



Rem: Revista Escola de Minas

ISSN: 0370-4467

editor@rem.com.br

Escola de Minas

Brasil

Scheffer Machado, Fernando Carlos; Mota Silveira, Ricardo Azoubel da  
Formulação inelástica de segunda ordem para sistemas estruturados em aço  
Rem: Revista Escola de Minas, vol. 58, núm. 3, julio-septiembre, 2005, pp. 267-277  
Escola de Minas  
Ouro Preto, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56418761013>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica  
Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

## Formulação inelástica de segunda ordem para sistemas estruturados em aço

Fernando Carlos Scheffer Machado

PROPEC - Mestrado em Construção Metálica - Depart. Eng. Civil  
Escola de Minas - UFOP - Ouro Preto, MG, Brasil  
E-mail: scheffer@metalicas.em.ufop.br

Ricardo Azoubel da Mota Silveira

PROPEC - Mestrado em Construção Metálica, Professor Adjunto  
Depart. Eng. Civil - Escola de Minas - UFOP - Ouro Preto, MG, Brasil  
E-mail: ricardo@em.ufop.br

### Resumo

Esse trabalho fornece um estudo sobre o comportamento inelástico de segunda ordem de estruturas metálicas, tendo como base o emprego do método dos elementos finitos e do método da rótula plástica. Atenção especial é dada à formulação de um elemento finito híbrido, em especial da sua matriz de rigidez, que é modificada durante o processo de carregamento da estrutura, para incorporar os efeitos inelásticos da estrutura. O conceito da seção montada é introduzido juntamente com os fundamentos da abordagem plástica-refinada empregada. Ao final desse artigo, através da análise de vários problemas encontrados na literatura, verifica-se a eficácia, tanto da formulação inelástica desenvolvida, quanto das implementações computacionais realizadas.

**Palavras-chave:** Estrutura metálica, análise inelástica, método da rótula plástica, elemento finito híbrido.

### Abstract

*This work supplies a study of the second-order inelastic behavior of steel frames based on the finite element method and plastic-hinge method. Special attention is given to hybrid finite element formulation, specifically to its tensile strength matrix, which is modified to accommodate inelastic effects during the loading process of the structure. The section assemblage concept is introduced together with refined plastic-hinge procedures. At the end of this paper, using structural steel examples found in literature, the computational implementation effectiveness and developed formulation are verified.*

**Keywords:** steel frames, inelastic analysis, plastic-hinge method, hybrid finite element.

## 1. Introdução

Atualmente, as metodologias de análise/projeto estrutural passam por uma mudança de paradigma. Em função dessa mudança, as análises lineares (com adaptações para consideração de efeitos não-lineares) estão sendo substituídas, progressivamente, por análises não-lineares (segunda ordem, inelásticas, ligações semi-rígidas, etc.). As diversas normas de projeto, nacionais e internacionais, mesmo que sugerindo o uso da abordagem não-linear, ainda separam a análise do projeto estrutural. No caso das estruturas metálicas, esse tipo de inconsistência fica evidente no uso do fator de comprimento efetivo,  $K$ , para a checagem da capacidade resistente dos membros e como forma de estabelecer uma interação entre o sistema estrutural e seus membros.

Pode-se afirmar, entretanto, que o comportamento (resistência e estabilidade) do sistema estrutural e o comportamento de seus membros são interdependentes e os métodos de projeto usuais consideram essa interdependência de forma inconsistente e com aproximações. Esse fato, juntamente com a evolução dos recursos computacionais, exige, então, que uma nova metodologia de análise/projeto seja adotada.

Vários pesquisadores, entre eles Chen e Sohal (1995), Chen e Kim (1997) e Chan e Chui (1997, 2000), sugerem a adoção de metodologias de análise/projeto que considerem efeitos de segunda ordem, da inelasticidade do aço, da semi-rigidez das conexões, e que, ainda, atendam às curvas de interação M-P e demais especificações das normas de projeto. Essa metodologia é chamada aqui de *Análise Avançada* e será tratada como tal por esse trabalho. A idéia básica consiste, então, em introduzir, no modelo numérico e nas formulações a serem adotados, todos os fatores considerados relevantes, na análise da estrutura, e que permitem ao calculista fazer o dimensionamento seguro do sistema estruturado em aço (Machado, 2005).

