir del teorema del valor medio y la expansión de Taylor, se sigue que:

$$0 = \max E_0 \left[u(g_t, p_t, p_t^*) e^{-\rho t} dt + o(dt) + dJ(k_t, p_t^*, t) \right] \quad (5)$$

donde la diferencial estocástica de J satisface (lema de Itô con dos factores de riesgo):

$$\begin{aligned} dJ = & \left[J_{..} + J \left[F((1-\gamma)r) - c - D^* \right] + \frac{1}{2} J_{FF} [(1-\gamma)r]^2 \sigma^2 + J_r \mu_r r^* + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma_r^2 r^{*2} \right. \\ & \left. + H[(1-\gamma)r_t] r_t^* J_{rr} \sigma_{W_1 W_2} \right] dt + F[(1-\gamma)r_t] J_r \sigma_N dW_{2t} + \sigma_r r_t^* J_r dW_{1t}, \end{aligned}$$

Dado que $\lim_{dt \rightarrow 0} o(dt)/dt \rightarrow 0$, se llega a la ecuación HJB.

$$\begin{aligned} \dots \equiv & \left[u(g_t, r_t, r_t^*) e^{-\rho t} + J_t + J_r \left[F((1-\gamma)r_t) - g_t - D_t^* \right] + \frac{1}{2} J_{rr} F[(1-\gamma)r_t]^2 \sigma_N^2 \right. \\ & \left. + J_r \mu_r r_t^* + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma_r^2 r_t^{*2} + F[(1-\gamma)r_t] r_t^* J_{rr} \sigma_{W_1 W_2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Se propone una función de valor tal que $J(r_t, r_t^*, t) = V(r_t, r_t^*) e^{-\rho t}$, con lo cual se obtiene,

¹ Véase Merton (1975) y Turnovsky (1993) y (2000) para el planteamiento y solución de problemas similares.

² Véase Venegas-Martínez (2008) para más detalles sobre la interpretación de la función de valor.

$$\begin{aligned}
 0 = \max & \left[u(g_t, r_t, r_t^*) e^{-\rho t} + V_t(r_t, r_t^*) e^{-\rho t} + V_r \left[F((1-\gamma)r_t) - g_t - D_t^* \right] e^{-\rho t} \right. \\
 & + \frac{1}{2} V_{rr} F \left[(1-\gamma)r_t \right]^2 \sigma_N^2 e^{-\rho t} + V_{r^*} \mu_{r^*} r_t^* e^{-\rho t} + \frac{1}{2} V_{r^* r^*} \sigma_{r^*}^2 r_t^{*2} e^{-\rho t} \\
 & \left. + F \left[(1-\gamma)r_t \right] r_t^* V_{rr^*} \sigma_{W_1 W_2} e^{-\rho t} \right], \quad (7)
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 0 = \max & \left[u(g_t, r_t, r_t^*) - \rho V + V_r \left[F((1-\gamma)r_t) - g_t - D_t^* \right] + \frac{1}{2} V_{rr} F \left[(1-\gamma)r_t \right]^2 \sigma_N^2 \right. \\
 & \left. + V_{r^*} \mu_{r^*} r_t^* + \frac{1}{2} V_{r^* r^*} \sigma_{r^*}^2 r_t^{*2} + F \left[(1-\gamma)r_t \right] r_t^* V_{rr^*} \sigma_{W_1 W_2} \right]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Por otro lado se propone el candidato solución a la función de valor, tal que $V(r_t, r_t^*) = \delta r^{1-\varepsilon} (r_t^* / r_t)^\beta$, y la propuesta de la función de utilidad es de la forma:

$u(g_t, r_t, r_t^*) = g_t^{1-\varepsilon} / (1-\varepsilon) (r_t / r_t^*)^{-\beta}$, con $0 < \varepsilon < 1$ cuando $-1 < \beta < 0$, y $\varepsilon > 1$ cuando $\beta > 1$, lo que garantiza que un incremento en la riqueza del partido B no le generará utilidad alguna al partido A . Si g_t, r_t, r_t^* son óptimos, entonces a partir de la ecuación (8) con la función de utilidad propuesta, se obtiene la siguiente condición necesaria de máximo:

