



Rem: Revista Escola de Minas

ISSN: 0370-4467

editor@rem.com.br

Escola de Minas

Brasil

Pina Ferreira, Maurício de; Carvalho de Oliveira, Dênio Ramam  
Contribuição ao estudo de lajes lisas unidireccionais de concreto armado com pilares retangulares ao  
punctionamento

Rem: Revista Escola de Minas, vol. 60, núm. 4, octubre-diciembre, 2007, pp. 621-628

Escola de Minas

Ouro Preto, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56416459007>

- ▶ Como citar este artigo
- ▶ Número completo
- ▶ Mais artigos
- ▶ Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe , Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

## Contribuição ao estudo de lajes lisas unidireccionais de concreto armado com pilares retangulares ao punctionamento

(Contribution to the study of one-way reinforced concrete flat slabs with rectangular columns under punching)

Maurício de Pina Ferreira

Doutorando em Engenharia Civil, Universidade de Brasília  
E-mail: mpinaf@gmail.com

Dênio Ramam Carvalho de Oliveira

Professor Doutor, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará  
E-mail: denio@ufpa.br

### Resumo

São apresentadas análises das recomendações para estimar a resistência ao punctionamento de lajes lisas de acordo com a versão atual da norma brasileira, a NBR 6118:2003, que não considera o efeito da retangularidade de pilares internos, e sua predecessora, a NBR 6118:1980. Em seções transversais retangulares, o índice de polarização das tensões de cisalhamento é crescente. Isto altera a forma de ruptura da laje, já que a punção se inicia em torno das extremidades da seção do pilar, não se estendendo para os lados maiores, como prescreve a norma, comportamento este que reduz a resistência última das lajes frente às estimativas normativas. São apresentados os resultados de uma análise numérica por elementos finitos (M.E.F) e uma proposta para melhorar a ductilidade das lajes lisas através das dimensões mínimas dos pilares. Observou-se que a NBR 6118:1980 mostrou-se conservadora e que as estimativas da NBR 6118: 2003 podem ser melhoradas.

**Palavras-chave:** Laje lisa, punção, pilar retangular.

### Abstract

*Analysis of recommendations to predict the ultimate punching resistance of flat slabs according to the actual Brazilian code, NBR 6118:2003, which does not consider the effects of the internal columns' rectangularity, and its previous version, NBR 6118:1980, are presented. In rectangular cross sections, the shear stress polarization rate is crescent. Thus, the slab failure mode changes, since the punching failure takes place at the column's ends, without compromising the larger sides, as recommended by the new version of the code. This behavior tends to reduce the ultimate punching resistance of flat slabs when the normative estimates are compared. In addition to the results from the two codes, are presented a numerical analysis by the Finite Element Method and a proposal to improve the ductility of flat slabs based on the minimal dimensions for rectangular columns. The results showed that the NBR 6118:2003 estimates can be improved.*

**Keywords:** Reinforced concrete, flat slab, punching, rectangular column.

## 1. Introdução

Entre as diversas vantagens da utilização de lajes lisas em relação ao sistema convencional com vigas, a velocidade de execução, economia de fôrmas e a liberdade de posicionamento de divisórias (paredes) são imediatamente identificadas. Contudo o estudo da principal desvantagem das lajes lisas, o punctionamento, ainda é motivo de controvérsias normativas. Apesar de o punctionamento na maioria das vezes coordenar o dimensionamento das lajes lisas, algumas normas não consideram a contribuição da armadura de flexão. Já outras normas consideram tal contribuição, mas nada trazem sobre a influência das condições de apoio e carregamento na resistência ao cisalhamento em torno de cargas ou áreas concentradas, principalmente quando essas áreas são retangulares e apresentam relação entre os lados maior que 2 (índice de retangularidade  $r$ ). Serão discutidas as recomendações e resultados obtidos com as normas brasileiras NBR 6118:1980 e sua nova versão, a NBR 6118:2003, que passou a vigorar em 2004.

### 1.1 Critérios normativos

A NBR 6118:1980, versão anterior da atual norma brasileira, recomenda um perímetro de controle indiferente para índices de retangularidade menores ou iguais a 3. Para as demais situações, o perímetro torna-se independente do maior lado do pilar, como mostra a Figura 1.

Esse perímetro  $u$  é então utilizado para estimar a resistência das lajes, de acordo com a equação 1. Observa-se que a NBR 6118:1980 não considera a influência da armadura de flexão, que poderia ser utilizada para aumentar a capacidade re-

sistente característica das lajes ao punctionamento ( $V_{Rk}$ ), e limita a resistência das lajes estabilizando o perímetro de controle para índices de retangularidade acima de 3.

$$V_{Rk} \leq 0,32 \cdot \sqrt{f_{ck}} \cdot u \cdot d \quad (\text{Eq. 1})$$

Considerando a influência da armadura de flexão, independente de sua tensão de escoamento, a atual versão da norma brasileira, a NBR 6118:2003, recomenda um perímetro de controle que acompanha as dimensões de pilares internos, ou seja, para uma laje com as mesmas características físicas e mecânicas, a tensão de cisalhamento será constante e a resistência da laje ( $V_{Rk} = 1,4 \cdot V_{Rd}$ ) será proporcional às dimensões dos pilares, conforme a equação 2. A Figura 2 mostra o perímetro recomendado pela NBR 6118:2003.

