# Determinação experimental de uma lei física linear que correlacione duas grandezas físicas vetoriais

## (Experimental resolution of a linear physical law that correlates two vector magnitudes)

Elysio R. F. Ruggeri
*Engenheiro Civil - EMOP*
*Furnas Centrais Elétricas S.A.*
*E-mail: ruggeri@furnas.com.br*

### Resumo

Duas grandezas vetoriais, **a** e **b**, postas em jogo num fenômeno físico e constituindo campos, podem estar relacionadas pela lei **b**=**ϕ.a** em que **ϕ** é uma grandeza diádica (ou tensorial de segunda ordem) constante. Nesse caso, a certo vetor **a** corresponde certo vetor **b**. A lei só estará determinada após o conhecimento de **ϕ**, o que se consegue através de medições diretas dessa grandeza. Esse artigo trata da forma de determinação indireta de **ϕ**, medindo-se, de forma direta (ou, mesmo, indireta), pares de vetores correspondentes **a** e **b**. As incertezas das medições dos vetores **a**'s e **b**'s são consideradas através de um exemplo numérico e a incerteza de **ϕ** pode ser avaliada.

**Palavras-chave**: Vetor, medição, incerteza.

### Abstract

*Two vector magnitudes, **a** and **b**, occurring toghether in a physical phenomenom, can be related by the law **b**=**ϕ.a** where **ϕ** is a constant dyadic magnitude (or a tensor of second order). In this case, for certain vector **a**, there corresponds certain vector **b**. The law will only be determined after the establishment of **ϕ**, which is possible in general by direct measurements of this magnitude. This paper deals with a indirect way to determine **ϕ** by some direct (or even indirect) measurements of the corresponding vectors **a** and **b**. Incertainties of vectors **a** and **b** are considered by a numerical example and the incertainty of **ϕ** can be evaluated.*

***Keywords**: Vector, measurements, incertainties.*

# 1. Introdução

## 1.1 Sobre as leis físicas lineares

Os fenômenos físicos se passam em domínios geométricos, D, uni, bi ou tridimensionais, supostamente determinados em relação a um dado e conveniente sistema de coordenadas S. Assim, D pode ser uma curva, uma superfície, ou uma região do espaço. Dizemos que D é campo de uma grandeza **G**, quando, a cada ponto de D, está associado um e um único valor para **G**, seja esta de natureza escalar, vetorial, diádica, etc. A trajetória de um corpo, por exemplo, é campo dos vetores: força atuante, aceleração e velocidade desse corpo.

No caso aqui estudado, ao ponto genérico P de D estão associadas as grandezas representadas pelos vetores **a** e **b**. Uma lei física linear que correlacione essas grandezas é de um dos dois tipos seguintes:

$$\mathbf{B} = K\mathbf{a}, \text{ ou } \mathbf{b} = \boldsymbol{\phi}.\mathbf{a} \qquad (01)$$

onde K é uma grandeza escalar e $\boldsymbol{\phi}$ uma grandeza diádica (ou tensorial de ordem 2), ambas não sendo dependentes de **a**, nem de **b**. As grandezas K e $\boldsymbol{\phi}$ são, por exemplo, características de um material que ocupe o espaço D, para o qual são válidas as leis (01), ou apenas uma delas. Dizemos, muitas vezes, quando não existe perigo de confusão, que **a** e **b** constituem campos (a existência de D ficando subentendida). A grandeza representada por $\boldsymbol{\phi}$, por não depender do ponto (poderá ser uma constante ou depender do tempo), não constitui um campo.

A principal lei da Mecânica, classicamente representada por **f** = M**a**, é do primeiro tipo, M representando a massa de um corpo. Ainda na Mecânica, a lei da dinâmica do corpo rígido, **j**=**I**.**w**, onde **j** é o momento angular (ou momento da quantidade de movimento do corpo), **w** a velocidade angular do corpo (em torno de um eixo) e **I** é o diádico (simétrico) de inércia do corpo, é uma lei do segundo tipo.

Muitos exemplos poderiam ser citados na área da Física. Em Engenharia, uma lei do segundo tipo é a clássica lei de Darcy de percolação da água nos materiais permeáveis. Nesse caso, o diádico $\boldsymbol{\phi}$ representa a condutividade hidráulica do material, que, submetido a um gradiente hidráulico **b** num ponto, permite a percolação da água com uma velocidade **a** (nesse mesmo ponto).