$$\begin{aligned}
 0 = \max & \left[\frac{g_t^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \left(\frac{r_t}{r_t^*} \right)^{-\beta} - \rho \delta r_t^{1-\varepsilon-\beta} (r_t^*)^{-\beta} + (1-\varepsilon-\beta) \delta (r_t^*)^\beta r_t^{-\varepsilon-\beta} \left[F((1-\gamma)r_t) - g_t - D_t^* \right] \right. \\
 & + \frac{1}{2} (1-\varepsilon-\beta) (-\varepsilon-\beta) \delta (r_t^*)^\beta r_t^{-\varepsilon-\beta-1} F \left[(1-\gamma)r_t \right]^2 \sigma_N^2 + \beta \delta r_t^{1-\varepsilon-\beta} (r_t^*)^\beta \mu_{r^*} r_t^* \\
 & \left. + \frac{1}{2} \beta (\beta-1) \delta r_t^{1-\varepsilon-\beta} (r_t^*)^{\beta-2} \sigma_{r^*}^2 r_t^{*2} + \beta (1-\varepsilon-\beta) \delta (r_t^*)^{\beta-1} r_t^{-\varepsilon-\beta} r_t^* F \left[(1-\gamma)r_t \right] \sigma_{W_1 W_2} \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

Si se deriva la ecuación anterior con respecto del gasto en medios electrónicos (promoción política), se tiene que $g_t^{-\varepsilon} \left(\frac{r_t}{r_t^*} \right)^{-\beta} = (1-\varepsilon-\beta) \delta (r_t^*)^\beta r_t^{-\varepsilon-\beta}$.

La razón gasto en medios electrónicos-riqueza, la cual es uno de los factores que explica el crecimiento de la riqueza del partido A , satisface:

$$\frac{g_t^{-\varepsilon}}{r_t^{-\varepsilon}} = (1-\varepsilon-\beta) \delta, \quad (10)$$

La ecuación anterior dice que el gasto en medios electrónicos está en función de la riqueza del partido y de la sensibilidad que tienen los electores ante el mismo.

$$g_t = \left[(1-\varepsilon-\beta) \delta \right]^{-1/\varepsilon} r_t \quad (11)$$

Si se deriva la ecuación (9) respecto de la proporción del gasto en promoción política (γ), se sigue que

$$(1-\varepsilon-\beta)\delta(r_i^*)^\beta r_i^{-\varepsilon-\beta} F_\gamma((1-\gamma)r_i) + (1-\varepsilon-\beta)(-\varepsilon-\beta)\delta(r_i^*)^\beta r_i^{-\varepsilon-\beta-1} F_\gamma((1-\gamma)r_i) F_\gamma((1-\gamma)r_i) \sigma_N^2 \\ + \beta(1-\varepsilon-\beta)\delta(r_i^*)^{\beta-1} r_i^{-\varepsilon-\beta} r_i^* F_\gamma((1-\gamma)r_i) \sigma_{w_1 w_2} = 0. \quad (12)$$

Si se denota $F(k_t) = Ak_t$ en la ecuación anterior, se tiene:

$$(1-\varepsilon-\beta)\delta(r_i^*)^\beta r_i^{-\varepsilon-\beta} (-Ar_i) + (1-\varepsilon-\beta)(-\varepsilon-\beta)\delta(r_i^*)^\beta r_i^{-\varepsilon-\beta-1} A(1-\gamma)r_i (-Ar_i) \sigma_N^2 \\ + \beta(1-\varepsilon-\beta)\delta(r_i^*)^{\beta-1} r_i^{-\varepsilon-\beta} r_i^* (-Ar_i) \sigma_{w_1 w_2} = 0.$$

A fin de simplificar esta última expresión se escribe

$$-(1-\varepsilon-\beta)\delta(r_i^*)^\beta r_i^{1-\varepsilon-\beta} - \delta(1-\varepsilon-\beta)\delta(r_i^*)^\beta r_i^{1-\varepsilon-\beta} \sigma_{w_1 w_2} \\ + (1-\varepsilon-\beta)(\varepsilon+\beta)\delta(r_i^*)^\beta r_i^{1-\varepsilon-\beta} A(1-\gamma) \sigma_N^2 = 0 \quad (13)$$

De lo anterior se obtiene que

$$-(1-\varepsilon-\beta) - \beta(1-\varepsilon-\beta) \sigma_{w_1 w_2} + (1-\varepsilon-\beta)(\varepsilon+\beta) A(1-\gamma) \sigma_N^2 = 0 \quad (14)$$

A partir de la ecuación (14) el nivel óptimo de gasto en promoción política es:

$$\gamma = \frac{\varepsilon \sigma_N^2 A + \beta(\sigma_N^2 A - \beta \sigma_{w_1 w_2}) - 1}{(\varepsilon + \beta) \sigma_N^2 A} \quad (15)$$