$$V_{Rk} = 0,182 \cdot (1 + \sqrt{200/d}) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} \cdot u \cdot d \quad (\text{Eq. 2})$$

Para o melhor entendimento da influência do perímetro de controle e da relação  $c_{máx}/d$  na resistência das lajes, a Figura 3 mostra as tendências das duas versões da norma brasileira quando apenas os perímetros são comparados. Para eliminar a influência da tensão de cisalhamento máxima permitida, a resistência ao punctionamento foi dividida por uma resistência de referência, tomando-se um pilar quadrado com  $c = 2 \cdot d$ . Nas situações onde a laje está apoiada em pilares quadrados, com lados acima de  $2 \cdot d$ , as estimativas da NBR 6118:1980 crescem significativamente quando o lado do pilar aumenta. Nesse caso, deve-se ressaltar que o punctionamento pode ocorrer exatamente nos cantos do pilar. Isto também ocorre com a NBR 6118:2003, porém mais ensaios são necessários.

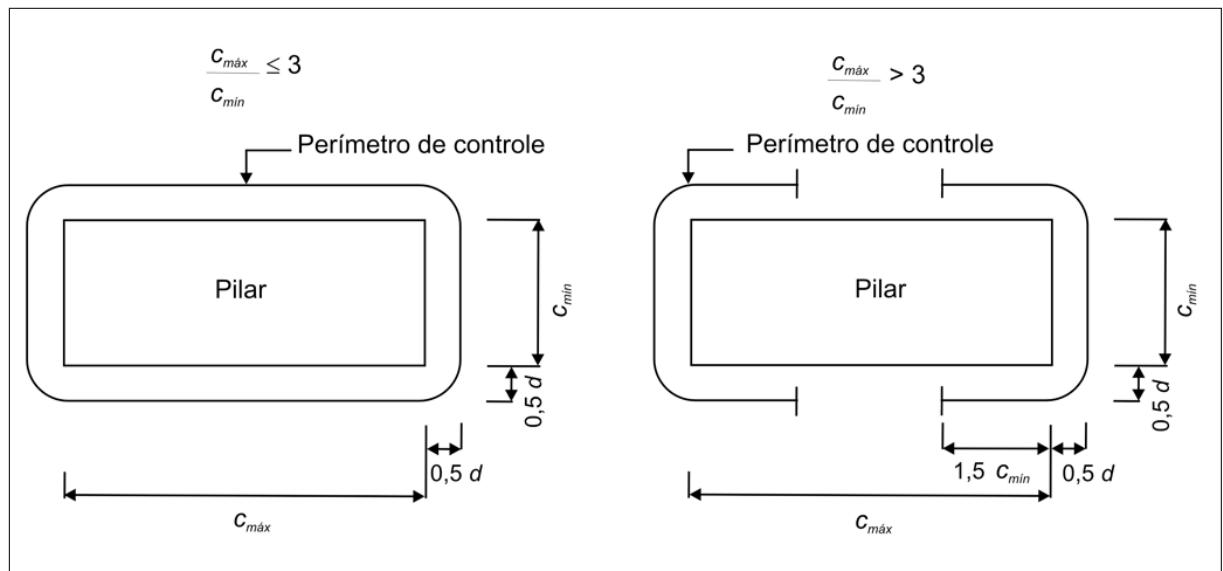


Figura 1 - Perímetros de controle recomendados pela norma NBR 6118:1980

Ainda considerando a NBR 6118:1980, verifica-se novamente que a influência do perímetro de controle é mais intensa para índices de retangularidade menores que 3 e relações  $C_{máx}/d$  acima de 4,5, aproximadamente. Para índices de retangularidade acima de 3, a influência do perímetro de controle é menos relevante. Ressalta-se que as recomendações normativas não consideram o comportamento das lajes sob flexão. Neste caso, por exemplo, lajes solicitadas perpendicularmente aos maiores lados do pilar devem considerar um perímetro de controle menor, isto é claramente demonstrado no trabalho de Hawkins et al. (1971). A curva adicional para essa situação seria bem menos inclinada em relação às demais na Figura 3, indicando a imprecisa consideração de um perímetro contornando um pilar com índice de retangularidade elevado, pois a ruptura ocorre em torno das extremidades do pilar, percorrendo um perímetro significativamente menor.

## 2. Efeitos da flexão na punção

Para ilustrar o escopo desse trabalho, optou-se pela análise de um pavimento-tipo de uma edificação comercial já construída. A Figura 4 mostra a configuração dos pilares do pavimento-tipo e as dimensões das lajes. Os pilares apresentam dimensões de (300 x 1.200) mm, fornecendo índice de retangularidade 4. As lajes têm 200 mm de altura e são predominantemente unidirecionais e essa característica se mantém na análise global da laje. A disposição desses pilares, como no caso dos pilares P12, P13 e P14, é fundamental para a distribuição e intensidade dos momentos-fletores e esforços cortantes que atingem as faces dos pilares. O painel de lajes foi então modelado e calculado utilizando o Método dos Elementos Finitos (M.E.F.), através do programa SAP2000n. O elemento utilizado foi o *Shell* retangular de 4 nós. A resistência do concreto foi de 30 MPa, com módulo de elasticidade estimado de acordo com a NBR 6118:2003. A carga total adotada foi de 11 kN/m<sup>2</sup>.