Em muitas situações, especialmente na prática da Engenharia, podemos admitir (por algum motivo que não interessa discutir aqui) a validade das leis (01); mas não se conhecem, de antemão, as grandezas K e $\boldsymbol{\phi}$, que, então, devem ser determinadas experimentalmente. Medições envolvendo incertezas em medidas são, portanto, necessárias.

O procedimento utilizado de praxe para a resolução do problema consiste, assim, em se fazerem medidas diversas das grandezas vetoriais **a** e **b**, quando possível, e tratá-las, estatisticamente, para se determinarem os valores de K e $\boldsymbol{\phi}$, que, segundo algum critério adequado (o de minimização do quadrado de alguma norma, por exemplo), melhor se adaptem ao conjunto das medidas.

A lei do tipo **b**=K**a** diz que os vetores **a** e **b** devem ser paralelos e que |**b**|=K|**a**|. Com uma série de medições de |**b**| e |**a**|, não será difícil encontrar um valor adequado para K. Se **a** e **b** deverem ter o mesmo sentido, deverá ser K > 0; em caso contrário, será K < 0. O problema da determinação da direção comum a **a** e **b** não é, assim, de solução imediata, mas um tratamento adequado dos dados resolverá o problema com alguma facilidade (o que não nos interessa no presente).

A lei do tipo **b**=$\boldsymbol{\phi}$**.a** é, evidentemente, mais complexa que a anterior. Nesse estudo, mostraremos como encontrar boas determinações de $\boldsymbol{\phi}$ mediante certos pressupostos. Quando $\boldsymbol{\phi}$ não apresenta particularidades, a solução é mais simples; mas, em geral, nas leis físicas, $\boldsymbol{\phi}$ é um diádico simétrico ($\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}^T$), o que exige um condicionamento a mais na formulação da solução. Alem disso, devemos notar que, na Física, as grandezas vetoriais **a** e **b** têm o mesmo status, isto é, tanto podemos expressar **b** em função de **a**, como **a** em função de **b**. Isto significa que $\boldsymbol{\phi}$ deve ser invertível, ou completo, devendo, pois, ter terceiro (ou determinante) diferente de zero ([1], [2]). Devemos considerar, ainda, que as medidas dos vetores **a** e **b** devem ser feitas, geralmente, pelas "coordenadas" desses vetores em relação a um mesmo sistema de referência, por exemplo, S. Nesse caso, podemos dar à forma **b**=$\boldsymbol{\phi}$**.a** de representação da lei, forma essa que independe de qualquer sistema de referência, uma representação matricial válida apenas no sistema S. Em relação a esse sistema, os vetores poderão ser representados por suas coordenadas organizadamente dispostas em matrizes-colunas 3x1; e o diádico $\boldsymbol{\phi}$, por uma matriz simétrica e invertível 3x3.

Nas condições expostas, a lei **b**=$\boldsymbol{\phi}$**.a** pode ser entendida de dois modos, úteis em muitas situações. No modo algébrico, vemos um conjunto de três números variáveis - as coordenadas $A_1$, $A_2$, $A_3$ de **a** - se transformar em um conjunto de três outros números, também variáveis - as coordenadas $B_1$, $B_2$, $B_3$ de **b** - mediante a matriz constante [$\boldsymbol{\phi}$] associada à grandeza $\boldsymbol{\phi}$, de elementos $\phi_{ij}$; e escrevemos:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}, \text{ com } \phi_{ij}=\phi_{ji} \text{ (i,j = 1, 2, 3)} \qquad (02)$$

Conforme mencionamos, fazendo diversas medições dos pares de ternos $A_i$ e $B_i$, deveremos determinar o conjunto dos seis números: $\phi_{11}$, $\phi_{12}=\phi_{21}$, $\phi_{13}=\phi_{31}$, $\phi_{23}=\phi_{32}$, $\phi_{22}$ e $\phi_{33}$, que satisfaz (02).

No modo geométrico podemos entender a lei **b**=$\boldsymbol{\phi}$**.a** como a transformação linear do vetor **a** do espaço no vetor **b** do espaço, mediante o operador $\boldsymbol{\phi}$; ou, em relação ao ponto P, como a transformação (linear) da extremidade do vetor **a** (suposto aplicado em P), na extremidade do vetor **b** (também suposto aplicado em P). Visto de outra forma, poderemos sempre fazer a imagem de todos os vetores **a** e **b** (dos campos já definidos) aplicados em um mesmo ponto arbitrário do espaço (eventualmente exterior a D). As extremidades dos vetores **a** e **b** ocupariam cada uma região do espaço - a hodógrafa do vetor; diríamos que essas hodógrafas se correspondem linearmente mediante o operador $\boldsymbol{\phi}$[1].

