Revista Educação em Questão
E-ISSN: 1981-1802
eduquestao@ce.ufrn.br
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil

dos Santos Costa, Manoel; Gomes Allevato, Norma Suely

A escrita de (futuros) professores de matemática na resolução de um problema sobre o volume do cilindro

Revista Educação em Questão, vol. 49, núm. 35, mayo-agosto, 2014, pp. 127-152
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal, Brasil

A escrita de (futuros) professores de matemática na resolução de um problema sobre o volume do cilindro

Manoel dos Santos Costa
Universidade Ceuma
Norma Suely Gomes Allevato
Universidade Cruzeiro do Sul

Resumo

Este artigo analisa registros escritos apresentados por (futuros) professores, em uma experiência com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Ao resolverem um problema sobre o volume de cilindro, partiram da construção com folhas de papel, estimaram os volumes e resolveram por escrito. Após discussão das resoluções, formalizou-se o conceito matemático construído. Tal experiência fundamentou a presente pesquisa, de natureza qualitativa e realizada por observação participante e análise documental. Constatou-se a necessidade de explorar a escrita com professores em formação, para que também o façam com seus (futuros) alunos de Matemática, através da resolução de problemas.

Palavras chave: Formação de professores. Resolução de problemas. Leitura e escrita.

The writing of (future) mathematics teachers through the resolution of a problem involving cylinder volume

Abstract

The purpose of the present article is to analyze some written records submitted by (future) teachers obtained from an experiment on the Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving. When they worked on a problem involving cylinder volume, they started by building it with sheets of paper, estimated the volumes and wrote the solution. After discussing the solutions, they formalized the mathematical built concept. Such experiment grounded the present research, which has a qualitative approach and was developed through participant observation and document analysis. The results showed the need to explore written language in teachers' education in order that they will be able to do it with their own Mathematics (future) students, through problem solving.

Keywords: Teacher education. Problem solving. Reading and writing.

La escripta de (futuros) professors de matemática en la resolución de um problema sobre el volume del cilindro

Resumen

Este artículo analiza registros escritos presentados por (futuros) profesores, en una experiencia con la Metodologia de Ensino-Aprendizaje-Avaliación a través de la Resolución de Problemas. Cuando resolvieren un problema sobre el volumen de cilindro, partirán de la construcción con hojas de papel, consideraran los volúmenes por escrito. Después de discusión de las resoluciones, se ha formalizado el concepto matemático construido. Tal experiencia ha fundamentado la presente pesquisa, de carácter cualitativa, realizada por observación participante y análisis de documentos. Se ha constatado la necesidad de explorarse la escrita con profesores en formación, para también lo hayan con sus (futuros)alumnos de matemática, a través la resolución de problemas.

Palabras clave: Formación de profesores. Resolución de problemas. Lectura e escrita.

Introdução

A quantidade de pesquisas sobre formação de professores tem crescido muito nos últimos anos. Pouco a pouco, tem-se constatado uma preocupação por parte dos estudiosos e pesquisadores em geral e, em particular, da Educação Matemática em conhecer de que maneira se realizam os processos de aprender a ensinar e ensinar a aprender.

Este artigo é parte de uma pesquisa maior (COSTA, 2012) efetivada com (futuros) professores de Matemática que buscavam novos recursos para desenvolver os conteúdos com seus (futuros) alunos. Foram promovidos encontros semanais para discutir e analisar como esses (futuros) professores de Matemática, que se encontram em formação inicial, exploram o conceito de proporcionalidade através da resolução de problemas.

Neste artigo, abordamos alguns aspectos relacionados à exploração da leitura e da escrita no ensino de Matemática. Particularmente, para este trabalho, analisamos dados das leituras e das escritas realizadas pelos participantes da pesquisa para o entendimento e a resolução de um problema de Geometria, envolvendo o volume do cilindro. Esse problema já foi abordado, também, em um contexto de formação de professores, por Onuchic e Allevato (2009), e discutido em um artigo em que outros aspectos foram considerados.

O presente trabalho está organizado em cinco seções. Iniciamos pela fundamentação e revisão teórica sobre a importância da escrita na Educação Matemática e na formação inicial de (futuros) professores de Matemática, seguida de uma seção contendo a descrição dos participantes e da metodologia empregada na pesquisa, assim como dos instrumentos utilizados. Na terceira seção, discutiremos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; na quarta, o problema proposto, cujas atividades de resolução deram origem aos dados coletados, e a análise desses dados. Finalmente, apresentaremos nossas considerações finais e as referências utilizadas.

A Escrita no Ensino de Matemática e na Formação de (futuros) Professores de Matemática

As pesquisas vêm mostrando a necessidade de se investir na formação de professores, especialmente quanto ao uso de novas metodologias de ensino, compatíveis com as demandas atuais da educação e da sociedade (PASSOS, 2000; CURI, 2005). Essas metodologias devem contemplar ações pedagógicas que promovam a busca por informação, a investigação, a experimentação e a renovação do interesse e da motivação dos alunos. Devem permitir a interação entre aluno e professor, tendo em vista suas concepções sobre a natureza da Matemática, sobre o ato de fazer Matemática e sobre como aprendê-la (MARANHÃO, 2007).

É na formação inicial que os (futuros) professores têm contato explícito com aspectos sobre o que é ensinar. Daí a importância de associar teoria e prática, pois é durante a formação inicial que esses (futuros) professores terão a oportunidade de refletir e discutir sobre teorias, estratégias ou metodologias de ensino, sobre os conteúdos e sobre o material didático que servirão de suporte em sua prática docente.

É nesse sentido que Passos (2000), Curi (2005); Barbosa, Nacarato e Penha (2008); Onuchic e Allevato (2009a) chamam a atenção para a importância de os programas de formação inicial de (futuros) professores introduzirem novas metodologias em suas práticas de ensino e no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, é fundamental que essas práticas incorporem algumas estratégias tais como a realização de leituras para entendimento dos problemas, e a produção da escrita para apresentação das dúvidas, das angústias e das resoluções dos problemas, que devem ocorrer em trabalhos realizados em grupos, compartilhados e discutidos em sala de aula. Isto vem ao encontro do pensamento de Bandeira, segundo o qual,

> A utilização da representação escrita nas aulas de Matemática é uma estratégia que aliada a outras metodologias tem grande potencial, pois faz com que o aluno pense e traduza conceitos que lhe foram apresentados na linguagem matemática para a linguagem coloquial, esse processo é desencadeador de grande aprendizagem já que o aluno é convidado a pensar a respeito do conceito ou conteúdo que irá escrever sistematizando dessa forma seus conhecimentos (BANDEIRA, 2009, p. 3).