Os resultados para os momentos fletores máximos são mostrados na Figura 5. Percebe-se a elevada concentração de momentos-fletores negativos nas extremidades dos pilares, sendo mais acentuada nos pilares dispostos longitudinalmente. A Figura 6 mostra a distribuição dos esforços cortantes máximos nas proximidades dos pilares. Essa distribuição concorda com a dos momen-

tos-fletores, porém fica evidente a polarização do esforço cortante, indicando que, para lajes de concreto armado, as fissuras radiais, que partem dos pilares em direção às bordas das lajes, podem se concentrar nas extremidades dos pilares, impedindo que as fissuras tangenciais, que tendem a formar círculos em torno dos pilares e conectam as fissuras radiais, ocupem as regiões intermediári-

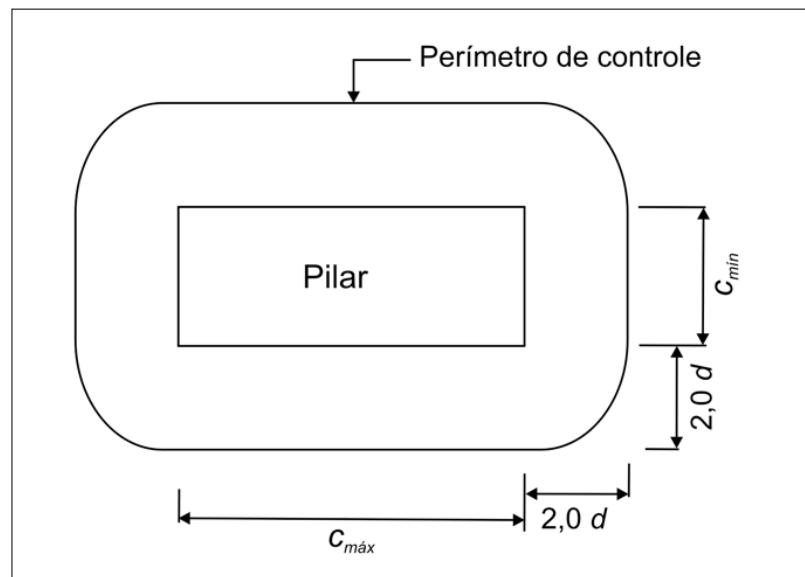


Figura 2 - Perímetros de controle de acordo com a norma NBR 6118:2003.

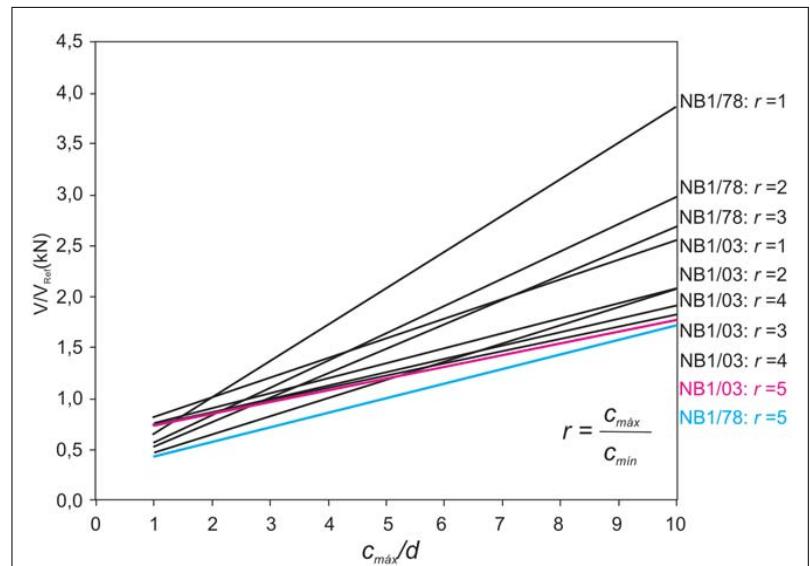


Figura 3 - Influência da relação  $C_{máx}/d$  nas estimativas normativas.

as dos pilares, entre as extremidades. Na prática, a armadura de flexão negativa é posicionada perpendicularmente aos maiores lados do pilar, podendo-se distribuir na outra direção principal apenas uma armadura mínima recomendada pelas normas. Essa armadura apresenta grande importância e deve ser determinada analiticamente, pois, como será discutido posteriormente, influencia consideravelmente a resistência ao punctionamento de lajes lisas apoiadas em pilares alongados.

