



Rem: Revista Escola de Minas

ISSN: 0370-4467

editor@rem.com.br

Escola de Minas

Brasil

Furtado Pinto, Marcelo Antonio; Lyra Nogueira, Christianne de  
Formulação numérica, via MEF, de problemas de adensamento considerando a variação do nível  
d'água

Rem: Revista Escola de Minas, vol. 58, núm. 4, diciembre, 2005, pp. 337-346  
Escola de Minas  
Ouro Preto, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56416465008>

- ▶ Como citar este artigo
- ▶ Número completo
- ▶ Mais artigos
- ▶ Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe , Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

## Formulação numérica, via MEF, de problemas de adensamento considerando a variação do nível d'água

Marcelo Antonio Furtado Pinto

Mestrando, Departamento de Engenharia Civil, UFOP

E-mail: marceloafp2000@yahoo.com.br

Christianne de Lyra Nogueira

Professora Adjunta, Departamento de Engenharia Civil, UFOP

E-mail: chris@em.ufop.br

### Resumo

Esse artigo apresenta a formulação isoparamétrica, via MEF, de problemas de adensamento devido à variação do nível d'água em termos das variáveis primárias: deslocamentos e carga hidráulica total. A superfície livre, durante o regime de escoamento transitório, é considerada como um contorno móvel e, para sua localização, é adotado o processo de fluxo residual. A estratégia de redução da permeabilidade, necessária para minimizar o fluxo nas regiões com poro-pressões negativas, foi adotada nesse artigo. O modelo numérico apresentado foi implementado no programa computacional ANLOG para solução de problemas em estado plano de deformação. São apresentados exemplos que validam a formulação apresentada.

**Palavras-chave:** adensamento, rebaixamento do NA, superfície livre, MEF.

### Abstract

*A fully coupled isoparametric formulation based on the finite element method to solve consolidation problems due to the drawdown of the water table is presented in this paper. The primary variables of this formulation are displacement and total hydraulic head. The free surface is considered as a changing contour and its location is determined by the use of the residual flow procedure, in which the water, firstly stored in the porous of the soil between two consecutive free surfaces, is imposed as a flow across the actual free surface. A strategy to reduce the permeability, necessary to minimize the flow in regions with negative pore pressure, is adopted. The numerical model is implemented in an ANLOG computational code to solve problems in a plane strain state. Examples to validate this formulation are presented.*

**Keywords:** consolidation, drawdown of the water table, free surface, FEM.

## 1. Introdução

Inicialmente em equilíbrio estático e sujeita a um potencial hidráulico conhecido, uma camada de solo compressível e de baixa permeabilidade pode ser submetida a um gradiente hidráulico devido a uma solicitação externa ou devido à variação da posição do seu nível d'água. Nesse caso, observa-se a ocorrência do fluxo de água da região de maior para a de menor potencial hidráulico, acompanhada da variação das tensões efetivas e, consequentemente, da deformação do solo. Esse fenômeno, chamado de adensamento, ocorre durante um processo de escoamento transitório, no qual são observadas deformações decorrentes da transferência de carga do poro-líquido para o esqueleto sólido. Ele envolve, portanto, uma análise simultânea de um problema de equilíbrio de sólidos deformáveis e um problema de fluxo transiente em meio poroso.

A solução exata, de forma acoplada, de um problema de adensamento, considerando condições complexas de contorno, de geometria e de carregamento, é praticamente impossível. No entanto, uma solução aproximada, baseada, por exemplo, no *Método dos Elementos Finitos* (MEF), pode ser obtida com um aceitável grau de precisão, dentro do ponto de vista da engenharia geotécnica.

Os problemas de adensamento relacionados às solicitações externas devido a carregamentos superficiais estão bem discutidos na literatura (Christian & Bohemer, 1970; Yokoo et al., 1971; Hwang et al., 1972; Ghaboussi & Wil-

son, 1973; Booker & Small, 1975; Small et al., 1976; Carter et al., 1979; Borja, 1986; e outros).

Os trabalhos de Borja (1992), Hsi (1992), Hsi e Small (1992 a,b,c e 1993) e Gonçalves (1996) são citados como referência na análise de problema de adensamento devido à variação do nível d'água relacionado com processos de escavações.

Esse artigo baseia-se nos trabalhos de Hsi (1992) e Hsi e Small (1992a,b,c e 1993), considerando, no entanto, apenas a influência da variação do nível d'água. O processo do fluxo residual proposto por Bathe et al. (1982), e também utilizado por Hsi (1992), foi adotado nesse trabalho para a localização da superfície livre durante o processo de solução. Esse procedimento considera que a água, inicialmente armazenada nos poros do solo entre duas superfícies livres consecutivas, é liberada e precisa ser imposta sob forma de fluxo ao longo da superfície livre atual. Dessa forma, uma nova posição da superfície livre pode ser determinada.

O modelo numérico apresentado nesse artigo foi implementado no programa computacional ANLOG para Análise Acoplada Não-Linear de Obras Geotécnicas (Zornberg, 1989; Nogueira, 1992 e 1998; Pereira, 2003).

## 2. O problema físico

Num processo de fluxo não confinado, em regime transitório, a superfície livre, ao longo da qual a carga de pressão é nula, mudará de posição até atingir o regime permanente. A posição dessa

superfície deverá ser localizada, em cada instante de tempo, e, condições de contorno especiais deverão ser prescritas ao longo da mesma, de modo que a condição de continuidade possa ser garantida no domínio do problema. Assim, a superfície livre é tratada como um contorno móvel, onde são impostas condições de pressão nula e a velocidade com a qual ela se movimenta.

Para ilustrar melhor o problema em questão, considere a situação indicada na Figura 1, que indica a variação do nível d'água em apenas um dos contornos do domínio ilustrado. A superfície livre assumirá várias posições ao longo do tempo, até alcançar sua posição final na condição do regime permanente.

Para avaliar a movimentação da superfície livre, toma-se, como referência, a trajetória descrita por uma partícula de água com velocidade  $v'$ , inicialmente na posição  $P$  sobre a superfície livre num instante genérico  $t$ , conforme ilustrado na Figura 2. Após um intervalo de tempo  $dt$ , essa partícula se desloca no espaço, ocupando a posição  $P'$ , sobre uma nova superfície livre num instante  $t+dt$ .