A valorização da escrita possibilita ao professor estimular os alunos em situações que os façam pensar matematicamente e, com o passar do tempo, reconhecer conceitos e utilizá-los em seu cotidiano (BANDEIRA, 2009). A estratégia da utilização da escrita permite que o aluno assimile os conceitos de um conteúdo matemático de forma natural, mediado pela linguagem utilizada em seu cotidiano e incorpore gradual e também naturalmente a linguagem matemática formal. Compreendendo conceitos a partir de seus conhecimentos prévios e externalizando-os pela escrita, a aprendizagem torna-se muito mais significativa. É nesse contexto que a autora apresenta diferentes formas de os alunos registrarem e/ou expressarem suas resoluções, as quais têm sido discutidas na literatura.

Por isso, destacamos a escrita como forma de expressar o entendimento de uma situação ou de um problema e de apresentar sua resolução, não se fixando, apenas, nos resultados dos cálculos utilizados, mas também na maneira como esses cálculos foram efetuados (ALLEVATO; FERREIRA, 2013).

Nesse sentido, Connoly (1989 apud SANTOS, 2005, p. 129) nos apresenta alguns benefícios da utilização da escrita nas aulas de Matemática, destacando que "[...] é na linguagem natural do discurso falado e escrito que nós conduzimos para outros sistemas simbólicos o metadiscurso que nos ajuda a ensinar uns aos outros, o que, em caso contrário, teria que ser reaprendido pela experiência pessoal."

Dessa forma, a escrita, quando explorada nas aulas de Matemática e, particularmente, na resolução de problemas, atua como mediadora, integrando as experiências individuais e coletivas na busca de construção e apropriação de novos conceitos. Além disso, cria oportunidades para a interação na sala de aula e, consequentemente, para o resgate da autoestima dos alunos e dos professores (SANTOS, 2005; ONUCHIC; ALLEVATO, 2009a; NUNES, 2010; COSTA, 2012).

Conforme já discutido anteriormente, é importante que os alunos escrevam uma explicação do seu processo de resolução, como parte da própria resolução do problema. Segundo Van de Wale (2009), é muito importante que se tenha clareza do valor da escrita dos alunos; por isso, o autor nos apresenta algumas vantagens da escrita na resolução de problemas, independente da série/ano de escolaridade. Ele sugere que os alunos produzam relatórios, e justifica:

• **O ato da escrita desencadeia um processo reflexivo** – Conforme os alunos vão se esforçando para explicar seus raciocínios e defender suas soluções, eles passam por um momento de concentração e reflexão, pensando nas ideias envolvidas.

• **Um relatório escrito é um ensaio para o momento de discussão** – É muito difícil para um aluno explicar como resolveu um problema, logo após sua resolução. Por outro lado, os alunos sempre podem referir-se a um relatório escrito quando lhes for pedido que compartilhem suas ideias. Até mesmo uma criança, por exemplo, que se encontra em uma creche, pode mostrar uma figura e falar sobre ela. Quando os alunos escrevem sobre suas resoluções e soluções, demonstram disponibilidade e interesse em compartilhar suas ideias.

• **Um relatório escrito é um registro que permanece quando a lição acaba** – Os alunos podem colecionar seus relatórios para serem revistos posteriormente. As informações contidas nesses relatórios podem ser utilizadas para planejar, para descobrir quem precisa de ajuda ou oportunidades para estender o seu conhecimento, e para o professor realizar a avaliação do trabalho desenvolvido e da aprendizagem dos alunos (VAN DE WALLE, 2009, grifos nossos).

É preciso ajudar os alunos a compreenderem a importância do relatório escrito, e ajudá-los a entender o que estão relatando. Os alunos precisam compreender que existem diferenças entre mostrar como conseguiu uma resposta ou solução e explicar por que você acredita que sua solução está correta. Mostrar uma resolução é mostrar passo a passo como conseguiu a resposta, mesmo sem fornecer explicações. Mas, além da solução, é preciso apresentar justificativas para os seus passos na resolução (VAN DE WALLE, 2009).

A resolução de problemas representa, portanto, um contexto bastante propício à prática da leitura e da escrita nas aulas de Matemática. Na seção a seguir, ela será apresentada como metodologia de ensino, conforme foi considerada na presente pesquisa.

Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tal como é apresentado por Allevato e Onuchic (2009), é uma metodologia diferente daquele trabalho em que regras de "como fazer" são privilegiadas. Trata-se de uma metodologia onde o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução.

Alguns pesquisadores (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005; NUNES, 2010; COSTA, 2012) utilizam a resolução de problemas nessa linha, constatando que importantes conceitos e procedimentos podem ser mais bem ensinados se ela for utilizada. Essa metodologia designa uma abordagem em que a construção de conhecimento se faz a partir de "problemas geradores", propostos como ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos.

Segundo Vygotsky (1987 apud BANDEIRA, 2009), o ensino direto de conceitos não tem relevância do ponto de vista de construção de conhecimentos.

> O ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio, uma repetição de palavras pela criança, semelhante à de um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo (VYGOTSKY, 1987 apud BANDEIRA, 2009, p. 3).

Mas o que significa ensinar, aprender e avaliar Matemática através de resolução de problemas? A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação expressa uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento de um determinado conteúdo através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

Cai e Lester (2012) indicam que os problemas criam oportunidades de avaliação, no sentido de que o professor pode perceber o que e o como os alunos estão aprendendo e onde estão encontrando dificuldades. É nessa perspectiva que também Allevato (2005) e Van de Walle (2009) destacam o potencial avaliativo da resolução de problemas, como fonte segura de valiosas informações que permitem ao professor, entre outras coisas, perceber a presença de concepções errôneas e de lacunas de conhecimento, planejar as próximas aulas, ajudar os alunos individualmente identificando suas necessidades específicas, analisar seu progresso e criar oportunidades de aprender. Enfatizam, ainda, que a resolução de problemas possibilita conduzir o ensino partindo de onde o aluno está, e não de onde está o professor.