O comportamento das fissuras radiais e tangenciais é bem definido em diversos trabalhos de natureza experimental envolvendo apenas pilares circulares e quadrados. A Figura 7 auxilia no entendimento do mecanismo de formação dessas fissuras. O trabalho de Oliveira (2003), onde foram ensaiadas 15 lajes de concreto armado apoiadas em

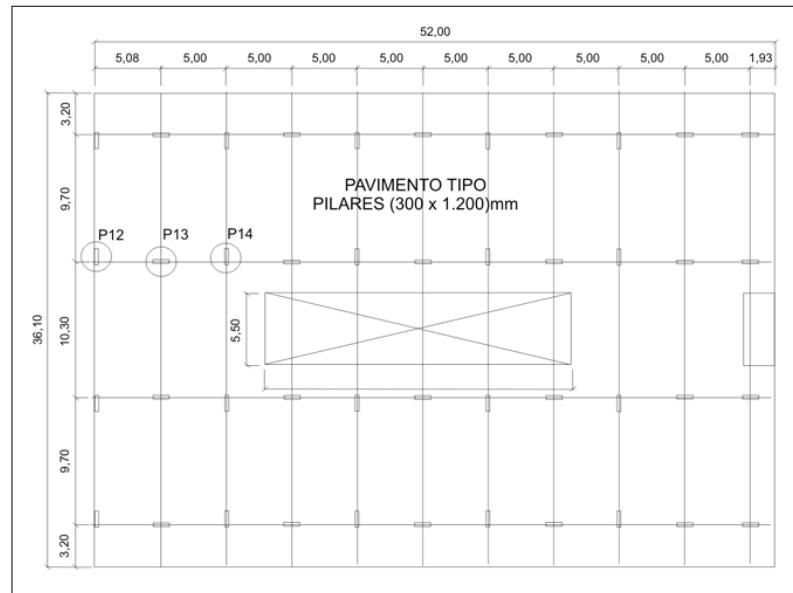


Figura 4 - Disposição dos pilares no pavimento tipo.

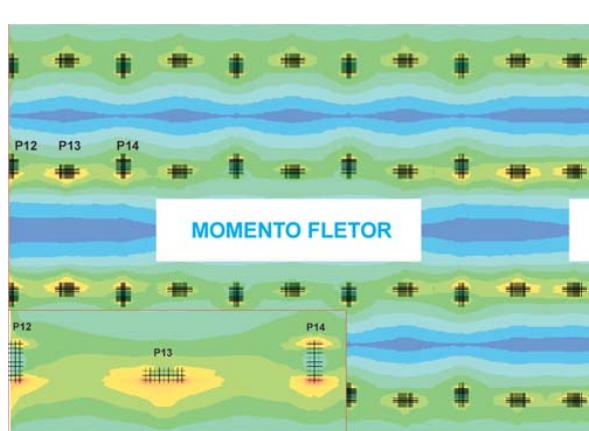


Figura 5 - Contorno dos momentos-fletores nas lajes.

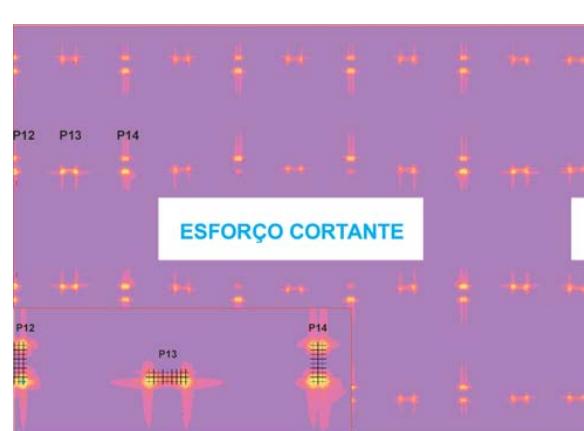


Figura 6 - Contorno dos esforços cortantes nas lajes.

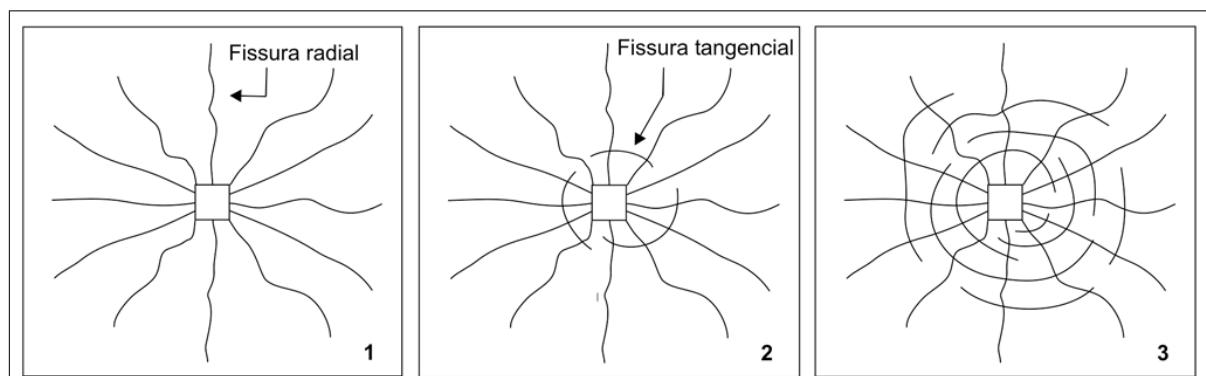


Figura 7 - Processo de formação de fissuras de punção. 1: fissura radial formada por tensões tangenciais. 2: fissuras tangenciais formadas por tensões radiais. 3: configuração de ruptura.