## 1.2 Um teorema fundamental

Suponhamos, agora, que, de alguma forma, sejam conhecidos três pares de vetores: ($\mathbf{a}_1$,$\mathbf{b}_1$), ($\mathbf{a}_2$,$\mathbf{b}_2$) e ($\mathbf{a}_3$,$\mathbf{b}_3$), que devam estar correlacionados mediante a lei geral $\mathbf{b}=\boldsymbol{\phi}.\mathbf{a}$, cujo operador (simétrico e invertível) pretendemos determinar. Vamos considerar, inicialmente, que todos os vetores tenham sido determinados com precisão, sem erros. Nestas condições, podemos aplicar aos conjuntos um teorema clássico da Álgebra dos Diádicos ([1], [2], [3]), sintetizado pela expressão seguinte:

$$\text{se } \mathbf{b}_i=\boldsymbol{\phi}.\mathbf{a}_i \text{ com } i=1,2,3, \text{ e } (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3)\neq 0, \text{ então: } \boldsymbol{\phi}=\mathbf{b}_i\mathbf{a}^i \qquad (03)$$

onde os $\mathbf{a}^i$ são os vetores recíprocos dos $\mathbf{a}_i$.

Vemos por (03) que, não havendo erros na determinação dos pares ($\mathbf{a}_i$,$\mathbf{b}_i$), o diádico simétrico $\boldsymbol{\phi}$ está determinado. Como, por hipótese, os $\mathbf{b}_i$ são independentes, $\boldsymbol{\phi}$ é completo.

Cabe registrar que o teorema sintetizado por (03) é geral, não exigindo que $\boldsymbol{\phi}$ seja simétrico. Por outro lado, se $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}^T$, seu vetor é nulo (e reciprocamente), isto é,

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^T \Leftrightarrow \boldsymbol{\phi}_V = \mathbf{b}_i \times \mathbf{a}^i = \mathbf{o} \qquad (04)$$

o que nos leva a concluir que, nesse caso, os ternos ($\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$) não são totalmente arbitrários.

Consideremos o terno de vetores $\mathbf{a}_i$: (1;0;1), (2;1;-1), (0;1;2) e o de vetores $\mathbf{b}_i$: (2;0;5), (-4,1;3), (7;-4;3), ambos referidos ao sistema S. Os recíprocos dos **a**'s, referidos ao mesmo sistema, são: (3;-4;2)/5, (1;2;-1)/5, (-1;3;1)/5. Então,

$$[\phi] = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}2\\0\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\-4\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\1 & -2 & -1\\3 & -1 & 2\end{bmatrix} \qquad (05)$$

A verificação da expressão (02) pode ser feita imediatamente, multiplicando-se [$\phi$] pelas colunas dos **b**'s.

A situação anteriormente apresentada é perfeita do ponto de vista matemático. Na realidade, em vista da necessidade de medições das grandezas, medições essas realizadas por pessoas, seguindo algum método e utilizando instrumentos e equipamentos, aquelas medidas dos vetores são infestadas de erros, isto é, as medidas são incertas. Suponhamos, então, que aqueles mesmos vetores, agora incertos e denotados por $\mathbf{a}_{medi}$ e $\mathbf{b}_{medi}$, tenham as seguintes coordenadas:

$\mathbf{a}_{med1}\equiv(0,97;0;1,02)$, $\mathbf{a}_{med2}\equiv(2,02;0,97;-0,99)$, $\mathbf{a}_{med3}\equiv(0;1,05;1,94)$ e

$\mathbf{b}_{med1}\equiv(1,90;0;5,25)$, $\mathbf{b}_{med2}\equiv(-3,94;1,03;2,82)$, $\mathbf{b}_{med3}\equiv(5,61;-4,08;3,21)$.

Os **a**'s apresentam perturbações da ordem de 5%, para mais ou para menos; e os **b**'s, da ordem de 7%.

Como o produto misto dos novos **a**'s é diferente de zero (ele é igual a 4,997), eles são independentes e admitem os recíprocos:

$\mathbf{a}_{med}^1\equiv(0,58;-0,78;0,42)$,

$\mathbf{a}_{med}^2\equiv(0,21;0,38;-0,20)$,

$\mathbf{a}_{med}^3\equiv(-0,20,0,60;0,19)$.