As observações dos autores vão ao encontro dos Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar (NCTM, 1995), que acentuam duas ideias principais: (1) a avaliação deveria ampliar a aprendizagem dos estudantes; e (2) a avaliação é uma valiosa ferramenta para tomar decisões educacionais.

Desse modo, cabe considerar a resolução de problemas com possibilidades que vão além de, simplesmente, aplicação da Matemática; mas como contexto para realizar e aperfeiçoar, pela avaliação, o ensino e a aprendizagem.

E o que vem ser um problema?

Onuchic (1999) esclarece sua compreensão, dizendo que um problema "[...] *é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver*". A autora ainda esclarece que "[...] o problema não é um exercício no qual o aluno aplica de forma quase mec*ânica uma fórmula ou uma determinada técnica operatória*" (ONUCHIC, 1999, p. 215), mas exige a elaboração de estratégias que possibilitem o aprimoramento do conhecimento durante a construção de sua resolução.

Segundo Vianna (2002), um problema é individual, para cada pessoa, condicionado àquilo que é o seu mundo e às suas preocupações. O autor afirma: um problema é "[...] uma situação em que um sujeito é solicitado a realizar uma tarefa para a qual não possui um método de resolução determinado. Se a realização da tarefa não for desejada pelo sujeito a situação não pode ser considerada um problema" (VIANNA, 2002, p. 403).

Sendo assim, como as colocações de Vianna (2002) reforçam e complementam a definição de Onuchic (1999) para um problema, assumimos essas duas definições para o nosso trabalho.

Portanto, ensinar Matemática utilizando resolução de problemas não é uma tarefa fácil, pois não basta apresentar um problema e "ficar sentado" esperando que alguma mágica aconteça. Além disso, considerar a resolução de problemas como metodologia de ensino não significa dizer que existe uma forma rígida para desenvolvê-la nas aulas de Matemática. No entanto, Allevato e Onuchic (2009) sugerem algumas etapas para que se possa colocar em prática e usufruir melhor dessa metodologia:

1. Preparação do problema – Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento.

2. Leitura individual – Solicitar que cada aluno faça sua leitura.

3. Leitura em conjunto – Solicitar nova leitura do problema, agora em pequenos grupos.

4. Resolução do problema – Não restando dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, buscam resolvê-lo.

5. Observar e incentivar – O professor não é mais transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em seus grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa seus comportamentos e estimula o trabalho colaborativo. Como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

6. Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções.

7. Plenária – Os alunos são convidados a discutir as diferentes resoluções registradas na lousa, defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas.

8. Busca do consenso – Sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9. Formalização do conteúdo – O professor registra na lousa uma apresentação formal do conteúdo, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando conceitos, princípios e procedimentos construídos através da resolução do problema.

Vale observar a presença constante da leitura e, particularmente, da escrita em quase todas essas etapas, como aspecto importante no desenvolvimento da metodologia (ALLEVATO; FERREIRA, 2013).

Reiteramos que, nessa metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático mais apropriado à resolução do problema. Porém esse conteúdo deve estar de acordo com o ano escolar em que se encontram os alunos e com os objetivos pretendidos pelo professor para aquela aula. Assim, o ensino-aprendizagem do tópico matemático começa com o problema, que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas serão desenvolvidas na busca de respostas ao problema dado; a avaliação é feita continuamente, durante a resolução do problema.

E mais, essa metodologia contempla ações pedagógicas (interação entre aluno e professor) que promovem a busca por informação, a investigação, a experimentação e a renovação do interesse e da motivação dos alunos, conforme veremos na experiência relatada e analisada no presente artigo.

Contexto da pesquisa e os procedimentos metodológicos

Os sujeitos participantes da pesquisa, que gerou o presente artigo, foram alunos do curso de licenciatura em Matemática de um programa de formação inicial de professores de uma universidade pública do Estado do Maranhão. O estudo aqui desenvolvido teve como objetivo relatar e analisar algumas explorações da leitura e da escrita, realizadas por esses (futuros) professores na resolução de um problema envolvendo o volume do cilindro.

Durante a coleta dos dados, realizamos leituras e discussões de textos sobre resolução de problemas e sobre o ensino de proporcionalidade e de Geometria, além de atividades práticas de resolução de problemas envolvendo esses conteúdos. Tais resoluções, as atividades escritas, as discussões e os registros em um diário de campo, constituem os dados desta pesquisa. Para levar a efeito essas atividades, realizamos encontros em que fizemos uso da

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009a).

A pesquisa é de natureza qualitativa, de modo que o pesquisador manteve contato direto com o ambiente da pesquisa, com os sujeitos envolvidos e com o problema que estava sendo estudado durante a pesquisa de campo. Além disso, o pesquisador foi o principal instrumento, responsável pela organização e condução das atividades desenvolvidas. Em todos os momentos, a atenção foi colocada nos processos utilizados pelos participantes e no desenvolvimento das atividades de resolução dos problemas, e não somente nos resultados (LÜDKE; ANDRÉ, 1986; GOLDENBERG, 2007).

Nesta pesquisa, utilizamos a observação participante, buscando identificar aspectos relevantes, dificuldades encontradas e atitudes perante a resolução do problema apresentado e o conteúdo matemático. As observações foram registradas em um diário de campo.

Descrição e análise dos dados

Na análise dos dados, procuramos evidenciar o entendimento dos (futuros) professores em relação ao problema apresentado, a partir das leituras de textos. Também analisamos sua escrita para a apresentação das respostas dadas aos questionamentos e das resoluções construídas para o problema. Nessa análise, identificamos e descrevemos os aspectos que julgamos relevantes relacionada à escrita, no decurso das etapas sugeridas por Onuchic e Allevato (2009a) para implementação da resolução de problemas como metodologia de ensino que nos auxiliaram na coleta e nas análises dos dados.

Sendo assim, foi proposta aos participantes a seguinte atividade:

O cilindro

O Professor Manoel entregou a cada um dos alunos participantes da pesquisa, uma folha de papel, de 20cm por 30cm e fita adesiva. Ele lhes pediu para enrolar o papel e fazer um cilindro.