pilares com índice de retangularidade entre 1 e 5, traz informações relevantes sobre o comportamento dessas fissuras em lajes bidimensionais e unidimensionais. No último caso, o carregamento foi aplicado tanto nos bordos paralelos aos maiores lados do pilar quanto nos bordos paralelos aos menores lados. Esse procedimento objetivou evidenciar a concentração de tensões cisalhantes em torno das extremidades dos pilares. Observou-se que as fissuras radiais, ao nível do menor lado do pilar, impediam a propagação das fissuras tangenciais para as regiões intermediárias dos maiores lados, levando a laje ao punctionamento com a superfície de ruptura percorrendo um perímetro consideravelmente reduzido. Nesse trabalho são propostos fatores de flexão ( $\lambda$ ), baseados nas tendências dos resultados experimentais de diversos autores, para corrigir a tendência dos resultados estimados pelas normas CEB-FIP Model Code 1990(1993) e NBR 6118:2003, de acordo com a eq. 3 e a Tabela 1. Os resultados foram comparados com 85 lajes da literatura e são apresentados na Tabela 2.

$$V_{Rk} = \frac{0,18}{\lambda} \cdot (1 + \sqrt{200/d}) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} \cdot u \cdot d \quad (\text{Eq. 3})$$

A Figura 8 mostra a tendência dos resultados normativos (V) e dos resultados modificados ( $V'$ ) pela utilização dos fatores de flexão, assim como as diferenças encontradas para o caso das lajes unidimensionais. Como esses fatores são mais elevados nos casos 1 e 2 e considerando que os resultados modificados sejam satisfatórios, podem ocorrer diferenças de até 45% entre esses resultados e os estimados pela NBR 6118:2003 (caso 1) para índices de retangularidade 5, tendendo a aumentar essa diferença. A tendência da NBR 6118:1980, para lajes unidimensionais, é superestimar a resistência das lajes antes da estabilização, quando  $r = 3$ . Para valores acima de 5, aproximadamente, a tendência é subestimar a resistência ao punctionamento.

A influência dos efeitos da flexão na resistência ao punctionamento é clara, desde que as fissuras de flexão colaborem para a ruptura por punctionamento das lajes, o que de fato ocorre. No caso de pilares alongados em lajes unidimensionais, a tendência é a redução dos efeitos do punctionamento à medida que o índice de retangularidade aumenta. Para as lajes com vãos paralelos ao maior lado do pilar (caso 1), em uma situação extrema, o punctionamento tende a dar lugar à ruína por cisalhamento com a superfície de ruptura paralela ao maior lado do pilar. Na prática, a maioria das lajes unidimensionais são mais solicitadas paralelamente aos maiores lados do pilar (caso 2) e as rupturas por cisalhamento do tipo em vigas e por flexão podem ser predominantes. A Figura 9 mostra uma situação típica do caso 2, onde a ruptura por punção pode não ocorrer devido à transição das tensões de cisalhamento típicas do punctionamento para aquelas características da ruptura por cisalhamento em vigas. Essa despolarização das tensões de cisalhamento é função da rela-

Tabela 1 - Fatores de flexão.

Caso	$\lambda$
(1) Laje unidimensional com vão paralelo a $c_{máx}$	$(c_{máx} / d)^{0,17}$
(2) Laje unidimensional com vão perpendicular a $c_{máx}$	$0,93 (c_{máx} / d)^{0,14}$
(3) Laje bidimensional	$1,03 (c_{máx} / d)^{0,02}$

Tabela 2 - Resultados obtidos com os fatores de flexão.

Critério de dimensionamento	$\frac{V_{Exp}}{V}$ (85 lajes)					
	Concreto de peso normal			Concreto leve*		
	M	DP	CV (%)	M	DP	CV (%)
NBR 6118:2003	0,95	0,09	9,04	0,84	0,06	7,49
NBR 6118:1980	1,44	0,28	19,71	1,44	0,35	24,33
<b>NBR 6118:2003 + <math>\lambda</math></b>	<b>1,00</b>	<b>0,06</b>	<b>5,77</b>	<b>1,00</b>	<b>0,06</b>	<b>6,21</b>

\* Mowrer e Vanderbilt.

M: Média; DP: Desvio-padrão; CV: Coeficiente de variação.

ção  $c_{máx}/l$ , onde  $l$  é a dimensão dos bordos apoiados ou carregados da laje quadrada. Esse efeito também pode ser interpretado através da redução da região de maior concentração de tensões de cisalhamento, ilustrativamente delimitada pelo perímetro de controle, para índices de retangularidade elevados, conforme mostra a Figura 10. A identificação das lajes como A, B, C e D, visa apenas a ressaltar que cada índice de retangularidade dos pilares gera diferentes regiões com elevadas concentrações de tensões.