No instante  $t$ , o vetor velocidade  $v'$  dessa partícula de água encontra-se orientado de um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, sendo definido como:

$$\operatorname{tg} \alpha = v'_y / v'_x \quad (1)$$

e tem magnitude definida como

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} \quad (2)$$

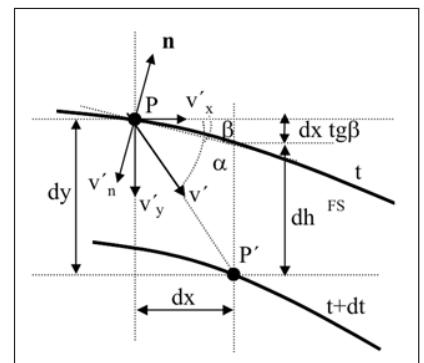


Figura 2 - Movimento de uma partícula de água sobre a superfície livre (adaptado de Hsi, 1992).

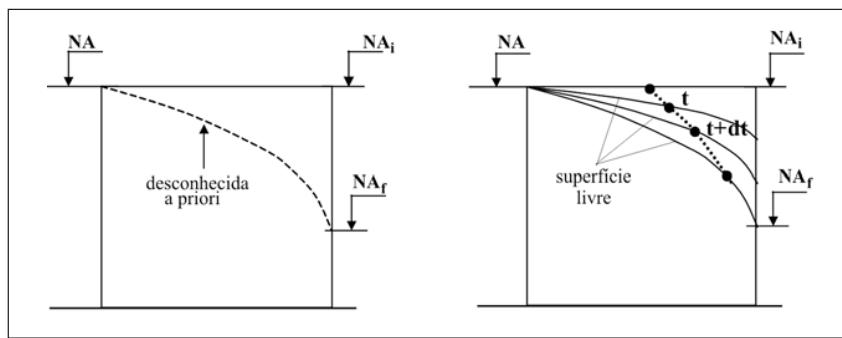


Figura 1 - Problema de fluxo não confinado.

em que

$$v'_x = \frac{v_x}{S_y} \quad (3a)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{S_y} \quad (3b)$$

em que  $v_x$  e  $v_y$  são, respectivamente, as componentes cartesianas da velocidade de fluxo e  $S_y$  é o rendimento específico do solo usado em problemas de fluxo não confinado e que corresponde ao volume de água liberado por unidade de área devido à redução de uma unidade de comprimento na elevação do nível freático (Freeze & Cherry, 1979).

A variação na carga hidráulica total  $dh^{FS}$  entre as superfícies livres do instante  $t$  para  $t+dt$  pode ser determinada fazendo:

$$dh^{FS} = dy - dx \operatorname{tg}\beta = v'_y dt - v'_x dt \operatorname{tg}\beta \quad (4)$$

em que  $\beta$  é o ângulo formado entre o segmento da superfície livre e a direção x (positivo no sentido horário), conforme ilustrado na Figura 2. A distância normal entre as superfícies livres é dada por:

$$dh^{FS} \cos\beta = (v'_y \cos\beta - v'_x \sin\beta)dt = v'_n dt \quad (5)$$

em que  $v'_n$  é a velocidade real da partícula de água sobre a superfície livre na direção da normal. Usando a definição das Equações 3, tem-se que a velocidade de fluxo na direção normal à superfície livre é dada por:

$$v_n = S_y v'_n = v_y \cos\beta - v_x \sin\beta = S_y \frac{dh^{FS}}{dt} \cos\beta \quad (6)$$

Na forma matricial, a Equação 6 é dada por:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{n} = -v_n \quad (7)$$

e corresponde à condição de contorno, que deverá ser imposta ao longo da superfície livre em cada instante de tempo  $t$ .

### 3. O modelo matemático

O sistema de equações diferenciais parciais, que governam o problema do adensamento, considerando o meio saturado, sujeito a pequenos deslocamentos e deformações, e, admitindo que os grãos sólidos e o fluido que preenche os vazios são incompressíveis, pode ser escrito como:

$$\nabla_u^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ em } V \quad (8a)$$

$$\nabla_h^T \mathbf{v} + \mathbf{m}^T (\nabla_u \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \text{ em } V \quad (8b)$$

A Equação 8a representa a condição de equilíbrio estático escrita em termos do vetor de tensão total  $\boldsymbol{\sigma}$  e a Equação 8b representa a condição de continuidade em termos do vetor de velocidade de fluxo  $\mathbf{v}$  e do vetor de deslocamento  $\mathbf{u}$ .

Nessas equações,  $\mathbf{b}$  é o vetor de força de corpo ou peso próprio,  $\mathbf{m}$  é um vetor de ajuste de equações e  $\nabla_u$  e  $\nabla_h$  são, respectivamente, os operadores diferenciais em deslocamento e carga hidráulica total (Pinto, 2004).

Pelo princípio das tensões efetivas, tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + ppm = \boldsymbol{\sigma}' + \gamma_w h_p \mathbf{m} = \boldsymbol{\sigma}' + \gamma_w (h - h_e) \mathbf{m} \quad (9)$$

em que  $pp$  é a poro pressão,  $h_p$  é a carga hidráulica de pressão,  $h$  é a carga hidráulica total,  $h_e$  é a carga hidráulica de elevação e  $\gamma_w$  é o peso específico da água.

A matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  relaciona o vetor das componentes de tensão efetiva  $\boldsymbol{\sigma}'$  com o vetor das componentes de deformação  $\boldsymbol{\epsilon}$  e depende do modelo constitutivo adotado para representar a relação tensão-deformação do solo (Nogueira, 1998). Assim sendo, de uma forma geral, tem-se a seguinte relação tensão-deformação:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (10)$$

O vetor das componentes de deformação, por sua vez, se relaciona com o vetor dos deslocamentos através da seguinte relação cinemática:

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\nabla_u \mathbf{u} \quad (11)$$

O sinal negativo nessa relação indica a convenção de sinal de compressão positiva. Supondo válida a lei de Darcy, tem-se:

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \mathbf{i} \quad (12)$$

em que  $\mathbf{k}$  é a matriz das permeabilidades que depende da função de condutividade hidráulica adotada para relacionar o coeficiente de permeabilidade com a poro-pressão (Machado Jr., 2000). O vetor gradiente hidráulico é dado por

$$\mathbf{i} = -\nabla_h \mathbf{h} \quad (13)$$

As Equações 8a e 8b podem ser escritas em termos dos deslocamentos e carga hidráulica total usando as definições das Equações 9 a 13. Assim sendo, tem-se que:

$$\nabla_u^T (-\mathbf{D} \nabla_u \mathbf{u}) + \gamma_w h \mathbf{m} - \gamma_w h_e \mathbf{m} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ em } V \quad (14a)$$

$$\nabla_h^T (-\mathbf{k} \nabla_h \mathbf{h}) + \mathbf{m}^T (\nabla_u \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \text{ em } V \quad (14b)$$

Essas equações deverão atender às seguintes condições de contorno e inicial:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = -\bar{\mathbf{T}} \text{ em } S_\sigma \quad (15a)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } S_u \quad (15b)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{n} = -q \text{ em } S_v \quad (15c)$$

$$h = \bar{h} \text{ em } S_h \quad (15d)$$

$$h^{FS} = h_e = f(x, y, t) \text{ em } S_{FS} \quad (15e)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{n} = -v_n = -\left(S_y h^{FS} \cos\beta\right) \text{ em } S_{FS} \quad (15f)$$

$$\mathbf{m}^T (\nabla_u \dot{\mathbf{u}}) = 0 \text{ em } t = 0^+ \quad (15g)$$

em que  $\mathbf{n}$  representa o vetor normal a uma dada superfície,  $\bar{\mathbf{T}}$  representa as forças de superfície atuando num contorno  $S_\sigma$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  representa os deslocamentos prescritos num contorno  $S_u$ .

$q$  representa um fluxo prescrito num contorno  $S_v$ ,  $\bar{h}$  representa a carga hidráulica prescrita num contorno  $S_h$ , e,  $S_{FS}$  corresponde à superfície livre.

## 4. O modelo numérico

Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, pode-se obter a seguinte forma integral para as equações governadoras desse problema:

$$\int_V \mathbf{u}^{*T} (\nabla_u^T \mathbf{D} (-\nabla_u \mathbf{u})) dV + \int_V \mathbf{u}^{*T} \nabla_u^T (\gamma_w h \mathbf{m}) dV - \int_V \mathbf{u}^{*T} \nabla_u^T (\gamma_w h_e \mathbf{m}) dV - \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV = \mathbf{0} \quad (16a)$$

$$\int_V h^* \nabla_h^T (-k \nabla_h h) dV + \int_V h^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (16b)$$

onde  $\mathbf{u}^*$  e  $h^*$  são, respectivamente, os vetores de deslocamentos virtuais e de carga hidráulica total virtual.

Aplicando o teorema da divergência e integrando por partes, tem-se:

$$-\int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D} (-\nabla_u \mathbf{u}) dV - \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h \mathbf{m} dV + \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h_e \mathbf{m} dV + \int_S \mathbf{u}^{*T} \boldsymbol{\sigma} n dS - \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV = \mathbf{0} \quad (17a)$$

$$-\int_V (\nabla_h h^*)^T (-k \nabla_h h) dV + \int_S h^* \mathbf{v} n dS + \int_V h^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (17b)$$

Aplicando-se, agora, as condições de contorno naturais (Equações 15), tem-se:

$$-\int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D} (-\nabla_u \mathbf{u}) dV - \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h \mathbf{m} dV + \gamma_w \int_V (\nabla_u \mathbf{u}^*)^T h_e \mathbf{m} dV - \int_S \mathbf{u}^{*T} \mathbf{T} dS - \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV = \mathbf{0} \quad (18a)$$

$$-\int_V (\nabla_h h^*)^T (-k \nabla_h h) dV - \underbrace{\int_S h^*(q) dS_v}_{\substack{\text{parcela devida ao} \\ \text{fluxo prescrito (q)}}} + \underbrace{\int_{S_{FS}} h^{FS}^* (S_y \dot{h}^{FS} \cos \beta) dS_{FS}}_{\substack{\text{parcela devido o rebaixamento do NA}}} + \int_V h^* (\mathbf{m}^T \nabla_u \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (18b)$$

O vetor de deslocamento  $\mathbf{u}$  e a carga hidráulica total  $h$  podem ser aproximados através do MEF, em função dos vetores de deslocamentos e cargas hidráulicas nodais,  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\hat{\mathbf{h}}$ , respectivamente, como

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \quad (19a)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{N}_h \hat{\mathbf{h}} \quad (19b)$$

em que  $\mathbf{N}_u$  e  $\mathbf{N}_h$  são as matrizes que contêm as funções de forma  $N_i$  do elemento Q8 isoparamétrico quadrilateral quadrático de 8 nós, utilizado nesse trabalho.

Aplicando a aproximação pelo MEF e considerando que  $\hat{\mathbf{u}}^*$  e  $\hat{\mathbf{h}}^*$  são valores quaisquer diferentes de zero, as equações anteriores serão sempre satisfeitas se:

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} - \gamma_w \mathbf{C} \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{F} \quad (20a)$$

$$\mathbf{C}^T \dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{G}^{FS} \dot{\hat{\mathbf{h}}}^{FS} + \mathbf{H} \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{Q} \quad (20b)$$

em que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_e \quad (21)$$

representa a força externa constituída das parcelas:

$$\mathbf{F}_t = \int_S \mathbf{N}_u^T \mathbf{T} dS \quad (22a)$$

devido às forças de superfície  $\mathbf{T}$ ,

$$\mathbf{F}_b = \int_V \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} dV \quad (22b)$$

devido à força de peso próprio  $\mathbf{b}$  e

$$\mathbf{F}_e = \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{N}_h \mathbf{m} dV \hat{\mathbf{h}}_e \quad (22c)$$

devido ao potencial gravitacional.

$$\mathbf{Q} = \int_{S_v} \mathbf{N}_h^T q dS_v \quad (23)$$

representa o vetor de fluxo nodal equivalente a uma taxa de infiltração prescrita  $q$ ,

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u dV \quad (24)$$

é a matriz de rigidez do esqueleto sólido,

$$\mathbf{C} = \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \mathbf{N}_h dV \quad (25)$$

é a matriz de acoplamento,

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{B}_h^T \mathbf{k} \mathbf{B}_h dV \quad (26)$$

é a matriz de fluxo e

$$\mathbf{G}^{FS} = \int_{S_{FS}} \mathbf{N}_h^T \mathbf{S}_y \mathbf{N}_h \cos \beta dS_{FS} \quad (27)$$

é a matriz da superfície livre do meio.