Esse trabalho pode ser considerado, portanto, uma primeira tentativa do

PROPEC/DECIV/UFOP de desenvolvimento de um programa computacional para análise avançada de estruturas metálicas. Assim, as não-linearidades referentes ao material, geometria, imperfeições e tensões residuais são todas incluídas nas análises a serem realizadas. Destaca-se o emprego de uma nova curva de interação M-P para avaliar a capacidade da seção, que é mais consistente, precisa e racional, menos conservativa e que não apresenta descontinuidades.

A próxima seção apresenta a formulação inelástica proposta, onde ênfase é dada à matriz de rigidez do elemento híbrido. A estratégia adotada para a deteriorização da rigidez de componentes dessa matriz é apresentada. Uma descrição resumida da base computacional desenvolvida é feita logo em seguida. No final do artigo, estão alguns exemplos estruturais de validação, procurando demonstrar o sucesso das implementações realizadas, bem como são apresentadas considerações importantes sobre os resultados obtidos.

## 2. Formulação inelástica

Para desenvolver a formulação pro-

posta, é interessante definir, previamente, o elemento finito a ser adotado. Na realidade, trata-se do elemento finito híbrido mostrado na Figura 1, que é composto, basicamente, por um elemento de viga-coluna e dois elementos de mola em suas extremidades. Essas molas têm a finalidade de simular a ocorrência de rótulas plástica no elemento, indicando, assim, a possibilidade de ocorrer a plastificação somente nas extremidades do elemento.

Antes da definição da matriz de rigidez desse elemento, algumas considerações importantes devem ser feitas, ou seja:

- É válida a suposição de Bernoulli de que a seção transversal, considerada plana, permanece plana após a deformação da estrutura.
- Empenamento e distorções na seção transversal não são consideradas.
- São consideradas pequenas deformações, utilizando grandes deslocamentos e rotações.
- As rótulas são tratadas como se ocorressem concentradas em uma seção nodal de comprimento “zero”.

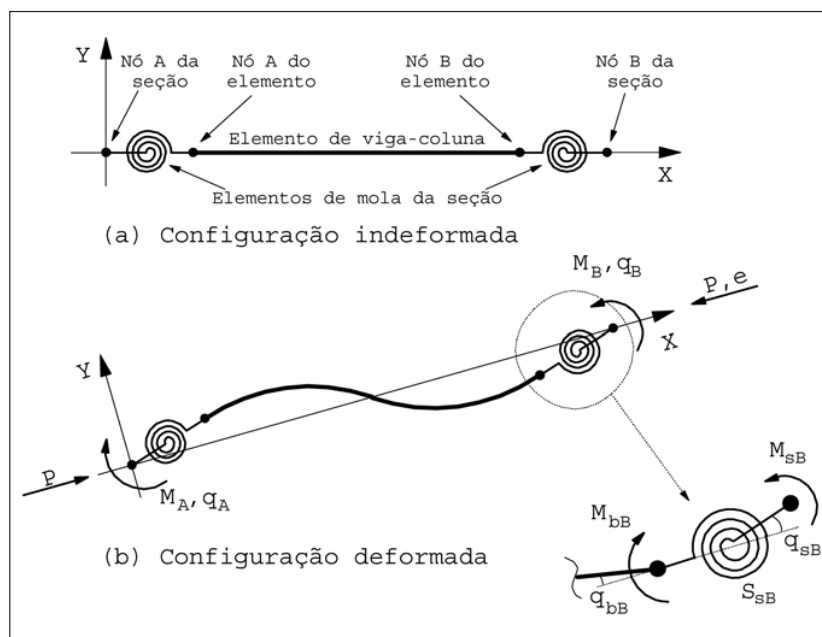


Figura1 - Elemento finito híbrido adotado.

- e) Os sistemas estruturais são considerados suficientemente contraventados para evitar flambagem lateral.  
 f) Os perfis são suficientemente compactos para não ocorrer flambagem local.  
 g) Serão considerados perfis do tipo I (vigas) e H (pilares).