Ao aplicarmos o teorema expresso por (03) e seguirmos os mesmos passos de cálculo anteriormente apresentados, encontramos:

$$[\phi_{med}] = \begin{bmatrix}-1{,}022 & 0{,}961 & 2{,}834\\1{,}028 & -2{,}077 & -0{,}977\\3{,}033 & -1{,}117 & 2{,}254\end{bmatrix} \qquad (05_1)$$

Vê-se, assim, que as perturbações nas medidas destruíram a esperada simetria que a matriz [$\phi_{med}$] deveria apresentar. Sendo absolutamente necessário que a matriz-solução do problema seja simétrica, dever-se-á procurar algum método convincente, que, tornando-a simétrica, aproxime-a do seu verdadeiro valor dado por (05). Nesse caso, se essa matriz existir e se for determinada, ela deverá ser a que melhor se adapte ao conjunto das medidas efetuadas dos vetores **a**'s e **b**'s.

# 2. Uma solução analítica para o problema

Como as medidas $\mathbf{a}_{medi}$ e $\mathbf{b}_{medi}$ estão infestadas de erros, por melhor que seja a determinação do diádico $\boldsymbol{\phi}$, para a escrita da lei, deveremos escrever, para duas medidas quaisquer, $\mathbf{b}_i=\boldsymbol{\phi}.\mathbf{a}_i+\mathbf{d}_i$ e $\mathbf{b}_j=\boldsymbol{\phi}.\mathbf{a}_j+\mathbf{d}_j$ para i,j=1,2,3, os vetores $\mathbf{d}_i$ e $\mathbf{d}_j$ representando vetores-erros, que, idealmente, permitem escrever as igualdades. Esses vetores-erros são, pois, $\mathbf{d}_i=\mathbf{b}_i-\mathbf{a}_i.\boldsymbol{\phi}$ e $\mathbf{d}_j=\mathbf{b}_j-\boldsymbol{\phi}.\mathbf{a}_j$, notando-se que, na primeira expressão, levamos em consideração que, por ser $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}^T$, $\boldsymbol{\phi}.\mathbf{a}_i=\mathbf{a}_i.\boldsymbol{\phi}$. O produto escalar dos vetores-erros é, então:

$$\mathbf{d}_i.\mathbf{d}_j=\mathbf{b}_i.\mathbf{b}_j-\mathbf{b}_i.\boldsymbol{\phi}.\mathbf{a}_j-\mathbf{a}_i.\boldsymbol{\phi}.\mathbf{b}_j+\mathbf{a}_i.\boldsymbol{\phi}^2.\mathbf{a}_j$$

---

[1] Decorreria disso uma série de propriedades. Por exemplo: três pontos colineares numa região seriam colineares na outra; um fragmento de plano numa região seria um fragmento de plano na outra, etc.

Vamos procurar um diádico (simétrico) que torne mínimos todos os produtos escalares dos vetores-erros. Isto significa que, para i=j, estamos minimizando as normas dos vetores-erros e que, para i≠j, que eles (não nulos) tendem a ser ortogonais entre si (para que seu produto escalar se anule).

Para tal, devemos igualar ao diádico nulo, **O**, a derivada da expressão do produto escalar em relação ao diádico $\boldsymbol{\phi}$. Tem-se, conforme as regras do Cálculo Poliádico ([3]):

$$\frac{d\phi}{d\phi} = {}^4\mathbf{I} \text{ e } \frac{d\phi^2}{d\phi} = \phi .\ {}^4\mathbf{I} + {}^4\mathbf{I} . \phi .$$

Logo

$$\mathbf{b}_i \,.\, {}^4\mathbf{I} \,.\, \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_i \,.\, {}^4\mathbf{I} \,.\, \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i \,.\, (\boldsymbol{\phi} \,.\, {}^4\mathbf{I} + {}^4\mathbf{I} \,.\, \boldsymbol{\phi}) \,.\, \mathbf{a}_j$$

Sendo $\mathbf{b}_i \,.\, {}^4\mathbf{I} \,.\, \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \mathbf{b}_i$ e, logo

$\mathbf{a}_i \,.\, (\boldsymbol{\phi} \,.\, {}^4\mathbf{I} + {}^4\mathbf{I} \,.\, \boldsymbol{\phi}) \,.\, \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i \,.\, \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi} \,.\, \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i$, vem:

$$\mathbf{a}_j \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i \,.\, \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi} \,.\, \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i , \qquad (06)$$