Pré-multiplicando-se a Equação 20b por  $(-\gamma_w)$ , tem-se

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} - \gamma_w \mathbf{C}\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{F} \quad (28a)$$

$$-\gamma_w \mathbf{C}^T \dot{\hat{\mathbf{u}}} - \gamma_w \mathbf{G}^{FS} \dot{\hat{\mathbf{h}}}^{FS} - \gamma_w \mathbf{H}\hat{\mathbf{h}} = -\gamma_w \mathbf{Q} \quad (28b)$$

A solução do sistema de equação representado pelas Equações 28 envolve uma integração no tempo em função dos termos em taxa  $\dot{\hat{\mathbf{u}}}$  e  $\dot{\hat{\mathbf{h}}}^{FS}$ . Assim, a solução  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(t)$  e  $\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}(t)$  desse sistema de equação, conhecendo-se seu valor inicial em  $t=0$ , pode ser obtida discretizando-se o domínio do tempo em intervalos de tempo finitos e avaliando-se a solução em instantes conhecidos de modo que

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1} = \hat{\mathbf{u}}_n + \Delta\hat{\mathbf{u}} \quad (29a)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_{n+1} = \hat{\mathbf{h}}_n + \Delta\hat{\mathbf{h}} \quad (29b)$$

em que  $\Delta\hat{\mathbf{u}}$  e  $\Delta\hat{\mathbf{h}}$  são obtidos integrando-se as Equações 28 dentro do incremento de tempo  $\Delta t$ .

Entre os métodos de passo simples, para solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, os mais difundidos são os da família de métodos trapezoidais generalizados, os quais fornecem uma fórmula de recorrência em função apenas das variáveis de estado e não de suas taxas. Dessa forma, usando-se essa metodologia, chega-se a seguinte forma incremental, para as Equações 28:

$$\mathbf{K}\Delta\hat{\mathbf{u}} - \gamma_w \mathbf{C}\Delta\hat{\mathbf{h}} = \Delta\mathbf{F} \quad (30a)$$

$$-\gamma_w \mathbf{C}^T \Delta\hat{\mathbf{u}} - \alpha \Delta t \gamma_w \mathbf{H}\Delta\hat{\mathbf{h}} - \gamma_w \mathbf{G}^{FS} \Delta\hat{\mathbf{h}}^{FS} = \gamma_w \Delta t [\mathbf{H}\hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha \Delta \mathbf{Q}] \quad (30b)$$

em que  $\alpha$  é uma constante de integração que depende do tipo de marcha no tempo adotada. Quando  $\alpha = 0$ , tem-se uma marcha explícita e o algoritmo gerado é conhecido como Forward Euler. Para  $\alpha = 0.5$ , tem-se o algoritmo de Cranck-Nicholson e, para  $\alpha=1$ , o algoritmo Backward Euler, ambos definindo uma marcha implícita.

Nas Equações 30, a parcela  $\mathbf{K}\Delta\hat{\mathbf{u}}$  representa o incremento de força interna, devido ao incremento de tensão efetiva  $\Delta\sigma'$ ,  $\gamma_w \mathbf{C}\Delta\hat{\mathbf{h}}$  representa o incremento de força interna, devido à variação da carga hidráulica total  $\Delta\hat{\mathbf{h}}$ ,  $\Delta\mathbf{F}$  representa o incremento de força externa aplicada no passo corrente,  $\Delta t[\mathbf{H}\hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha\Delta\mathbf{Q}]$  representa a variação de volume imposta no passo corrente,  $\mathbf{G}^{FS}\Delta\hat{\mathbf{h}}^{FS}$  representa a variação de volume imposta, devida à variação da superfície livre no passo corrente,  $\mathbf{C}^T\Delta\hat{\mathbf{u}}$  representa a variação de volume, devida à variação da tensão efetiva,  $\Delta t\mathbf{H}\Delta\hat{\mathbf{h}}$  representa a variação de volume, devida à variação da carga hidráulica.

As Equações 30 podem ser utilizadas nos casos de fluxo confinado e não confinado. Para problemas com fluxo não confinado, a parcela  $\gamma_w \mathbf{G}^{FS}\Delta\hat{\mathbf{h}}^{FS}$  não é conhecida a priori. Assim sendo, um esquema iterativo torna-se necessário para a solução do sistema de equação.

Dessa forma, adotando a fórmula de recorrência

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^k = \hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{k-1} + \delta\hat{\mathbf{u}}^k \quad (31a)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_{n+1}^k = \hat{\mathbf{h}}_{n+1}^{k-1} + \delta\hat{\mathbf{h}}^k \quad (31b)$$

chega-se ao seguinte sistema de equação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\gamma_w \mathbf{C} \\ -\gamma_w \mathbf{C}^T & -\gamma_w (\mathbf{G}^{FS} + \alpha\Delta t\mathbf{H}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u}^k \\ \delta\mathbf{h}^k \end{Bmatrix} = \Delta\mathbf{F}_{ext} - \Delta\mathbf{F}_{int}^{k-1} \quad (32)$$

em que

$$\Delta\mathbf{F}_{ext} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{F} \\ \gamma_w \Delta t [\mathbf{H}\hat{\mathbf{h}}_n - \mathbf{Q}_n - \alpha\Delta\mathbf{Q}] \end{Bmatrix} \quad (33a)$$

$$\Delta\mathbf{F}_{int}^{k-1} = \begin{Bmatrix} -\int_V \mathbf{B}_u^T \Delta\sigma'^{k-1} dV - \gamma_w \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{m} \Delta h^{k-1} dV \\ \gamma_w \int_V \mathbf{N}_h^T \mathbf{m} \Delta \epsilon^{k-1} dV + \alpha \Delta t \gamma_w \int_V \mathbf{B}_h^T \Delta \mathbf{v}^{k-1} dV - \gamma_w \mathbf{G}^{FS} \Delta\hat{\mathbf{h}}^{k-1} \end{Bmatrix} \quad (33b)$$

O ciclo iterativo é interrompido, quando, entre duas iterações consecutivas, não se verifica, dentro de uma tolerância preestabelecida, variação da carga hidráulica total. Nas equações governadoras, o termo relativo à matriz da superfície livre  $\mathbf{G}^{FS}$  impõe o fluxo apenas nos nós dos elementos através dos quais a superfície livre passa. Essa matriz, no entanto, é avaliada ao longo da superfície livre, que, por sua vez, deverá ser localizada a partir de uma posição anteriormente conhecida.