## 2.1 Matriz de rigidez

Como será apresentado mais detalhadamente na próxima seção, a rigidez da pseudomola, definida por  $S_s$ , deve ser calculada a partir das forças internas do elemento híbrido e das características geométricas do perfil. Conhecendo a rigidez  $S_s$ , a relação momento-rotação do elemento de mola pode ser definida da seguinte forma (ver Figura 1b):

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_s \\ \Delta M_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_s & -S_s \\ -S_s & S_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_s \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix} \quad (1)$$

onde  $\Delta M_s$  e  $\Delta M_b$  são os momento nodais incrementais nos nós constituintes do elemento híbrido;  $\Delta \theta_s$  e  $\Delta \theta_b$ , as rotações correspondentes.

O elemento de viga-coluna adotado é o elemento padrão usualmente adotado para a modelagem dos membros de sistemas estruturais. Sua relação momento-rotação pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bA} \\ \Delta M_{bB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bA} \\ \Delta \theta_{bB} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

onde os subscritos A e B caracterizam os nós do elemento finito.

Entretanto, para que a análise seja tratada como de segunda ordem, o elemento h deverá satisfazer os efeitos P- $\Delta$  e, para isso, deve-se adotar uma formulação não-linear adequada. No caso de sistemas estruturais, ou membros, com presença de forças axiais, P, de moderada magnitude, pode-se utilizar para os parâmetros de rigidez  $K_{ij}$  da equação anterior (Chan e Chui, 1997):

$$K_{AA} = K_{BB} = \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15}, \quad K_{AB} = K_{BA} = \frac{2EI}{L} + \frac{PL}{30} \quad (3)$$

Caso as forças axiais se aproximem da carga de flambagem, será necessário usar uma aproximação mais refinada (Galvão, 2000). Combinando-se, então, as relações das Eqs. (1) e (2) (mola-viga-mola), chega-se na relação incremental:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{sA} \\ \Delta M_{bA} \\ \Delta M_{bB} \\ \Delta M_{sB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{sA} & -S_{sA} & 0 & 0 \\ -S_{sA} & K_{AA} + S_{sA} & K_{AB} & 0 \\ 0 & K_{BA} & K_{BB} + S_{sB} & -S_{sB} \\ 0 & 0 & -S_{sB} & S_{sB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{sA} \\ \Delta \theta_{bA} \\ \Delta \theta_{bB} \\ \Delta \theta_{sB} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

e, assumindo que as cargas são aplicadas apenas nos nós globais,  $\Delta M_{bA}$  e  $\Delta M_{bB}$  serão nulos e poder-se-á obter da segunda e terceira linhas da Eq. (5) as expressões:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bA} \\ \Delta \theta_{bB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} + S_{sA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} + S_{sB} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{sA} & 0 \\ 0 & S_{sB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{sA} \\ \Delta \theta_{sB} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Com a eliminação dos graus de liberdade internos, através da substituição da Eq. (5) na Eq. (4), chega-se, finalmente, na expressão incremental de equilíbrio do elemento híbrido, que é escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{s1} \\ \Delta M_{s2} \\ \Delta P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{sA} - S_{sA}^2 (K_{BB} + S_{sB}) / \beta_s & (S_{sA} S_{sB} K_{AB}) / \beta_s & 0 \\ (S_{sA} S_{sB} K_{BA}) / \beta_s & S_{sB} - S_{sB}^2 (K_{AA} + S_{sA}) / \beta_s & 0 \\ 0 & 0 & EA / L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{s1} \\ \Delta \theta_{s2} \\ \Delta e \end{Bmatrix} \quad (6)$$

sendo  $\Delta e$  a deformação incremental axial e  $\Delta P$ , a força axial incremental axial;  $\beta_s$  é definido por:

$$\beta_s = \begin{vmatrix} K_{AA} + S_{sA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} + S_{sB} \end{vmatrix} = (K_{AA} + S_{sA})(K_{BB} + S_{sB}) - K_{AB}K_{BA} > 0 \quad (7)$$

com os coeficientes  $K_{ij}$  fornecidos pela Eq. (3)