Fonte | Adaptação de Krulik e Rudnick (2005)

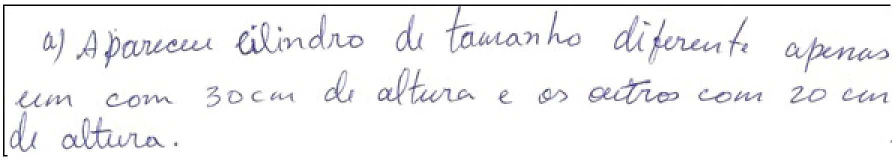
Após a apresentação da atividade, e, depois de certo tempo, cada participante começou a mostrar o seu cilindro, construído a partir da folha recebida, que media 20 cm por 30 cm. Com base nas apresentações, questionamos:

PE: — Apareceram cilindros de tamanhos diferentes?

Os (futuros) professores confirmaram que sim, que apareceram cilindros diferentes e justificaram dizendo que um, o mais alto, tinha por base um círculo menor; e o outro uma altura menor, mas era mais "largo".

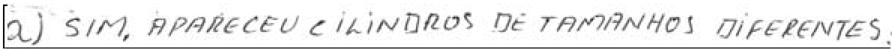
A seguir, mostramos alguns protocolos apresentados pelos participantes referente às respostas escritas dadas ao questionamento acima. Para resguardar a identidade dos participantes, utilizamos pseudônimos ADR1, ADR2, ADR3, ADRn.

Figura 1 | Resposta apresentada por ADR1


a) Apareceu cilindro de tamanho diferente apenas um com 30cm de altura e os outros com 20 cm de altura.

Fonte | Arquivo do autor

Figura 2 | Resposta dada por ADR2


a) SIM, APARECEU CILINDROS DE TAMANHOS DIFERENTES.

Fonte | Arquivo do autor

Nesses protocolos, percebemos que a maneira de os (futuros) professores se expressarem através da escrita é diferente de um participante para o outro.

Na figura 1, vale destacar o fato de que ADR1 relacionou o tamanho do cilindro à medida de sua altura sem fazer referências a outras medidas possíveis.

Os (futuros) professores seguiram as instruções, mas seus cilindros se mostraram de dois tamanhos diferentes. A justificativa dada por alguns participantes, de que um tinha como base um círculo menor e era mais alto, e o outro uma altura menor (o mais largo), pode ser observada na figura a seguir:

Figura 3 | Cilindros construídos pelos (futuros) professores

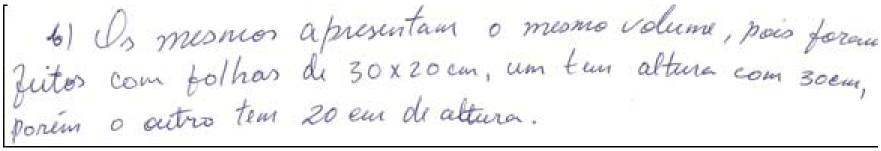
Fonte | Fotografado pelo autor

Com base nessas informações, o professor pesquisador fez um novo questionamento:

PE: — Qual desses dois cilindros tem o maior e o menor volume? Justifique!

A seguir, apresentaremos alguns protocolos com as respostas dadas pelos (futuros) professores.

Figura 4 | Resposta apresenta por ADR1



b) Os mesmos apresentam o mesmo volume, pois foram feitos com folhas de 30x20cm, um tem altura com 30cm, porém o outro tem 20 cm de altura.

Fonte | Arquivo do autor

Esse mesmo participante, ainda, acrescentou sua justificativa dizendo:

Figura 5 | Resposta complementar de ADR1

c) Apresentam o mesmo volume porque tem altura diferentes e diametros diferentes, mas tem a mesma área.

Fonte| Arquivo do autor

Podemos perceber pelas respostas dadas que esse (futuro) professor considerou que os cilindros construídos por eles tinham o mesmo volume. Aqui, observamos a necessidade de ajudar esses (futuros) professores a aprimorar a linguagem uma vez que o correto (na resposta registrada na Figura 5) seria empregar "diâmetro da base" e "área a superfície" do cilindro. Então, foi, nesse momento, que a atividade apresentada se configurou como um problema, pois nem todos estavam considerando que os volumes dos dois cilindros eram iguais.

Em suas justificativas, ADR2 e ADR4 concordam que os cilindros apresentam volumes diferentes, conforme podemos observar nos protocolos a seguir:

Figura 6 | Resposta apresentada por ADR2

O MENOR CILINDRO APARENTEMENTE APRESENTA MAIOR VO_
LUME.
ACREDITO QUE É O MENOR, POIS O VOLUME É MAIOR

Fonte | Arquivo do autor

Figura 7 | Resposta apresentada por ADR4

O CILINDRO MAIS BAIXO.
PORQUE APRESENTA O DIAMETRO MAIOR.

Fonte | Arquivo do autor

Novamente, ressaltamos a presença de imprecisão na expressão "menor cilindro" em lugar de "cilindro de menor altura" (Figura 6).

Para eles, o cilindro mais baixo (mais largo) apresenta maior volume, e o cilindro cuja área da base circular é menor (o mais alto) apresenta menor volume.

De posse das informações dadas pelos participantes, o pesquisador questionou:

PE: – Existe outra maneira, isto é, uma maneira concreta de se verificar se essas respostas e/ou hipóteses estão corretas?

Para isso, o pesquisador pediu que fossem à frente e, utilizando uma mesa, solicitou que colocassem o cilindro mais alto dentro do cilindro mais largo. Em seguida, forneceu-lhes grãos de milho para que preenchessem completamente e com cuidado o cilindro mais alto com o milho que receberam.