A estratégia adotada, para localizar a superfície livre, no interior de um elemento, em cada instante de tempo, caso ela exista, é encontrar os pontos interiores a esse elemento nos quais as poro-pressões são nulas. Dessa forma, é possível obter-se a configuração da superfície, no interior de um elemento.

Assim, para um dado elemento, pelo qual passa a superfície livre, resolve-se a seguinte equação:

$$A\eta_k^2 + B\eta_k + C = 0 \quad (34)$$

em que:

$$A = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}_e) \quad (35a)$$

$$B = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}_e) \quad (35b)$$

$$C = \mathbf{C}(\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}_e) \quad (35c)$$

e

$$\mathbf{A} = 0.25\gamma_w [(1-\xi_k) \ 0 \ (1+\xi_k) \ -2(1+\xi_k) \ (1+\xi_k) \ 0 \ (1-\xi_k) \ 2(-1+\xi_k)] \quad (36a)$$

$$\mathbf{B} = 0.25\gamma_w [(\xi_k - \xi_k^2) \ 2(-1+\xi_k^2) \ (-\xi_k - \xi_k^2) \ 0 \ (\xi_k + \xi_k^2) \ 2(1-\xi_k^2) \ (-\xi_k + \xi_k^2) \ 0] \quad (36b)$$

$$\mathbf{C} = 0.25\gamma_w [(-1+\xi_k^2) \ 2(1-\xi_k^2) \ (-1+\xi_k^2) \ 2(1+\xi_k) \ (-1+\xi_k^2) \ 2(1-\xi_k^2) \ (-1+\xi_k^2) \ 2(1-\xi_k)] \quad (36c)$$

em que  $\hat{h}$  e  $\hat{h}_e$  são conhecidos para um dado elemento e  $\xi_k$  é obtido, dividindo-se a coordenada natural em pequenos intervalos, conforme ilustrado na Figura 3 (Hsi, 1992). Assim, para cada valor de  $\xi_k$ , obtém-se sua respectiva coordenada natural  $\eta_k$ , a qual, ao atender a Equação 33, pertence a superfície livre.

A Equação 34 deverá ser resolvida para todos os  $n$  pontos no interior do elemento e sua solução deverá pertencer ao intervalo de -1 a +1. Caso  $\eta_k < -1$  ou  $\eta_k > +1$ , a superfície livre não pertencerá ao interior daquele elemento em  $\xi = \xi_k$ .

Um vetor de coordenadas globais  $x^{FS}$  definirá a posição da superfície livre, no interior de um elemento, e estas coordenadas deverão ser utilizadas para avaliar a matriz  $G^{FS}$ . Esse vetor pode ser obtido, fazendo a seguinte interpolação:

$$\mathbf{x}^{FS} = \mathbf{N}_h(\xi_k, \eta_k) \hat{\mathbf{x}} \quad (37)$$

Na medida em que a superfície livre cai, surgem regiões com poro-pressões negativas. A redução da poro-pressão implica a diminuição do valor da condutividade hidráulica. Assim, nas análises de problemas de fluxo, envolvendo a variação do nível d'água, a metodologia da redução da permeabilidade do solo, acima da superfície livre, é utilizada como forma de minimizar o fluxo nessa região (Desai e Li, 1983; Hsi & Small, 1992a,b,c). Uma função de condutividade hidráulica, como a indicada na Figura 4, é adotada nesse modelo. Nessa figura,  $p_e$  corresponde à pressão de entrada de ar,  $p_{lim}$  corresponde ao valor da poro-pressão, a partir do qual a permeabilidade atinge seu valor mínimo  $k_{lim}$  e  $k_{sat}$  corresponde ao valor da permeabilidade saturada.

## 5. Exemplos

### 5.1 Adensamento unidimensional

Uma camada de solo com 5m de espessura, constituída por um material homogêneo, isotrópico e elástico de propriedades:  $E = 10000$  kPa,  $v = 0.0$  e

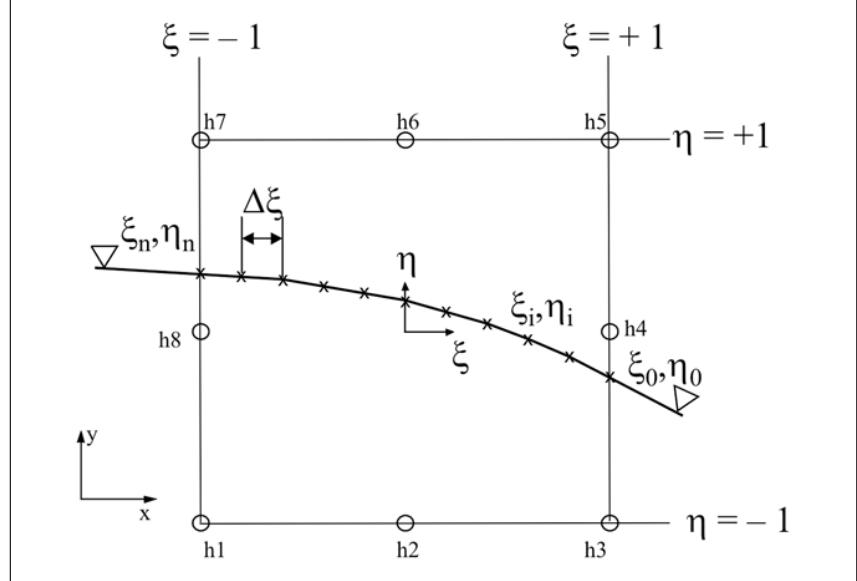


Figura 3 - Localização da superfície livre no interior de um elemento (Hsi, 1992).