## 2.2 Formulação da Rótula Plástica-Refinada

Como alternativa à superfície de resistência M-P da seção proposta pela norma AISC-LRFD (1986), Chan e Chui (1997, 2000) desenvolveram o conceito da “seção montada”, objetivando uma formulação mais precisa e abrangente. Nessa abordagem, é assumido que o núcleo da alma do perfil suportará, predominantemente, o carregamento axial ao qual o perfil está exposto. Restará às outras partes da seção transversal, incluindo mesas e, eventualmente, o restante da alma, suportarem os esforços oriundos do momento (ver Figura 2). Essa simplificação segue, precisamente, as fórmulas da norma britânica BS5950 (1990) e produz os mesmos níveis de capacidade de momento para seções sob carregamento axial publicados pelo SCI (1987).

A seção é, então, idealizada como uma montagem de três faixas retangulares, que são dispostas a formar as duas mesas e a alma da seção, como ilustrado na Figura 2. Para o cálculo da distribuição das forças, primeiramente, deve-se definir quanto da alma é responsável por resistir ao carregamento axial, isto é:

$$\eta = \frac{P}{2 \sigma_y t} \quad \text{para } \eta \leq \frac{d}{2} \quad (8a)$$

$$\eta = \frac{(P - \sigma_y t d)}{2 B \sigma_y} \quad \text{para } \frac{d}{2} < \eta \leq \frac{d}{2} + T \quad (8b)$$

onde  $P$  é a carga axial,  $\sigma_y$  é tensão de escoamento,  $t$  é a espessura da alma,  $T$  é a espessura da mesa,  $B$  é a largura da mesa,  $d$  é a altura da alma e  $\eta$  é a metade da parcela da alma que suporta a carga axial (ver Figura 2). A partir desse valor, chega-se na expressão do momento de plastificação reduzido, como se segue:

$$M_{pr} = \left[ B T (D - T) + \left( \left( \frac{d}{2} \right)^2 - \eta^2 \right) t \right] \sigma_y \quad \text{para } \eta \leq \frac{d}{2} \quad (9a)$$

$$M_{pr} = \left[ \left( \left( \frac{d}{2} \right)^2 - \eta^2 \right) B \sigma_y \right] \quad \text{para } \frac{d}{2} < \eta \leq \frac{d}{2} + T \quad (9b)$$

no qual  $D$  é a altura total da seção do perfil.

A Figura 3 apresenta, graficamente, o momento plástico reduzido para um perfil do tipo HEB 220. Nele pode-se perceber que não existe nenhum ponto de descontinuidade na curva de interação proposta e que não existem variações abruptas na curvatura (vértices ou quinas).

Deve-se observar que na mesma Figura 3, foi mostrada, a superfície de início de escoamento. Essa superfície separa duas regiões, a primeira (inferior) informa que qualquer combinação de M-P que se situe dentro dela indica que a seção se comporta de forma elástica e que nenhuma modificação na rigidez nessa seção é necessária. Para o caso de as componentes se posicionarem na segunda região (superior), deverá ocorrer uma perda de rigidez nessa seção, uma vez que parte dela já atingiu a fase de escoamento.

Não existe possibilidade de uma seção assumir componentes M-P, tais que se posicionem fora da curva de interação, devendo haver uma compensação dessas componentes de força para que se posicionem, no máximo, sobre a curva. Nesse caso, será assumido que se formou uma rótula plástica e a rigidez da seção será reduzida a zero.

A superfície de início de escoamento é depende da força axial e da existência de tensão residual. Ela pode ser definida através da seguinte equação:

$$M_{er} = \left( \sigma_y - \sigma_r - \frac{P}{A} \right) W, (10)$$

com  $\sigma_r$  sendo a máxima tensão residual,  $A$ , a área da seção transversal,  $W$ , o módulo elástico e  $M_{er}$ , o momento de início de escoamento reduzido. Essa equação pode ser vista na Figura 3 de duas formas: com  $\sigma_r = 0,5$  e sem considerar a tensão residual. Com base em recomendações do ECCS (1983), poderão ser adotados determinados valores para a tensão residual máxima, que podem ser vistos na Figura 4.