Si se sustituyen en (9) las ecuaciones (12) y (14) se tiene que

$$\left[(1-\varepsilon-\beta)\delta \right]^{(1-\varepsilon)/\varepsilon} \frac{r_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \left(\frac{r_i}{r_i^*} \right)^{-\beta} - \rho \delta r_i^{1-\varepsilon-\beta} (r_i^*)^\beta + \beta \delta r_i^{1-\varepsilon-\beta} (r_i^*)^{\beta-1} \mu_r r_i^* \\ + \delta r_i^{1-\varepsilon} \left(\frac{r_i}{r_i^*} \right)^{-\beta} (1-\varepsilon-\beta) \left[A(1-\gamma) - ((1-\varepsilon-\beta)\delta)^{-1/\varepsilon} - D_i^* \right] \\ + \delta(1-\varepsilon-\beta) \beta(1-\beta) r_i^{1-\varepsilon} \left(\frac{r_i}{r_i^*} \right)^{-\beta} \sigma_{vw} A \\ - \frac{1}{2} (1-\varepsilon-\beta)(\varepsilon+\beta) \delta(1-\gamma)^2 r_i^{1-\varepsilon} \left(\frac{r_i}{r_i^*} \right)^{-\beta} \sigma_N^2 A^2 \\ + \frac{1}{2} \beta(\beta-1) \sigma_r^2 \delta r_i^{1-\varepsilon} \left(\frac{r_i}{r_i^*} \right)^{-\beta} = 0 \quad (16)$$

De la ecuación (14), se tiene que:

$$\begin{aligned} [(1-\varepsilon-\beta)\delta]^{-1/\varepsilon} = & \frac{(1-\varepsilon-\beta)\frac{1}{2}\left[(\varepsilon+\beta)(1-\gamma)^2\sigma_N^2A^2-2\beta(1-\gamma)\sigma_{W,W_2}A-2A\left[(1-\gamma)+\frac{D_t^*}{r_t}\right]\right]}{(1-\varepsilon-\beta)\varepsilon/(1-\varepsilon)} \\ & + \frac{\rho-\beta\mu_{r_t}-\frac{1}{2}\beta(\beta-1)\sigma_{r_t}^2}{(1-\varepsilon-\beta)\varepsilon/(1-\varepsilon)} \end{aligned} \quad (17)$$

Al sustituir la ecuación (17) en (11), se obtiene la relación gasto en medios electrónicos- riqueza del partido A , la cual explica en parte el crecimiento de su riqueza.

$$\frac{g_t}{r_t} = \frac{\rho-\beta\mu_{r_t}+(1-\varepsilon-\beta)\frac{1}{2}\left[(\varepsilon+\beta)(1-\gamma)^2\sigma_N^2A^2-2\beta(1-\gamma)\sigma_{W,W_2}A-2A\left[(1-\gamma)+\frac{D_t^*}{r_t}\right]\right]-\frac{1}{2}\beta(\beta-1)\sigma_{r_t}^2}{(1-\varepsilon-\beta)\varepsilon/(1-\varepsilon)} \quad (18)$$

La tasa de crecimiento de la riqueza del partido se denota con φ , la cual satisface:

$$\varphi = E\left(\frac{dr_t}{r_t} \cdot \frac{1}{dt}\right) \quad (19)$$

En este caso, la condición de transversalidad está dada por:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\left[\delta r_t^{1-\varepsilon-\beta} (r_t^*)^{-\beta} e^{-\rho t}\right], \quad (20)$$

lo que garantiza que $\frac{g_t}{r_t} > 0$. Esta condición obliga a que el partido A no se sobre-endeude.

3. Análisis de impactos en variables exógenas

A continuación se evalúa el impacto del cambio en la tasa de crecimiento de la riqueza del partido A por un cambio en la tendencia media de la riqueza del partido político B .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_{r_t}} = \frac{\partial \left[A(1-\gamma) - \frac{g_t}{r_t} - \frac{D_t^*}{r_t} \right]}{\partial \mu_{r_t}} = \frac{\beta(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon-\beta)\varepsilon} \quad (21)$$

Si $\beta < 0$ y $\varepsilon < 1$, entonces $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_{r_t}} < 0$. Además, si $\beta < 0$ y $\varepsilon < 1$, entonces se obtiene $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_{r_t}} > 0$. De lo anterior se concluye que un aumento en la tendencia media de la riqueza (recursos federales y gasto en promoción política) del partido político B llevará a que también se incremente la riqueza del partido político A , esto en función de la elasticidad de su gasto en medios electrónicos, es decir, para el caso cuando $\beta < 0$

0 y $0 < \varepsilon < 1$, se concluye que un incremento en la tendencia media de la riqueza del partido político B conlleva a que a un decremento de la riqueza del partido político A . En el segundo caso cuando $\beta > 0$ y $\varepsilon > 1$, se concluye que un incremento en la tendencia media de la riqueza del partido B conlleva a un crecimiento del partido A si éste tiene una elasticidad en su gasto de medios electrónicos a la baja.