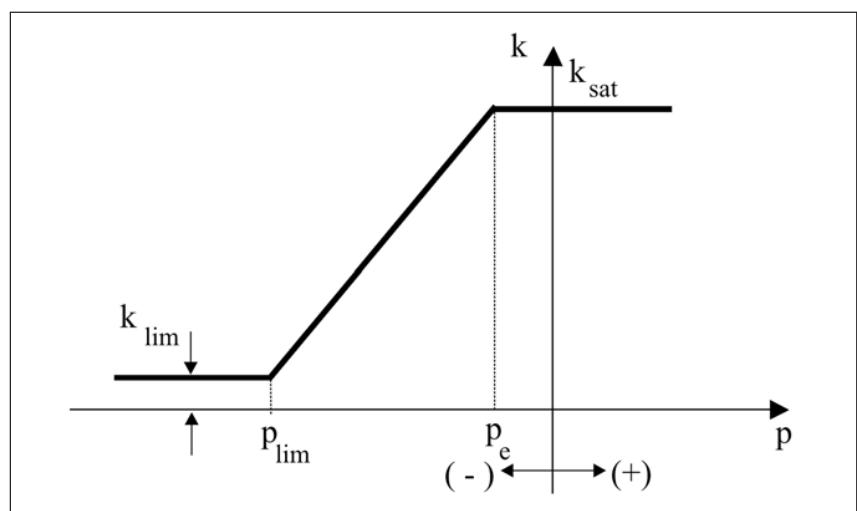


Figura 4 - Curva de condutividade hidráulica hipotética.

$k_{sat} = 4 \times 10^{-6}$  m/s, é submetida a uma variação instantânea do nível d'água do topo à base da camada. A base da camada é considerada impermeável e a drenagem se dá apenas pelo topo ( $H_d = 20$ m). A malha de elementos finitos adota é indicada na Figura 5, onde uma condição unidimensional de deformação e fluxo é adotada. Nessa figura, também são apresentadas as comparações entre os resultados obtidos pelo programa ANLOG e a solução de Terzaghi. A distribuição de excesso de poro-pressão inicial é uniforme e corresponde a 200kPa. Os resultados validam a formulação apresentada.

### 5.2 Fluxo em uma barragem quadrada

Nesse exemplo, faz-se uma abordagem do problema de fluxo onde a posição da superfície livre é avaliada ao longo do tempo. Assim, procura-se investigar a técnica de localização da superfície livre utilizada, bem como a imposição de fluxo ao longo dessa superfície.

O exemplo consiste numa barragem quadrada com as dimensões mostradas na Figura 6. Assume-se que a barragem

possui isotropia de permeabilidade, está inicialmente saturada e com nível d'água coincidindo com a superfície do terreno. Provoca-se, então, uma variação instantânea do nível d'água do lado esquerdo da barragem. Essa diferença de potencial hidráulico faz com que o nível d'água, no interior da barragem, varie ao longo do tempo, até que se atinja o regime de fluxo permanente.

Esse problema foi analisado por Herbert (1968) e utilizado por Bathe et al. (1982), para validar o processo do fluxo residual, em análises de fluxo não confinado, sem levar em conta o efeito do adensamento. Hsi (1992) também avaliou esse problema através da formulação acoplada, porém adotando uma rigidez elevada para o esqueleto sólido da barragem, de modo a forçar apenas a ocorrência do processo de fluxo. Essa mesma estratégia foi adotada nesse trabalho.

A malha de elementos finitos, constituída por 64 elementos isoparamétricos quadráticos de oito nós, utilizada nessa análise, é ilustrada na Figura 6 e é idêntica àquela utilizada em Hsi (1992).

Para efeito de comparação, cinco instantes de tempo foram adotados como sendo 1.89, 4.19, 7.19, 12.19 e 100 dias, este último já tendo atingido o regime de fluxo permanente. A constante da marcha de integração no tempo escolhida para todos os instantes de tempo foi  $\alpha=1.0$  (*backward difference*) e o processo de solução utilizado foi puramente incremental. Os parâmetros utilizados na análise foram:  $\gamma_{\text{sat}} = 19.6 \text{ kN/m}^3$ ,  $\gamma_w = 9.8 \text{ kN/m}^3$ ,  $k_{\text{sat}} = 3.5 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ ,  $k_{\text{lim}} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ ,  $p_e = 0$ ,  $p_{\text{lim}} = -4.8 \text{ kPa}$ ,  $E = 5 \times 10^{18} \text{ kPa}$ ,  $v = 0.3$  e  $S_y = 0.1$ .

A Figura 7 apresenta os resultados entre programa ANLOG e a solução de Hsi (1992). De modo geral, boa concordância foi obtida entre ambos os resultados. Para todos os instantes, observaram-se pequenas discordâncias na face de surgência da água (em  $x=0$ ).

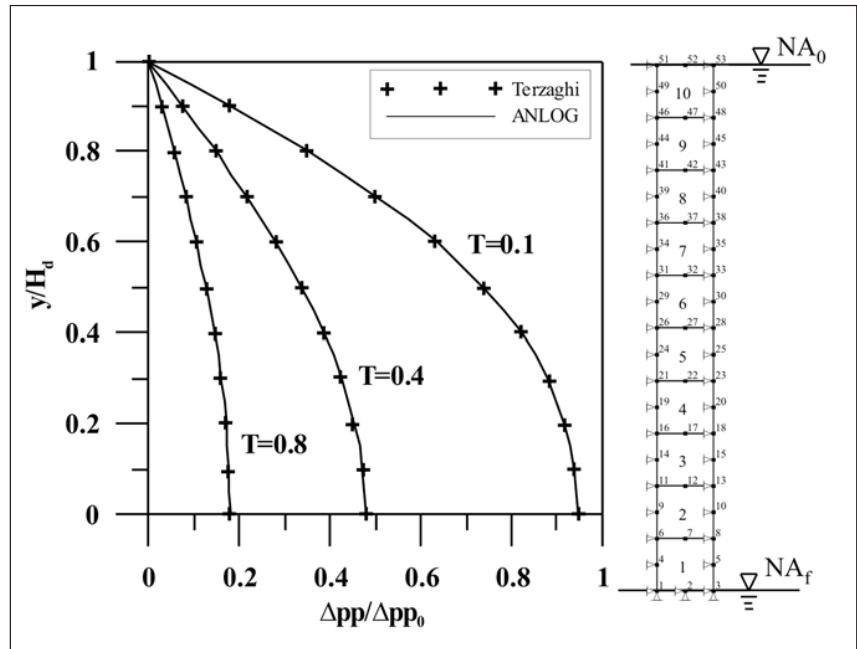


Figura 5 - Adensamento unidimensional.