Com o objetivo de simular uma transição suave entre os estados idealmente elástico e o perfeitamente plástico, a metodologia proposta faz uma comparação do momento presente na seção  $M$  com  $M_{er}$  e  $M_{pr}$ , isso é, acha a posição

relativa entre a superfície de início de escoamento e a superfície de tensão plástica. Assim será possível definir o nível de perda de rigidez que a seção se encontra no instante analisado (ver Figura 3).

Como já mencionado anteriormente, uma mola é usada para simular a degradação da rigidez da seção causada

pela sua plastificação. Ela tem a propriedade de manter as mesmas características elásticas do elemento de viga-coluna ao qual está conectada, enquanto as forças internas não atingirem a superfície de início de escoamento. A partir desse instante, ela assumirá o comportamento descrito pela equação:

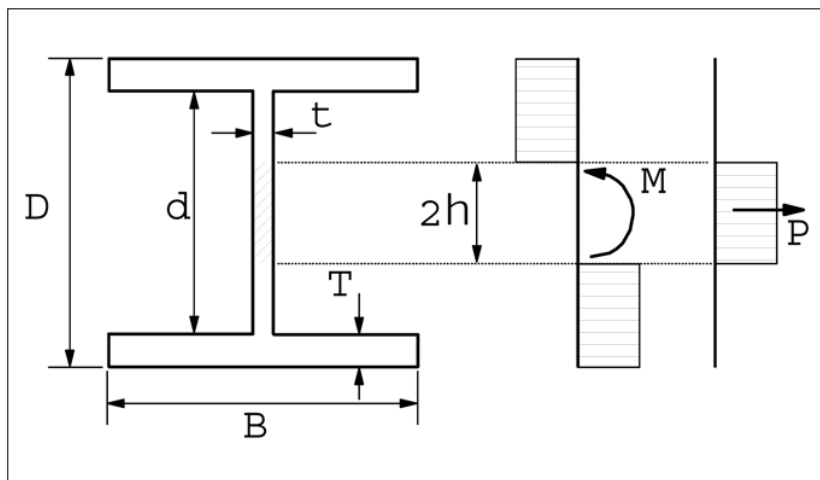


Figura 2 - O perfil estudado e a distribuição de tensões proposta pelo modelo.