Relembrando que $\boldsymbol{\phi}$ deve ser simétrico ($\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}^T$) e observando que

$(\mathbf{a}_j\mathbf{a}_i.\boldsymbol{\phi})_E = \boldsymbol{\phi}:\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = (\boldsymbol{\phi}.\mathbf{a}_j).\mathbf{a}_i = (\boldsymbol{\phi}.\mathbf{a}_j\mathbf{a}_i)_E = \boldsymbol{\phi}:\mathbf{a}_j\mathbf{a}_i$, deduzimos, tomando o escalar em (06): $\mathbf{a}_j \,.\, \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_i \,.\, \mathbf{b}_j = 2\boldsymbol{\phi} : \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i$. Pós-justapondo a ambos os membros dessa igualdade a díade $a^j a^i$, agrupando-a convenientemente e somando-a em i e j, vem:

$\mathbf{a}^j(\mathbf{a}_j \,.\, \mathbf{b}_i)\,\mathbf{a}^i + \mathbf{a}^j(\mathbf{b}_j \,.\, \mathbf{a}_i)\,\mathbf{a}^i = 2\boldsymbol{\phi} : \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j \mathbf{a}^i = 2\boldsymbol{\phi}$, ou, finalmente,

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_i \mathbf{a}^i + \mathbf{a}^i \mathbf{b}_i) \qquad (07)$$

O diádico $\boldsymbol{\phi}_{med} = \mathbf{b}_i\, \mathbf{a}^i$ pode ser calculado com os vetores medidos $\mathbf{b}_{medi}$ e $\mathbf{a}_{medi}$, tal como fora feito aplicando o teorema sintetizado por (03); seria o diádico tal que $\mathbf{b}_{medi} = \boldsymbol{\phi}_{med} \,.\, \mathbf{a}_{medi}$ (sem erros). No exemplo numérico anteriormente apresentado, o diádico é representado pela matriz ($05_1$). O diádico $\boldsymbol{\phi}_{med}$ não é simétrico certamente, mas, conforme (07), o diádico que nos interessa (o procurado) deve ser a sua parte simétrica, isto é,

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi}_{med} + \boldsymbol{\phi}_{med}{}^T) \qquad (08)$$

Este é, pois, o diádico simétrico que melhor se ajusta ao conjunto dos vetores medidos segundo o critério adotado, mas o faz com uma incerteza dada pela parte anti-simétrica de $\boldsymbol{\phi}_{med}$, pois

$$\boldsymbol{\phi}_{med} = \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi}_{med} - \boldsymbol{\phi}_{med}{}^T); \text{ isto é,}$$

$$\text{Incerteza de } \boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi}_{med} - \boldsymbol{\phi}_{med}{}^T) \qquad (08_1)$$

A incerteza de $\boldsymbol{\phi}$ será tanto menor quanto menor for a norma de sua incerteza.

## 3. Aplicação numérica para pequenas perturbações

Para o caso do exemplo numérico apresentado, com pequenas perturbações, tem-se:

$$[\boldsymbol{\phi}] = \frac{1}{2}([\boldsymbol{\phi}_{med}] + [\boldsymbol{\phi}_{med}]^T) = \begin{bmatrix} -1{,}022 & 0{,}995 & 2{,}933 \\ 0{,}995 & -2{,}077 & -1{,}047 \\ 2{,}933 & -1{,}047 & 2{,}254 \end{bmatrix} \qquad (09)$$

A incerteza de $[\boldsymbol{\phi}]$ é dada pela matriz

$$[\text{Incerteza}\,\boldsymbol{\phi}] = \frac{1}{2}([\boldsymbol{\phi}_{med}] - [\boldsymbol{\phi}_{med}]^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}033 & 0{,}100 \\ -0{,}033 & 0 & 0{,}070 \\ -0{,}100 & -0{,}070 & 0 \end{bmatrix} \qquad (09_1)$$

cuja norma é igual a 0,0319.