Figura 8 | Cilindro mais alto (cheio de milhos) dentro do cilindro mais largo

Fonte | Fotografado pelo autor

Após esse procedimento, solicitamos que retirassem, também com cuidado, o cilindro mais alto (de menor área da base), deixando o produto (milho) cair no cilindro mais largo (de maior área da base), de acordo com as figuras a seguir:

Figura 9 | Comparando os volumes dos cilindros

Fonte | Fotografado pelo autor

Foi possível observar que o milho que preenchia, anteriormente, todo o cilindro mais alto não foi suficiente para "encher" o cilindro mais baixo:

Figura 10 | Cilindro mais baixo com uma parte vazia

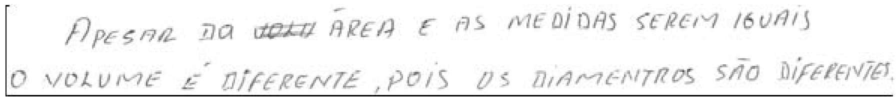
Fonte | Fotografado pelo autor

Diante dos resultados observados de forma concreta, os (futuros) professores puderam perceber que os cilindros não apresentavam o mesmo volume, ou seja, que o volume do cilindro mais alto (de menor área da base) não era igual ao do cilindro mais baixo (mais largo). Com base nessa constatação, fizemos novos questionamentos:

PE: – Qual seria o motivo dessa diferença nos volumes dos cilindros construídos a partir de uma folha de papel do mesmo tamanho? "Quem" seria o responsável direto por essa diferença?

Seguem as respostas de ADR3 e ADR4.

Figura 11 | Resposta apresenta por ADR3


APESAR DA ÁREA E AS MEDIDAS SEREM IGUAIS
O VOLUME É DIFERENTE, POIS OS DIAMENTROS SÃO DIFERENTES.

Fonte | Arquivo do autor

Figura 12 | Resposta apresenta por ADR4

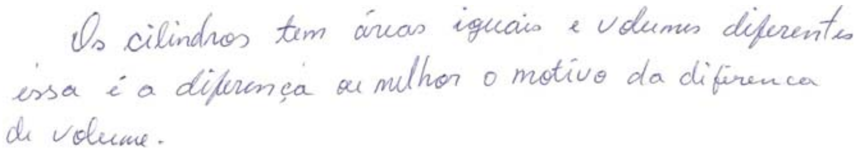

A DIFERENÇA DOS VOLUMES ESTÁ NO RAIO DO DIAMETRO.

Fonte | Arquivo do autor

Observamos em grau bastante considerável a imprecisão em sua representação escrita e, até, indícios de falta de compreensão dos conceitos de raio e diâmetro na expressão "raio do diâmetro", que não faz sentido. Entretanto, é possível perceber que eles concordam que o motivo de os cilindros não apresentarem volumes iguais, é a diferença de medida dos diâmetros (ou dos raios) das bases circulares dos cilindros.

Outro (futuro) professor apresentou a seguinte justificativa:

Figura 13 | Resposta apresenta por ADR1

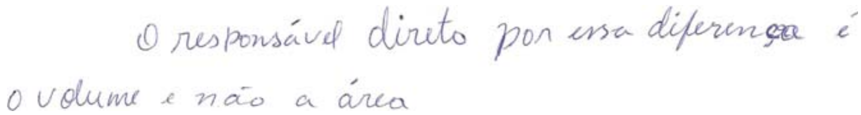

Os cilindros tem áreas iguais e volumes diferentes
essa é a diferença ou melhor o motivo da diferenca
de volume.

Fonte | Arquivo do autor

Percebemos, nos protocolos apresentados pelos (futuros) professores, que eles não responderam ao nosso questionamento, apenas disseram por que o milho não encheu o outro cilindro, reconhecendo que foi porque os volumes são diferentes, apesar de as áreas das superfícies laterais serem iguais. Vale lembrar que nosso questionamento foi acerca do(s) motivo(s) de esses volumes serem diferentes.

A justificativa apresentada por ADR1 é confirmada no protocolo a seguir:

Figura 14 | Resposta apresenta por ADR1

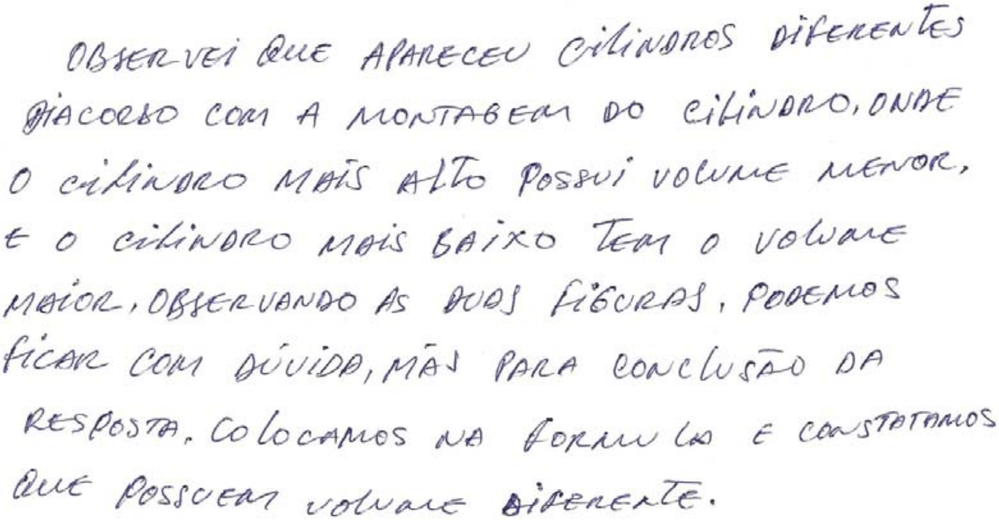

O responsável direto por essa diferença é
o volume e não a área

Fonte | Arquivo do autor

Para esse participante, o principal responsável pela diferença, observada no preenchimento dos cilindros com o milho, é o volume e não a área.

Um dos (futuros) professores apresentou suas respostas aos nossos questionamentos em formato de um texto, conforme podemos observar no seguinte protocolo:

Figura 15 | Resolução apresenta por ADR5


OBSERVEI QUE APARECEU CILINDROS DIFERENTES
DIACORDO COM A MONTAGEM DO CILINDRO, ONDE
O CILINDRO MAIS ALTO POSSUI VOLUME MENOR,
E O CILINDRO MAIS BAIXO TEM O VOLUME
MAIOR, OBSERVANDO AS DUAS FIGURAS, PODEMOS
FICAR COM DÚVIDA, MÁS PARA CONCLUSÃO DA
RESPOSTA. COLOCAMOS NA FORMULA E CONSTATAMOS
QUE POSSUEM VOLUME DIFERENTE.