Com o objetivo de melhor avaliar a influência do índice de retangularidade no comportamento das lajes sob flexão, e possivelmente uma ruptura mais dúctil, procurou-se estabelecer as dimensões mínimas dos maiores lados dos pilares ( $c_{flex}$ ) para que a resistência ao punctionamento fosse elevada ao nível da resistência última de flexão (estimada pela teoria das linhas de ruptura). Isto foi possível pelo fato de a resistência à flexão ser considerada constante enquanto que a resistência ao punctionamento, para a mesma laje e estimada considerando os fatores de flexão incorporados às recomendações da NBR 6118:2003, varia de acordo com os valores de  $r$  e  $\rho$  (taxa geométrica média de armadura), que leva em conta a armadura transversal da laje, com suas barras posicionadas perpendicularmente às barras da armadura principal (longitudinal). Os resultados obtidos para uma laje ( $d = 167,0$  mm) e pilar quadrado, que viabilizam a análise direta, são apresentados na Tabela 3. A taxa geométrica da armadura utilizada (longitudinal:  $\rho_{flex}$ ) para determinação da carga última de flexão foi de 0,73% (em uma faixa de 1 m), lembrando que as barras dessa armadura estão perpendiculares aos maiores lados do pilar. A resistência à compressão do concreto foi adotada igual a 30 MPa.

Verifica-se a influência da taxa geométrica de armadura transversal ( $\rho_t$ ) no acréscimo da resistência ao punctionamento através da redução de  $c_{flex}$ , uma vez que a taxa geométrica de armadura longitudinal permanece constante. Para baixas taxas geométricas médias da ar-

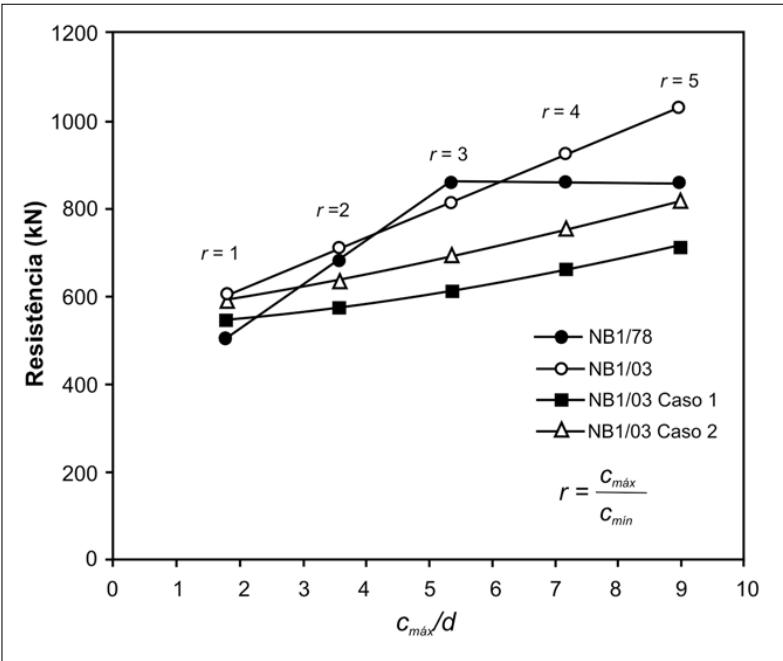
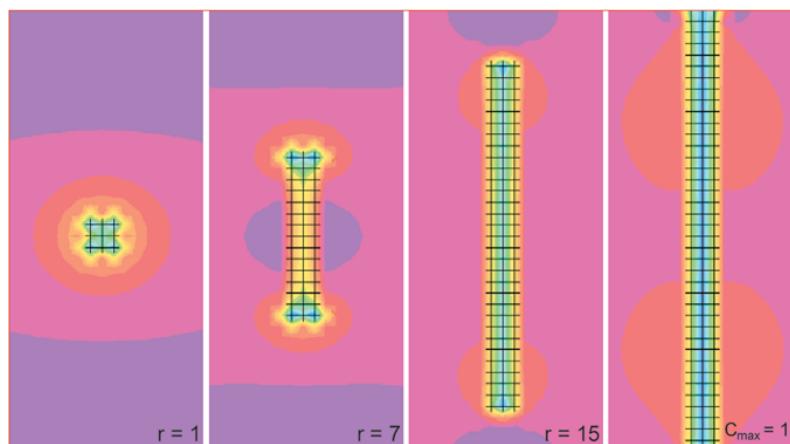


Figura 8 - Resultados normativos e modificados.

Figura 9 - Despolarização do esforço cortante em função de  $r$ .

madura de flexão, poderia ser oneroso elevar a resistência ao punctionamento das lajes, mas, para valores de  $\rho_t = \rho_{flex}$  não seria desvantajoso ( $c_{flex}/d \geq 4$ ). Assim, a armadura perpendicular à armadura negativa de flexão deve ser considerada nas lajes unidirecionais com vãos perpendiculares ao maior lado do pilar. Obviamente que esses resultados precisam de ser testados experimentalmente e generalizados para outras condições de contorno.