Se $[\boldsymbol{\phi}]$ é uma avaliação adequada, conforme o critério adotado, então $\mathbf{b}_{calci} = [\boldsymbol{\phi}].\mathbf{a}_{medi}$. Assim,

$$\{\mathbf{b}_{calc1}\} = \begin{bmatrix} 2{,}000 \\ -0{,}103 \\ 5{,}145 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{b}_{calc2}\} = \begin{bmatrix} -4{,}005 \\ 1{,}031 \\ 2{,}679 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \{\mathbf{b}_{calc3}\} = \begin{bmatrix} 6{,}735 \\ -4{,}212 \\ 3{,}274 \end{bmatrix},$$

são melhores avaliações para $\mathbf{b}_{med1}$, $\mathbf{b}_{med2}$ e $\mathbf{b}_{med3}$, respectivamente, às quais correspondem os vetores-erros:

$\mathbf{d}_1 \equiv (-0{,}10; 0{,}10; 0{,}10)$, $\mathbf{d}_2 \equiv (0{,}07; -0; 0{,}141)$, $\mathbf{d}_3 \equiv (-0{,}26; 0{,}13; -0{,}06)$, de normas respectivamente iguais a 0,032, 0,024 e 0,072. Os ângulos formados por esses vetores podem ser determinados com facilidade; o de $\mathbf{d}_1$ com $\mathbf{d}_2$ é de 73° , o de $\mathbf{d}_2$ com $\mathbf{d}_3$ é de 125° e o de $\mathbf{d}_3$ com $\mathbf{d}_1$ é de 52°.

Sendo $[\boldsymbol{\phi}_{(1)}]^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}374 & -0{,}344 & 0{,}327 \\ -0{,}344 & -0{,}707 & 0{,}120 \\ 0{,}327 & 0{,}120 & 0{,}073 \end{bmatrix}$, podemos obter, também, melhores avaliações: $\mathbf{a}_{calc1}$, $\mathbf{a}_{calc2}$ e $\mathbf{a}_{calc3}$ para os **a**'s medidos; sendo $\{\mathbf{a}_{calci}\} = [\boldsymbol{\phi}]^{-1} \,.\, \{\mathbf{b}_{medi}\}$, encontramos:

$$\{\mathbf{a}_{calc1}\} = \begin{bmatrix} 1{,}006 \\ -0{,}026 \\ 1{,}007 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{a}_{calc2}\} = \begin{bmatrix} 2{,}042 \\ 0{,}965 \\ -0{,}958 \end{bmatrix}, \text{ e } \quad \{\mathbf{a}_{calc3}\} = \begin{bmatrix} 0{,}018 \\ 1{,}027 \\ 1{,}877 \end{bmatrix}.$$

Os vetores-erros correspondentes e os respectivos ângulos poderiam ser avaliados como anteriormente.

## 4. Ampliação do método

Suponhamos que fosse viável a determinação de M>3 pares de vetores correspondentes (**a**,**b**). Poderia haver, entre eles, até $C_M^3$ ternos com vetores **a**'s linearmente independentes, mas, por hipótese, existe, pelo menos, um terno nessas condições.

Uma primeira alternativa para a resolução do problema consiste em se selecionarem os N ternos de pares que apresentem **a**'s linearmente independentes (logo, $1 \leq N \leq C_M^3$) e com cada terno determinar-se uma matriz como indicado anteriormente. Far-se-ia, em seguida, uma estatística com essas matrizes, determinando-se uma matriz média e uma matriz de variância/covariância.

Uma segunda alternativa consiste em tratar os dados simultaneamente, determinando-se uma única matriz (simétrica) que melhor se ajuste aos dados. Como visto, a cada medição corresponde uma equação da forma $\mathbf{d}_j = \mathbf{b}_j - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{a}_j$ para j=1,2,...,M. Em geral, para facilidade das medições, esses vetores estão referidos a uma base ortonormada e são representados por suas coordenadas, isto é, a equação vetorial pode ser representada por uma equação matricial da forma $\{\mathbf{d}\}=\{\mathbf{b}\}-[\boldsymbol{\phi}].\{\mathbf{a}\}$, onde $\{\mathbf{d}\}$, $\{\mathbf{b}\}$ e $\{\mathbf{a}\}$ são matrizes-colunas 3x1 ($\{\mathbf{b}\}$ e $\{\mathbf{a}\}$ sendo conhecidas e $[\boldsymbol{\phi}]$ - a incógnita - uma matriz simétrica 3x3. O conjunto dessas M equações pode ser representado na forma compacta $[\mathbf{d}]=[\mathbf{B}]-[\boldsymbol{\phi}].[\mathbf{A}]$, sendo $[\mathbf{d}]$, $[\mathbf{B}]$ e $[\mathbf{A}]$ de ordem 3xM. As colunas de $[\mathbf{B}]$ são formadas com as coordenadas dos vetores **b**'s; da mesma forma, as colunas de $[\mathbf{A}]$ são formadas com os vetores **a**'s. Então, se $[\mathbf{d}]^T$ é a transposta de $[\mathbf{d}]$:

$$[\mathbf{d}]^T.[\mathbf{d}]=[\mathbf{D}]=[\mathbf{B}]^T.[\mathbf{B}]-[\mathbf{B}]^T.[\boldsymbol{\phi}].[\mathbf{A}]-[\mathbf{A}]^T.[\boldsymbol{\phi}].[\mathbf{B}]+[\mathbf{A}]^T.[\boldsymbol{\phi}]^2.[\mathbf{A}] \quad (10)$$

a ordem de $[\mathbf{D}]$ sendo MxM. Os elementos da diagonal principal de $[\mathbf{D}]$ representam as normas dos vetores-erros; os demais representam os produtos escalares desses vetores. Podemos procurar a matriz simétrica $[\boldsymbol{\phi}]$, que torne a matriz $[\mathbf{D}]$ tão próxima da matriz zero MxM, quanto possível. Isto significa que, para esse valor de $[\boldsymbol{\phi}]$, a derivada de $[\mathbf{D}]$ em relação a $[\boldsymbol{\phi}]$ deve ser nula, ou seja, que

$$2\,[\mathbf{A}]^T.[\boldsymbol{\phi}].[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]^T.[\mathbf{A}] + [\mathbf{A}]^T.[\mathbf{B}] \quad (11).$$

A matriz simétrica 3x3

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{A}].[\mathbf{A}]^T \quad (12)$$

é regular, porque, por hipótese, pelo menos três entre os vetores **a**'s são linearmente independentes (ver apêndice I). Pré-multiplicando (11) por $[\mathbf{A}]$, pós-multiplicando por $[\mathbf{A}]^T$, vem:

$$2[\mathbf{A}].[\mathbf{A}]^T.[\boldsymbol{\phi}].[\mathbf{A}].[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{A}].[\mathbf{B}]^T.[\mathbf{A}].[\mathbf{A}]^T + [\mathbf{A}].[\mathbf{A}]^T.[\mathbf{B}].[\mathbf{A}]^T,$$

de onde deduzimos, pré e pós-multiplicando ambos os membros por $S^{-1}$:

$$[\boldsymbol{\phi}] = ([\mathbf{S}]^{-1}.[\mathbf{A}].[\mathbf{B}]^T + [\mathbf{B}].[\mathbf{A}]^T.[\mathbf{S}]^{-1})/2 \quad (13)$$

Pondo

$$[\boldsymbol{\psi}]=[\mathbf{S}]^{-1}.[\mathbf{A}].[\mathbf{B}]^T, \text{ donde } [\boldsymbol{\psi}]^T = [\mathbf{B}].[\mathbf{A}]^T.[\mathbf{S}]^{-1} \quad (14)$$

resulta, finalmente,

$$[\boldsymbol{\phi}] = ([\boldsymbol{\psi}] + [\boldsymbol{\psi}]^T)/2 \quad (15)$$

Se não houvesse incertezas, a matriz $[\boldsymbol{\psi}]$ seria a solução do problema, pois seria simétrica. A incerteza com que é determinada $[\boldsymbol{\psi}]$, isto é, a sua parte anti-simétrica, pode ser transferida para a matriz $[\boldsymbol{\phi}]$; assim,

$$[\mathrm{Inc}\,\boldsymbol{\phi}]=([\boldsymbol{\psi}] - [\boldsymbol{\psi}]^T)/2 \quad (16)$$

### 4.1 Um exemplo numérico

Aos dados do exemplo numérico apresentado no item 3 (três vetores **a**'s linearmente independentes), vamos juntar o novo par de medidas dos vetores: $\mathbf{a}_{med4} \equiv (2{,}07;\ 2{,}91;\ 1{,}02)$ e $\mathbf{b}_{med4} \equiv (3{,}80;\ -5{,}15;\ 5{,}30)$, caso em que M = 4 e $1 \leq N$. Então,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0{,}97 & 2{,}02 & 0 & 2{,}07 \\ 0 & 0{,}97 & 1{,}05 & 2{,}91 \\ 1{,}02 & -0{,}99 & 1{,}94 & 1{,}02 \end{bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1{,}90 & -3{,}94 & 5{,}61 & 3{,}80 \\ 0 & 1{,}03 & -4{,}08 & -5{,}15 \\ 5{,}25 & 2{,}82 & 3{,}21 & 5{,}30 \end{bmatrix}.$$