En el modelo, un valor de $\beta > 1$ puede también llevar a un incremento de la riqueza del partido A incluso con una relativamente baja elasticidad en el gasto de medios electrónicos ($\varepsilon > 1$). Con respecto de la tasa de crecimiento en los recursos asignados para ambos partidos, si se considera $\sigma_{vw} = 0$, el impacto en el crecimiento de la riqueza de A ante un cambio en la volatilidad de los recursos totales (σ_N^2) está dado por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_N^2} = \frac{-A^2 - (1 - \varepsilon)}{2\varepsilon(\varepsilon + \beta)(\sigma_N^2)^2 A^2}. \quad (22)$$

Si $0 < \varepsilon < 1$ y $-1 < \beta < -\varepsilon$, se tiene que $\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_N^2} > 0$. Cuando $0 < \varepsilon < 1$ y $-\varepsilon < \beta < 0$; o cuando $\varepsilon > 1$ y $\beta > 0$, se tiene $\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_N^2} < 0$. De lo anterior se deduce que el incremento o decremento de la riqueza del partido A está en función de su elasticidad en el gasto de medios electrónicos. Así, una elasticidad de su gasto de radio y televisión relativamente grande conlleva a un crecimiento, mientras que una pequeña conduce a un no decremento de su riqueza.

4. Conclusiones

A través de un juego diferencial estocástico se analizó el impacto en la tasa de crecimiento de riqueza de un partido político por cambios en variables relevantes. En la evaluación de los impactos se incluyó la acumulación de prestigio como parte de la riqueza del partido. El modelo permitió mostrar que un alto crecimiento en el gasto de campañas electorales lleva a una reacción del partido contrario consistente en incrementar también su gasto en campaña, lo cual conlleva a un crecimiento de la riqueza del partido político en función de la elasticidad de su gasto en medios electrónicos de comunicación (como radio y televisión). El modelo propuesto también permite analizar la influencia de la volatilidad del presupuesto total en el gasto de campaña del partido político y su influencia en la riqueza del mismo. La relación entre gasto en campañas y mejores resultados electorales tiene varias connotaciones para el caso mexicano. Por ejemplo, en el análisis de la evolución de los presupuestos para los partidos en tres elecciones federales en el país, el impacto que ha tenido dicho presupuesto en el porcentaje de votos se redujo significativamente en relación el segundo lugar cuando este invierte mucho más recursos en medios como radio y televisión a pesar de que el partido puntero aventajaba con un presupuesto mucho mayor, esto para la elección de 2006, mostrando la importancia de la sensibilidad de los electores a las campañas realizadas en este tipo de medios. Por último, es importante mencionar que existen

varios factores que inciden en los resultados electorales. Con el modelo propuesto se trató de aislar un factor bajo ciertas condiciones iniciales y bajo ciertos supuestos que permiten llegar a las conclusiones antes mencionadas. Sin embargo, al tomarse en consideración el clima político durante un proceso electoral, seguramente algunas variables influirán más que otras. Esta limitación será enmendada en el futuro con trabajos de investigación que extiendan la presente propuesta.

Referencias

- Flanigan, W. H., E. A. Theiss-Morse, N. H. Zingale, and N. W. Wagner (2015). *Political Behavior of the American Electorate*. 1st. Edition. Sage Publications Ltd. USA.
- Green, D., P. and J. S. Krasno (1988). Salvation for the Spendthrift Incumbent: Reestimating the Effects of Campaign Spending in House Elections. *American Journal of Political Science*, Vol. 32, No. 4, pp. 884-907.
- Jacobson, G. (1978). The Effects of Campaign Spending in Congressional Elections. *American Political Science Review*, Vol. 72, No. 2, pp. 469-491.
- Merton, C, R. (1975). An Asymptotic Theory of Growth under Uncertainty. *Review of Economic Studies*, Vol.42, No. 3, pp. 375-393.
- Morales-Barrientos, G. (2007). El impacto de los gastos de campaña en las elecciones federales de diputados por el principio de mayoría relativa del periodo 1997-2003, Tesis doctoral, FLACSO.
- Payne, J. (1991). Elections and Government Spending. *Public Choice*, Vol. 70, No. 1, pp.71-82.
- Thakor, V. (1991), Game Theory in Finance, *Financial Management Association International*, Vol. 20, No. 1.
- Turnovsky, S. (2000). *Methods of Macroeconomic Dynamics*, 2nd Edition. MIT Press, Cambridge.
- Turnovsky, S. (1993). Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy. *International Economic Review*, Vol. 35, No. 4. pp. 953-981.
- Venegas-Martínez, F. (2008). Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, Cengage, 2da. edición. México.