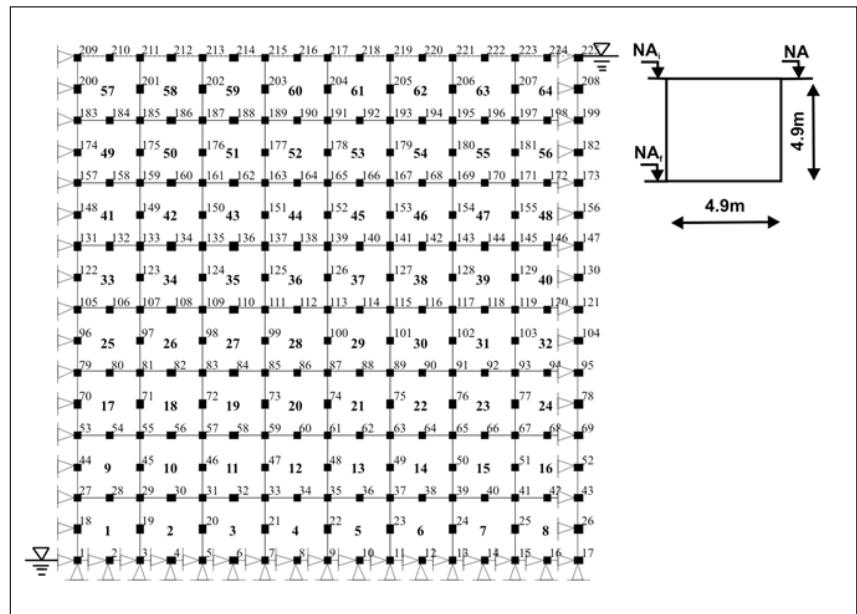


Figura 6 - Fluxo numa barragem quadrada.

## 6. Conclusões

O presente trabalho apresentou uma formulação via MEF, para solução de problemas de adensamento, devido à variação do nível d'água. O modelo numérico apresentado baseia-se no trabalho de Hsi (1992) e foi implementado no programa computacional ANLOG, para solução de problemas em estado plano de deformação.

A superfície livre, durante o regime de escoamento transiente, é considerada como um contorno móvel, onde condições de contorno especiais em fluxo são impostas. Um procedimento para localização da superfície freática e imposição de fluxo ao longo dessa superfície foi discutido. A redução da permeabilidade, necessária para simular o fluxo em

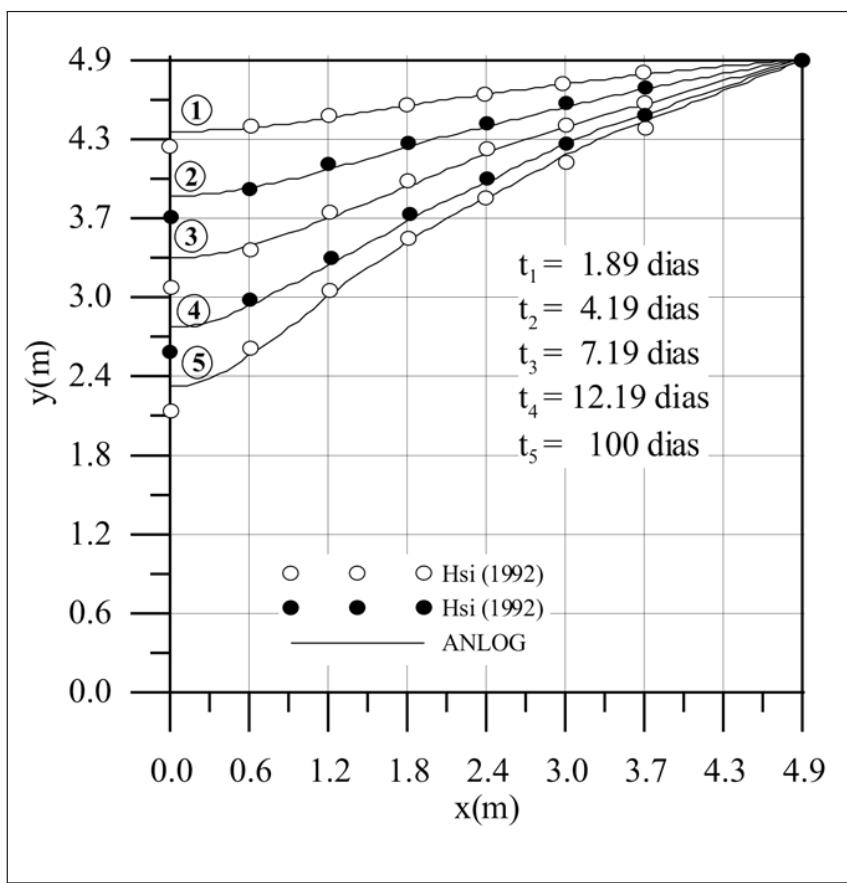


Figura 7 - Evolução da superfície livre numa barragem quadrada.

condição não-saturada também foi apresentada no presente artigo.

A formulação apresentada é validada através de um exemplo de adensamento unidimensional, onde os resultados são comparados com a solução analítica de Terzaghi.

O problema de fluxo não confinado proposto por Herbert (1968) foi apresentado e os resultados comparados aos de Hsi (1992), onde se verifica uma boa concordância para a posição da superfície livre em cinco instantes de tempo predefinidos.