Logo, considerando (12) e (14):

$$[S] = \begin{bmatrix} 9{,}306 & 7{,}983 & 1{,}101 \\ 7{,}983 & 10{,}512 & 4{,}045 \\ 1{,}101 & 4{,}045 & 6{,}825 \end{bmatrix},$$

$$[S]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}399 & -0{,}361 & 0{,}149 \\ -0{,}361 & 0{,}449 & -0{,}208 \\ 0{,}149 & -0{,}208 & 0{,}246 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} -0{,}959 & 1{,}045 & 3{,}041 \\ 0{,}979 & -2{,}160 & -1{,}131 \\ 2{,}592 & -0{,}968 & 2{,}260 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\boldsymbol{\phi}$ que melhor se ajusta ao conjunto das quatro medidas e sua incerteza são, assim, conforme (15) e (16):

$$[\boldsymbol{\phi}] = \begin{bmatrix} -0{,}959 & 1{,}012 & 2{,}817 \\ 1{,}012 & -2{,}160 & -1{,}050 \\ 2{,}817 & -1{,}050 & 2{,}260 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$[\mathrm{Inc}\,\boldsymbol{\phi}] = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}030 & 0{,}224 \\ -0{,}030 & 0 & -0{,}082 \\ -0{,}224 & 0{,}082 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A matriz obtida, $[\boldsymbol{\phi}]$, pode ser comparada com a matriz não perturbada (05), levando-se em conta os percentuais de perturbação praticados (até 5% para os **a**'s e até 7% para os **b**'s).

## 5. Resumo e conclusões

Sendo certo que a lei representativa do fenômeno em estudo é do tipo linear, $\mathbf{b}=\phi.\mathbf{a}$, com $\phi=\phi^T$, pretende-se determinar a matriz simétrica associada ao diádico $\phi$ em relação a uma base escolhida. Para isso, é necessário que sejam efetuadas as medidas de três pares de vetores ($\mathbf{b}$,$\mathbf{a}$), cada par relativo a um ponto do domínio em que ocorre o fenômeno, com a condição adicional de que os vetores **a**'s sejam linearmente independentes. Seguindo-se, então, o roteiro apresentado, chega-se à matriz-solução do problema.

Ora, existindo incerteza nas medidas efetuadas, para se determinarem os vetores, existirá, também, uma incerteza na matriz calculada, associada à grandeza $\phi$. Podemos conhecer as incertezas com que são medidos os vetores, pois estas são funções dos métodos e instrumentos utilizados para as determinações; mas não dispomos, ainda, de argumentos que permitam correlacionar a incerteza de $\phi$ com as incertezas dos **a**'s e dos **b**'s. Os valores obtidos para $[\phi]$ mostram que seus elementos podem estar determinados com incerteza igual à soma das incertezas dos vetores, mas isso poderá não ser válido, se as incertezas dos vetores forem maiores.

## 6. Referências bibliográficas


1. WILSON, E. B. ***Vector analysis***. New Haven: Yale University Press, 1902. 436p.
2. MOREIRA, L. C. de A. Diádicos. ***REM - Revista Escola de Minas***, v. 25, n.3, 1966.
3. RUGGERI, E. R. F. ***Tratado de Cálculo Poliádico***. Dois tomos. (Em preparação).


## APÊNDICE I

Para provar que $\mathbf{A}.\mathbf{A}^T$ é regular, basta expressar os quatro vetores **a**'s na base definida pelos três primeiros. Nesse caso, se $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ é o sistema recíproco de $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{a}_4.\mathbf{a}^1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{a}_4.\mathbf{a}^2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{a}_4.\mathbf{a}^3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A.A^T = \begin{bmatrix} 1+(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^1)^2 & (\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^1)(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^2) & (\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^1)(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^3) \\ (\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^1)(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^2) & 1+(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^2)^2 & (\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^2)(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^3) \\ (\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^1)(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^3) & (\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^2)(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^3) & 1+(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^3)^2 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de $\mathbf{A}.\mathbf{A}^T$, encontra-se o valor $1+(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^1)^2+(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^2)^2+(\mathbf{a}_4.\mathbf{a}^3)^2$, trivialmente diferente de zero.

No caso de dispormos de cinco ou mais medidas, poderíamos demonstrar a não nulidade do determinante de $\mathbf{A}.\mathbf{A}^T$, seguindo caminho idêntico, não sem um trabalho substancial a mais.

**Artigo recebido em 13/02/2006 e aprovado em 11/05/2007.**