Fonte | Arquivo do autor

Pelo que pudemos observar, ADR5 concorda com os demais colegas dizendo que os cilindros são diferentes. Percebe que, dependendo da maneira de montar, encontramos um mais alto, que apresenta o menor volume, e um mais baixo, sendo este o que apresenta o maior volume. Mas esse participante, estando de posse dos cilindros confeccionados, ficou em dúvida e, por isso, procurou comprovar suas hipóteses matematicamente, antes de verificar "no concreto", conforme protocolos a seguir:

Figura 16 | Resolução apresenta por ADR5

$C = 2 \cdot \pi \cdot r$

$30 = 2 \cdot 3.14 \cdot r$

$30 = 6{,}28r$

$r = \frac{30}{6{,}28}$

$\boxed{r = 4{,}78cm}$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = 3.14 \cdot (4{,}78)^2 \cdot h$

$V = 3.14 \cdot 22{,}85 \cdot 20$

$\boxed{V = 1435 cm^3}$

CILINDRO MAIOR (BAIXO) QUE TEM 1.435 CM³ DE VOLUME.

Fonte | Arquivo do autor

Figura 17 | Resolução apresenta por ADR5

$C = 2 \cdot \pi \cdot r$

$20 = 2 \cdot \pi \cdot r$

$20 = 2 \cdot 3.14 \cdot r$

$20 = 6{,}28r$

$r = \frac{20}{6{,}28}$

$\boxed{r = 3{,}18CM}$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = 3.14 \cdot (3{,}18)^2 \cdot 30$

$V = 3.14 (10{,}11) \cdot 30$

$V = 952{,}36 cm^3$

CILINDRO MENOR (ALTO) QUE TEM UM VOLUME DE 952,36CM³

Fonte | Arquivo do autor

Acreditamos que, por já ter estudado esse conteúdo na Geometria, ADR5, recorreu às fórmulas para o cálculo do comprimento da circunferência e do volume do cilindro, isto é: $C = 2.\varpi.r$ e $V = \varpi.r2.h$. A fórmula do comprimento da circunferência foi utilizada para calcular os comprimentos dos raios das bases circulares dos cilindros. Percebemos que primeiro ele encontrou o raio da base do cilindro que, para ele, era o de maior volume, para, depois, encontrar o valor do volume desse cilindro. Em seguida, seguiu os mesmos passos para calcular o volume do outro cilindro, que, para ele, seria o de menor volume.

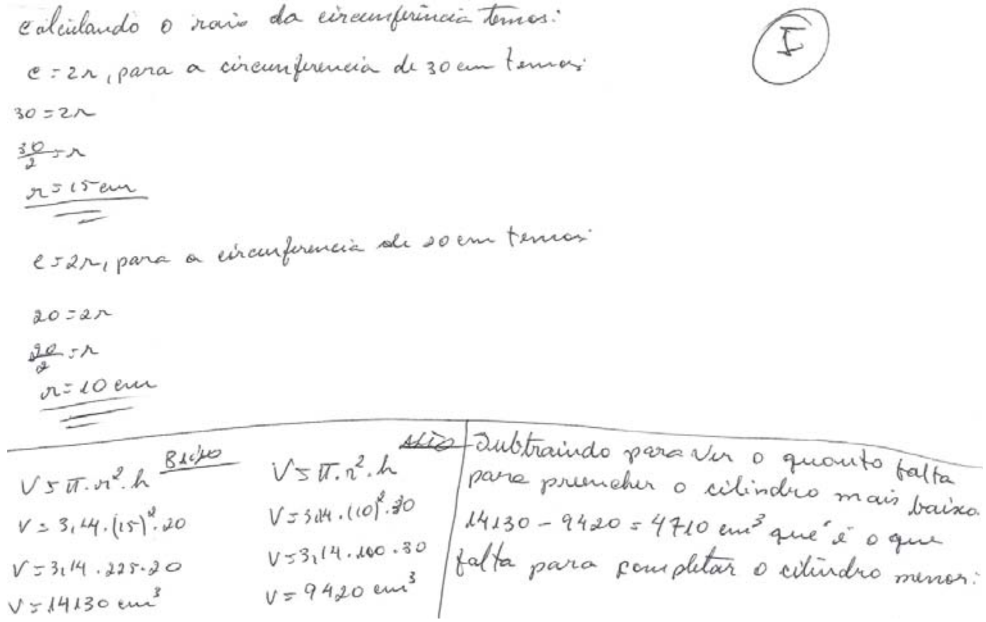
As resoluções apresentadas por ADR5 mostram que ele se ateve aos cálculos, empregando a linguagem natural apenas para identificar a que cilindro se refere o cálculo e para expressar o valor do volume, de forma muito sucinta.

Foi o resultado obtido com os cálculos desse participante e também as diferentes posições que apareceram nos registros escritos pelos (futuros) professores, que nos levaram à ideia de comprovar matematicamente e de forma mais rigorosa o que havíamos constatado concretamente; assim, solicitamos aos demais participantes que fizessem o mesmo.

No entanto, como já havíamos discutido com o grupo sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avalição de Matemática através da Resolução de Problemas, pedimos que seguissem os passos sugeridos por Allevato e Onuchic (2009); assim, cada participante teria a oportunidade de apresentar suas resoluções para discussão em plenária. Depois, do professor pesquisador, teriam a formalização, ou seja, apresentação formal organizada e estruturada em linguagem matemática, desse conteúdo e da resolução do problema.