Nas recomendações normativas vigentes, qualquer aumento de  $\rho_t$  gera incrementos constantes em  $V$  e  $V'$ , o que faz sentido devido à desconsideração da resistência à flexão em suas expressões, admitindo-se somente a ruptura por punção. Com a utilização de  $c_{flex}$ , os incrementos na resistência ao punctionamento (Figura 11) seriam decrescentemente suaves para a relação crescente entre o maior lado do pilar e a altura útil da laje, uma vez que a distribuição das tensões

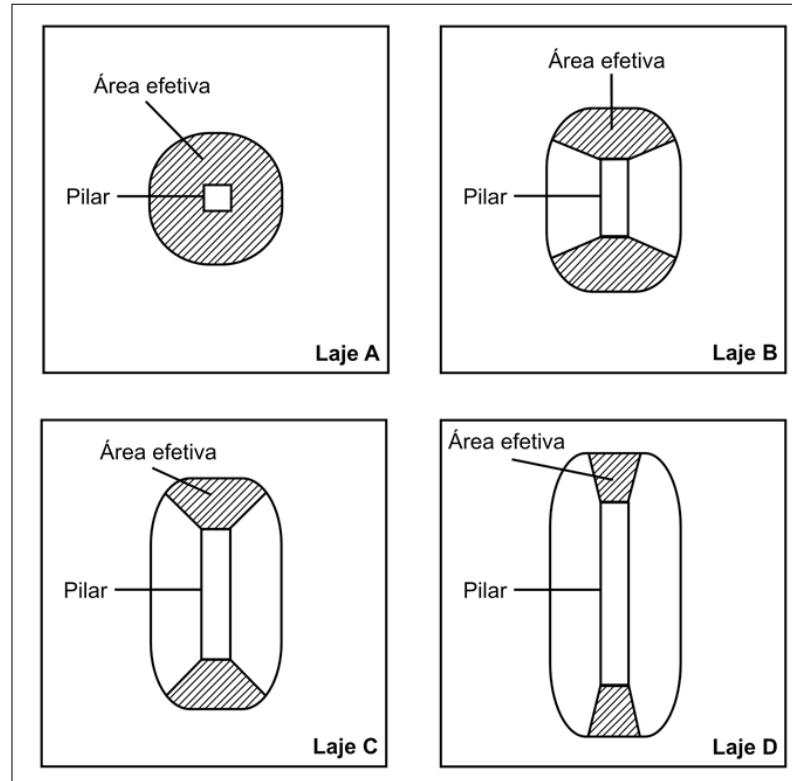
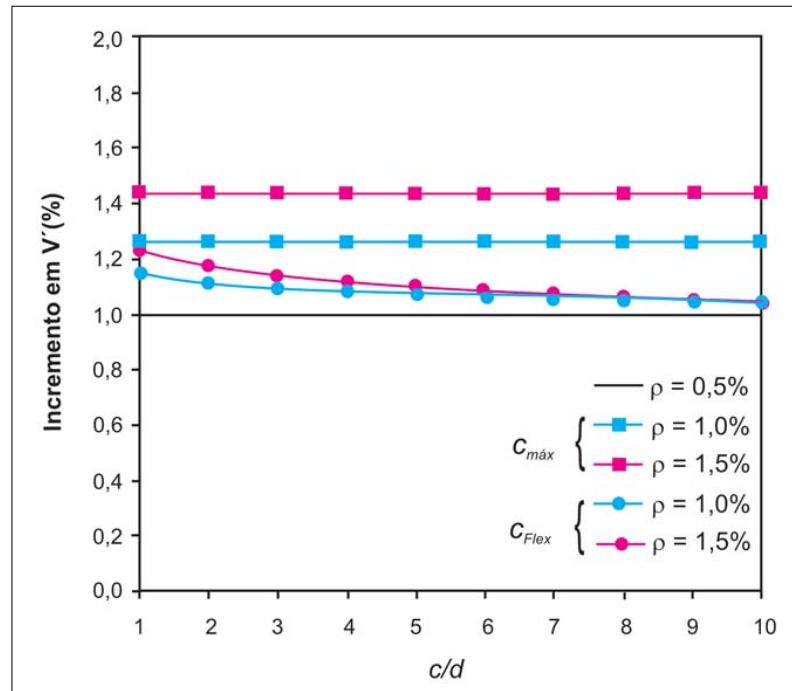
**Tabela 3** - Índice de retangularidade para ruptura dúctil.

$\rho_V / \rho_{Flex}$	$c_{Flex} / d$
0,37	5,3
1,74	2,7
3,1	1,4

de cisalhamento não mais se caracteriza como aquela típica de punctionamento, com  $\rho_{Flex}$  passando a ser preponderante. A superfície de ruptura para o punctionamento seria, então, substancialmente reduzida. Para valores de  $c_{Flex}$  maiores que os necessários, quando  $\rho_V$  aumenta, a ruptura dúctil teoricamente predomina. Em um estágio mais avançado dessa pesquisa, pode-se estabelecer valores mínimos para o maior lado do pilar em função da taxa geométrica de armadura transversal. Na Figura 12, qualquer ponto acima da linha curva poderia indicar a ruptura por flexão da laje, considerada quadrada e apoiada em pilares com  $c_{min} = d$ .