Uma formulação acoplada fluxo-deformação é fundamental na avaliação do comportamento de obras geotécnicas submetidas à variação do nível d'água, uma vez sua estabilidade está diretamente relacionada ao seu estado de tensão efetiva e neutra. Essa formulação

permite a previsão, ao longo, do tempo da posição da superfície livre que afeta diretamente a magnitude dos excessos de poro-pressão.

## 7. Agradecimentos

Os autores desse trabalho agradecem à Fundação Gorceix pela concessão de bolsas de estudo ao autor discente.

## 8. Referências bibliográficas

- BATHE, K.J., SONNAD, V., DOMIGAN, P. Some experiences using finite element methods for fluid flow problems. PROCEEDINGS OF THE 4th INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE FINITE ELEMENT METHOD IN WATER RESOURCES, Hannover, p. 9.3-9.16, 1982.

BOOKER, J.R., SMALL, J.C. An investigation of the stability of Biot's equations of consolidation. *International Journal for Solids Structures*, 11, p. 907-917, 1975.

BORJA, R.I. Free boundary, fluid flow and seepage forces in excavations. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, v. 118, n. 1, p. 125-146, 1992.

BORJA, R.I. Finite element formulation for transient pore pressure dissipation: a variational approach. *International Journal for Solids Structures*, 22, p. 1201-1211, 1986.

CARTER, J.P., BOOKER, J.R., SMALL, J.C. The analysis of finite elastoplastic consolidation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 3, p. 107-129, 1979.

CHRISTIAN, J.T., BOHEMER, J.W. Plane strain consolidation by finite elements. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, v. 96, n. 4, p. 1435-1457, 1970.

DESAI, C.S., LI, G.C. A residual flow procedure and application for free surface flow in porous media. *Adv. in water resources*, v. 6, p. 27-35, 1983.

DUNCAN, J.M., CLOUGH, G.W. Finite element analyses of Port Allen lock. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, v. 97, n. SMB, p. 1053-1068, 1971.

FREEZE, R.A., CHERRY, J.A. *Groundwater*, Prentice Hall, NJ, 1979.

GHABOSSI, J., WILSON, E.L. Flow of compressible fluid in porous elastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 5, n. 3, p. 419-442, 1973.

GONÇALVES, A.J.M. *Análise transiente de escavações em solos saturados*. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1996. (Tese de Doutorado).

HERBERT, R. Time variant ground water flow by resistance network analogues. *Journal of Hydrology*, v. 6, p. 237-264, 1968.

HSI, J. P. *Analysis of excavation involving drawdown of the water table*. Sydney: University of Sydney, 1992. (Ph.D. Thesis).

HSI, J.P., SMALL, J.C. Simulation of excavation in a poro - elastic material. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 16, p. 25-43, 1992a.

HSI, J.P., SMALL, J.C. Analysis of excavation in a elasto - plastic soil involving drawdown of the water table. *Computer and Geotechnics*, v. 13, p. 1-19, 1992b.

*Formulação numérica, via MEF, de problemas de adensamento considerando a variação do nível d'água*

- HSI, J.P., SMALL, J.C. Ground settlements and drawdown of the water table around an excavation. *Canadian Geotechnical Journal*, v. 29, n. 5, p. 740-756, 1992c.
- HSI, J.P., SMALL, J.C. Application of a fully coupled method to the analysis of an excavation. Soils and Foundations, Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation. 1993.
- HWANG, C.T., MORGENSTERN, N.R., MURRAY, D.T. Application of the finite element method to consolidation problems - Proc. Symposium Application of the Finite Element Methods in Geotechnical Engineering, Vicksburg, p. 739-765. 1972.
- MACHADO Jr., J.C. *Análise de problemas de fluxo em meio poroso não saturado pelo método dos elementos finitos*. Ouro Preto: Departamento de Engenharia Civil, PROPEC, UFOP-EM, 2000. 119p. (Dissertação de Mestrado).
- NOGUEIRA, C.L. *Análise de escavações com acoplamento de fluxo e deformações*. Rio de Janeiro: Curso de Pós-Graduação em Engenharia da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro PUC/Rio, 1992, 137p.
- NOGUEIRA, C.L. *Análise não linear de escavações e aterros*. Rio de Janeiro: Curso de Pós-Graduação em Engenharia da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro PUC/Rio, 1998, p. 265.
- PEREIRA, A.R. *Análise não linear física de estruturas de solos reforçados*. Ouro Preto: Departamento de Engenharia Civil, PROPEC, UFOP-EM, 2003, 143p. (Dissertação de Mestrado).
- PINTO, M. A. F. *Análise numérica via MEF de problemas de adensamento devido à variação do nível d'água*. Ouro Preto: Departamento de Engenharia Civil, PROPEC, UFOP-EM, 2004. 132p. (Dissertação de Mestrado).
- SMALL, J.C., BOOKER, J.R., DAVIS, E.H. Elasto-plastic consolidation of soil. *International Journal for Solids and Structures*, 12, p. 431-448, 1976.
- WALKER, L.K., MORGAN, J.R. Field performance of a firm silty clay. *PROCEEDINGS OF THE NINTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOIL MECHANICS AND FOUNDATION ENGINEERING*. Tokyo, v. 1, p. 341-346, 1977.
- YOKOO, Y., YAMAGATA, K., NAGAOKA, H. Finite element method applied to Biot's consolidation theory. *Soil and Foundation*, v. 11, n. 1, p. 25-35, 1971.
- ZORNBERG, J.G. *Análise por elementos finitos do comportamento de escavações utilizando um modelo elasto-plástico*. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 1989, 271p. (Dissertação de Mestrado).

Artigo recebido em 25/06/2004 e  
aprovado em 15/08/2005.

## A Rem já está comemorando os seus 70 anos.

Ela agora faz parte das revistas indexadas  
pela Iniciativa dos Arquivos Abertos.

PUBLIC KNOWLEDGE PROJECT  
**Open Archives Harvester**

[Home](#) > [Add an Archive](#)

### Add an Archive

The archive **REM - Revista Escola de Minas** has been successfully added to our database, and will be indexed shortly. Thank you for your submission.

[► Back to Home](#)

[Home](#) | [Search](#) | [Archives](#) | [Submit Archive](#) | [Links](#) | [About](#)

© 2003-2004 Public Knowledge Project