Durante a apresentação das resoluções na lousa, pelos (futuros) professores, e na plenária, uma resolução também nos chamou a atenção; a apresentada por ADR3:

Figura 18 | Primeira resposta apresenta por ADR3



Calculando o raio da circunferência temos:

$c = 2r$, para a circunferência de 30 cm temos:

$30 = 2r$

$\frac{30}{2} = r$

$r = 15$ cm

$c = 2r$, para a circunferência de 20 cm temos:

$20 = 2r$

$\frac{20}{2} = r$

$r = 10$ cm

Baixo

$V = \pi . r^2 . h$

$V = 3,14 . (15)^2 . 20$

$V = 3,14 . 225 . 20$

$V = 14130$ cm^3

Alto

$V = \pi . r^2 . h$

$V = 3,14 . (10)^2 . 30$

$V = 3,14 . 100 . 30$

$V = 9420$ cm^3

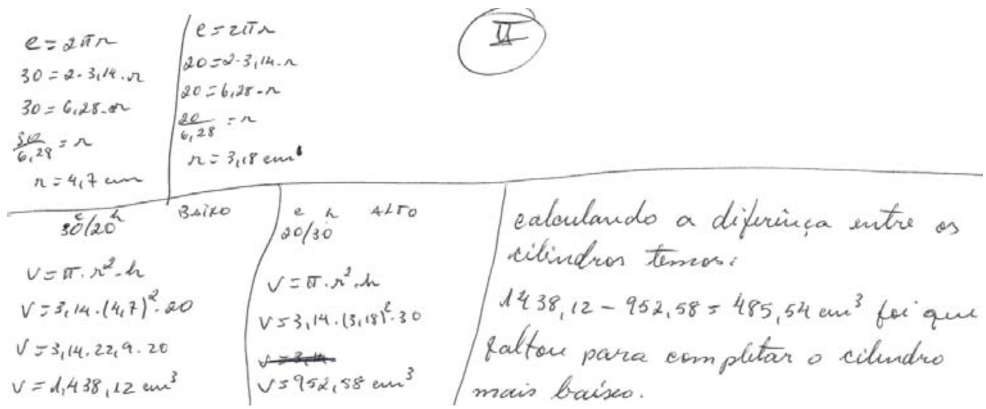
Subtraindo para ver o quanto falta para preencher o cilindro mais baixo.

$14130 - 9420 = 4710$ cm^3 que é o que falta para completar o cilindro menor.

Fonte | Arquivo do autor

Notamos que esse (futuro) professor não tinha certeza, quanto à solução encontrada, por isso, fez uma nova tentativa:

Figura 19 | Segunda resposta apresenta por ADR3



II

$c = 2\pi r$

$30 = 2 . 3,14 . r$

$30 = 6,28 . r$

$\frac{30}{6,28} = r$

$r = 4,7$ cm

$c = 2\pi r$

$20 = 2 . 3,14 . r$

$20 = 6,28 . r$

$\frac{20}{6,28} = r$

$r = 3,18$ cm

Baixo

c h

30/20

$V = \pi . r^2 . h$

$V = 3,14 . (4,7)^2 . 20$

$V = 3,14 . 22,9 . 20$

$V = 1.438,12$ cm^3

Alto

c h

20/30

$V = \pi . r^2 . h$

$V = 3,14 . (3,18)^2 . 30$

$V = 952,58$ cm^3

calculando a diferença entre os cilindros temos:

$1438,12 - 952,58 = 485,54$ cm^3 foi que faltou para completar o cilindro mais baixo.

Fonte: Arquivo do autor

Em suas resoluções, ele procurou complementar, através da linguagem materna, escrita as explicações para os procedimentos que utilizou em suas resoluções.

Observando as resoluções escritas apresentadas pelos licenciandos ADR5 (Figuras 15, 16 e 17) e ADR3 (Figuras 18 e 19), na linguagem matemática, assim como as respostas dadas aos questionamentos durante a experiência, percebemos as dificuldades que esses participantes tiveram em expressar suas ideias, na linguagem materna, escrita, e explicar os procedimentos utilizados por eles.

Constatamos, assim, que, ao explorar a leitura e a linguagem materna, escrita, na resolução de problemas matemáticos, os alunos expressam suas dificuldades, suas compreensões e avanços e, com isso, aprendem a se comunicar na linguagem matemática. Nos protocolos mostrados nas Figuras 1, 2, 4, 5, 11 e 12, percebemos esse movimento, destacado por Bandeira (2009), em que a percepção da necessidade de aprimorar a compreensão sobre determinados aspectos matemáticos (no caso, raio e diâmetro da base, área da superfície externa, altura do cilindro) que se mostraram "nebulosos", imprecisos nas escritas dos participantes, foi desencadeadora de ricos momentos de aprendizagem àqueles (futuros) professores. Ou seja, a exploração da leitura e da escrita se tornam relevantes no contexto do ensino-aprendizagem-avaliação, para a compreensão do conteúdo estudado, a partir da qual os alunos podem manifestar-se matematicamente; a partir das palavras eles podem "chegar" aos conceitos que se pretende abordar no conteúdo estudado.

Além disso, observamos que as percepções (individual e coletiva) apresentadas pelos participantes permeiam o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da linguagem materna, escrita. Dessa forma, podemos dizer que a representação escrita pode ser utilizada tanto como um instrumento para atribuir significados e permitir a apropriação de conceitos relativos a um determinado conteúdo – neste caso, sobre de cilindro – quanto como ferramenta que permite o diálogo com os pares e "com o problema" a ser resolvido, além da organização do raciocínio.

Conforme destacado por Connoly (1989 apud SANTOS, 2005) esse trânsito do discurso falado ao escrito e vice-versa ajuda a ensinar "uns aos outros". Além disso, ratifica as indicações de Allevato e Onuchic (2009) de que as trocas e discussões, especialmente na plenária, são o momento mais rico da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, no sentido de que ocorre relevante construção de conhecimento. E a escrita nessa etapa é, efetivamente, discutida e aprimorada, fazendo uma aproximação gradativa e natural à linguagem matemática formal (ALLEVATO, FERREIRA, 2013).

Assim, a leitura e a escrita nas aulas de Matemática atuam como instrumento mediador, integrando as experiências individuais e coletivas dos estudantes na busca da construção e apropriação de determinados conceitos. Além disso, cria a oportunidade de interação entre os alunos, entre os alunos e o professor, além de criar um ambiente favorável à aprendizagem em sala de aula de Matemática, resgatando, assim, a autoestima dos alunos e dos professores.

Ressalte-se que isso vai ao encontro do que se tem indicado acerca da formação inicial de professores (CURI, 2005; NUNES, 2010; COSTA, 2012), ou seja, de que os (futuros) professores devem vivenciar as práticas que se pretende que sejam levadas às suas salas de aula, em sua (futura) prática docente.

Cumpre ressaltar que a avaliação fez parte do processo a todo instante: iniciou na resolução do problema, em que o pesquisador ficou observando a maneira como os (futuros) professores interpretavam o problema e quais estratégias de resolução utilizavam, estendendo-se até o momento da plenária, em que apresentaram e discutiram suas resoluções. Nesse momento, o pesquisador avaliava o processo de resolução, não com apontamentos do tipo "está correto" ou "está errado", mas com o intuito de perceber as dificuldades demonstradas e as superadas pelos licenciandos.