### 3. Conclusões

As recomendações da NBR 6118:2003 são menos conservadoras que as da NBR 6118:1980, apesar de ambas não considerarem os efeitos do índice de retangularidade dos pilares e o comportamento das lajes sob flexão. As estimativas da NBR 6118:2003 tendem a superestimar em até 20% a resistência ao punctionamento das lajes unidirecionais com vãos perpendiculares aos maiores lados do pilar e em até 45% quando os vãos estão paralelos aos maiores lados do pilar. Essa tendência se mantém para valores crescentes de  $c_{máx} / d$ . A NBR 6118:1980 tende a ser conservadora para índices de retangularidade acima de 5, aproximadamente. Os fatores de flexão eliminaram a tendência da NBR 6118:2003 de superestimar suas estimativas e consideram o comportamento das

**Figura 10** - Perímetro para lajes unidirecionais do caso 2.**Figura 11** - Incrementos em  $V'$  com a utilização de  $c_{Flex}$ .

lajes à flexão. A resistência do material componente das armaduras de flexão continua não sendo considerada, mas os efeitos da flexão já podem ser incorporados ao projeto.

As armaduras transversais de flexão não podem ser desprezadas, pois mesmo nos casos onde as lajes unidirecionais apresentam vãos perpendiculares aos maiores lados dos pilares, essas armaduras contribuem significativamente para a resistência ao punctionamento. Os efeitos do punctionamento podem ser minimizados com a utilização de comprimentos para o maior lado do pilar equivalentes aos necessários para promover rupturas por flexão,  $c_{Flex}$ . A utilização dos fatores de flexão levaram à determinação de índices de retangularidade teoricamente necessários para uma ruptura dúctil ( $c_{Flex}$ ), reduzindo os incrementos de resistência ao punctionamento para lajes unidirecionais com vãos perpendiculares aos maiores lados do pilar à medida que a relação  $c_{Flex} / d$  aumenta.

#### 4. Agradecimentos

Os autores agradecem à ADA (Agência de Desenvolvimento da Amazônia), FUNTEC/SECTAM e CNPq pelo suporte financeiro para a realização dessa pesquisa.

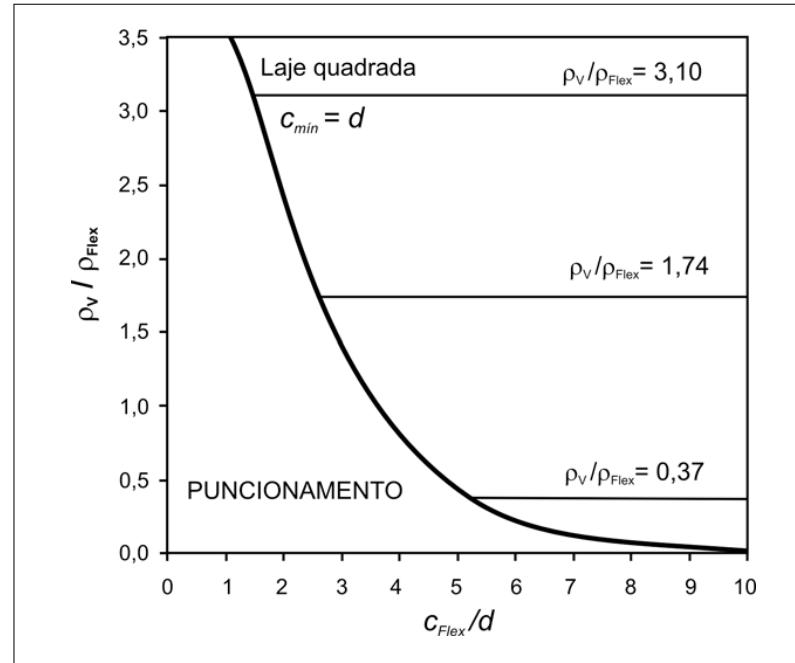


Figura 12 - Limite para a ruptura por flexão.

#### 5. Referências bibliográficas

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118:1980 - Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado*. Rio de Janeiro, 1980.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118:2003 - Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado*. Rio de Janeiro, 2003.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *CEB-FIP Model Code 1990*. London, Thomas Telford, 1993.
- HAWKINS, N. M., FALSEN, H. B., HINOJOSA, R. C. *Influence of column rectangularity on the behaviour of flat plate structures*. Detroit: American Concrete Institute, 1971.
- MOWRER, R. D., VANDERBILT, M. D. *Shear strength of lightweight aggregate reinforced concrete*. New York: ACI Journal, 1967.
- OLIVEIRA, D. R. C. *Análise experimental de lajes cogumelo de concreto armado com pilares retangulares*. Universidade de Brasília, 2003. (Tese de Doutorado).

Artigo recebido em 22/08/2006 e aprovado em 26/02/2007.