Dessa forma, foi possível perceber o que eles já sabiam e de que ajuda necessitavam para superar as dificuldades encontradas. Considerar a avaliação dessa forma é valorizar as resoluções apresentadas, com a finalidade de compreender os procedimentos adotados para se chegar à solução. Essa conduta promove o envolvimento dos alunos em atividades de pensar "sobre" a Matemática que eles precisam aprender. Além disso, permite ao professor auxiliar os alunos e avaliar seu progresso, fornecendo informações relevantes para a preparação das próximas aulas.

Considerações finais

Nosso objetivo, neste trabalho, foi apresentar alguns registros de (futuros) professores de Matemática através da linguagem materna escrita, os quais foram obtidos numa experiência com a resolução de um problema envolvendo o volume do cilindro, destacando-se a importância da escrita para a compreensão do problema e para ações de interação e construção de conhecimento.

O trabalho nos revelou que é possível explorar a leitura e a escrita nas aulas de Matemática e que, quando fazemos isso através da resolução de problemas, o aluno percebe que é capaz de raciocinar por si mesmo, indo à busca de estratégias para a sua resolução. Entretanto, é necessário, para isso, que o professor esteja preparado para ser o mediador que conduz os alunos nessa "nova" iniciativa.

Além disso, como estamos acostumados a utilizar somente a linguagem matemática, encontramos dificuldades de expressar e explicar nossas resoluções em nossa língua materna escrita, as estratégias ou os caminhos utilizados para solucionar um problema. Foi o que aconteceu nesta pesquisa, em que os (futuros) professores participantes tiveram a oportunidade de se expressar por escrito, por meio da linguagem materna.

Portanto, consideramos importante que os professores promovam com seus alunos um trabalho com a representação da escrita nas aulas de Matemática, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior, inclusive nos cursos de licenciaturas. Assim, serão valorizados os diferentes modos de expressar suas estratégias de resoluções, suas soluções, quando lhes forem apresentados determinados problemas. Além disso, a prática da escrita estimula a reflexão e a busca pela clareza e pelo rigor na expressão de ideias e conceitos e na apresentação de justificativas aos processos utilizados.

O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode ser um dos caminhos para que os professores possam "aproximar" a linguagem materna escrita, dos alunos, da linguagem matemática, uma vez que, com essa metodologia de ensino, os alunos terão a oportunidade de ler e entender o problema, buscar estratégias para a resolução e, no final discutir e refletir sobre ele e sobre os registros de suas resoluções.

Nota

1 Será utilizada, neste trabalho, a expressão "(futuros) professores", pois alguns participantes já atuavam como professores, embora se encontrassem em formação inicial.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensinando Matemática na Sala de Aula através de resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 55, p. 1-19, 2009. Disponível em: http://www.ufrrj.br/SEER/index.php/gepem/article/view/54/87. Acesso em: 11 maio 2011.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; FERREIRA, Reginaldo Botelho. Leitura e escrita na aprendizagem matemática através da resolução de problemas. In: L**eituras e escritas na educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

BANDEIRA, Emanueli. Linguagem escrita em aulas de matemática – uma experiência em sala de aula. ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. **Anais**... Ijuí (Rio Grande do Sul): UNIJUÍ, 2009.

BARBOSA, Kelly Cristina Betereli Alves; NACARATO, Adair Mendes; PENHA, Paulo Cesar. A escrita nas aulas de matemática revelando crenças e produção de significados pelos alunos. **Série-Estudos** (UCDB), Campo Grande-MS, n. 26, p. 79-95, jul./dez. 2008.

CAI, Jinfa; LESTER, Frank. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? **Boletim GEPEM**. Tradução: BASTOS, Antonio Sergio Abrahão Monteiro; ALLEVATO, Norma Suely Gomes, Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, jan./jun. 2012.

COSTA, Manoel dos Santos. **Ensino-aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas**: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de matemática. 2012. 292 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática: Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

CURI, Edda. **A matemática e os professores dos anos iniciais**. São Paulo: Musa Editora, 2005.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais**. Rio de Janeiro: Record, 2007.

KRULIK, Sthephen.; RUDNICK, Jesse. **Problem-Driven Math**: applying the mathematics beyond solutions. Chicago, IL: Wright Group/McGrawHill, 2005.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Elisa Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: UPU, 1986.

MARANHÃO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. Secretaria Adjunta de Ensino. **Referenciais curriculares**: ensino médio: matemática. São Luís: SEDUC, 2007.

National Council of Teachers of Mathematics. Assessment Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

NUNES, Célia Barros. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas**: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)– Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2010.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem de Matemática através de resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisas em educação matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Trabalhando volume de cilindros através da resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista**, Canoas, n. 10. v.1. p. 95-103, jan./jul. 2009.

______; ______. Formação de Professores – Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática. In: FROTA, Maria Clara Rezende; NASSER, Lilian (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

PASSOS, Carmen Lucia Brancaglion. **Representações, interpretações e práticas pedagógicas**: a geometria em sala de aula. 2000. 398 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação: Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

SANTOS, Sandra Augusta. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Aparecida Espasandin. (Org.). **Escrituras e leituras na Educação matemática**. Autêntica: Belo Horizonte, 2005.

VAN DE WALLE, John Arthur. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIANNA, Carlos Roberto. Resolução de problemas. **Temas em educação** I. Curitiba: Futuro Congressos e Eventos, 2002.

Prof. Dr. Manoel dos Santos Costa
Universidade Ceuma | Campus Renascença | São Luís | Maranhão
Pró Reitoria Acadêmica de Graduação
Grupo de Pesquisas e Estudos Avançados em Educação Matemática | GPEAEM
Email | manolopromat@hotmail.com

Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato
Universidade Cruzeiro do Sul | Campus Liberdade | São Paulo
Centro de Exatas e Tecnológicas | CETEC
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Grupo de Pesquisas e Estudos Avançados em Educação Matemática | GPEAEM
Email | normallev@gmail.com

Recebido 7 maio 2014
Aceito 28 jul. 2014