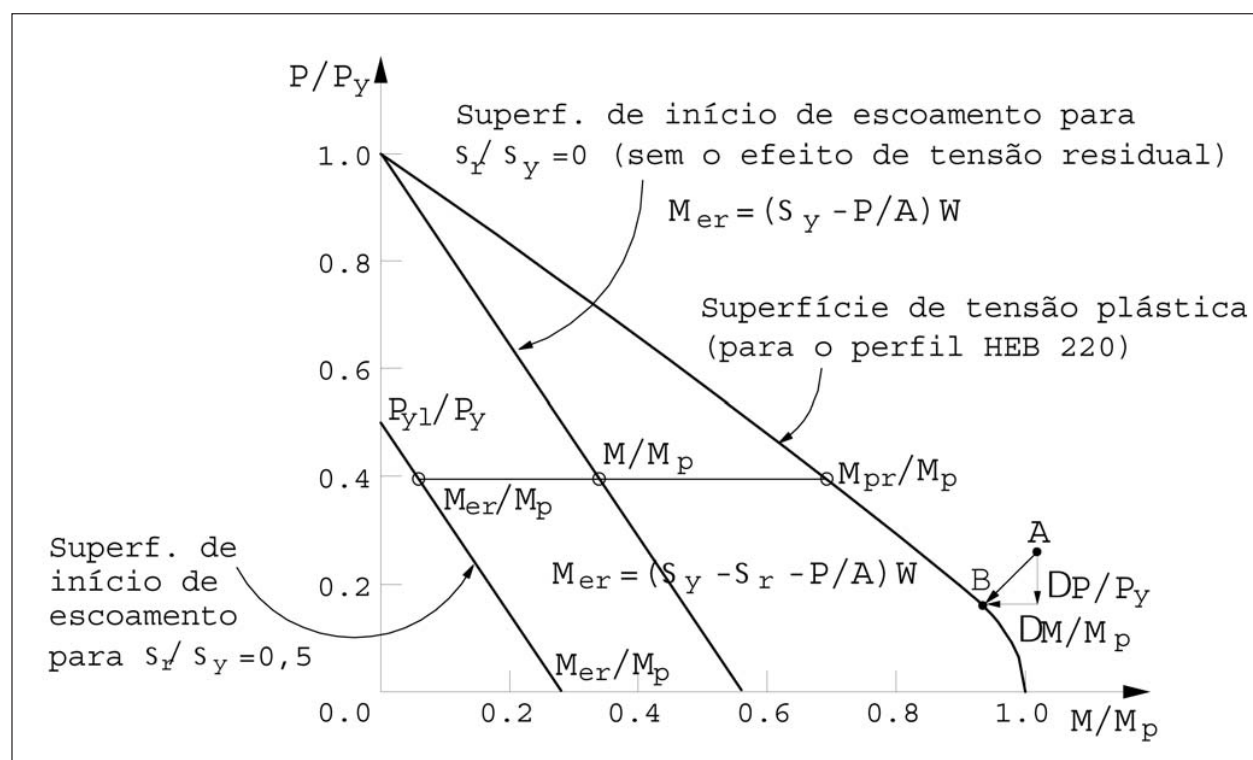


Figura 3 - Superfície de interação do perfil HEB 220 obtida pela presente teoria.

$$S_s = \frac{6 EI}{L} \frac{|M_{pr} - M|}{|M - M_{er}|} \quad \text{para } M_{er} < M < M_{pr} \quad (11)$$

na qual  $EI$  é a rigidez à flexão,  $L$  é o comprimento do elemento e  $S_s$  é a rigidez da pseudomola naquele instante. Percebe-se da equação anterior que  $S_s$  assumirá valores de zero a infinito, porém, para fins computacionais, deve-se limitar esses valores a  $10^{-10}$  e  $10^{10}$ , respectivamente. Esses dois valores representam os extremos em que o momento pode se igualar ao momento elástico e plástico.

Em análises que usam a abordagem puramente elasto-plástica, não existe a degradação da rigidez da seção, isto é, ela é completamente rígida até o instante em que as componentes M-P atingem a superfície de interação, a partir daí a seção fica com rigidez nula.

É importante destacar que, uma vez formada a rótula plástica em uma ou duas extremidades de um elemento, as condições de equilíbrio podem ser violadas, se a resistência axial e ao momento da seção forem menores que as forças aplicadas. Isso reflete a condição em que as componentes de força se posicionam fora da superfície de interação (ver ponto A na Figura 3). Existem diversas formas de trazer o ponto para a curva. Chan e Chui (2000) sugerem que seja usada uma trajetória perpendicular à curva. Voltando à Figura 3, o novo ponto de equilíbrio das forças internas irá mover de A para B subtraindo-se os valores de  $\Delta P/P_y$  e  $\Delta M/M_p$  de P e M, respectivamente.

### 3. Implementação Computacional

Essa seção tem o objetivo de mostrar os procedimentos computacionais adotados para implementar a formulação inelástica apresentada na seção anterior. Essas implementações foram feitas numa base computacional já existente, oriunda de trabalhos de pesquisas já elaborados por Silveira (1995), Rocha (2000), Galvão (2000, 2004) e Pinheiro (2003).

O sistema computacional para análise de estruturas é dividido em dois módulos (ou tipos de análises): estática e dinâmica, sendo que cada análise também se divide

em dois tipos de solução: linear e não-linear. Uma vez que a finalidade desse trabalho é estender a capacidade de análise não-linear do programa, permitindo a consideração da não-linearidade física (comportamento inelástico da seção), a única parte abordada será o “ramo” estático/não-linear do sistema computacional.

Assim, após a leitura de dados, faz-se a montagem do vetor de cargas de referência  $F_r$ . Esse vetor será multiplicado pelo fator de carga  $\lambda$ , quando se necessitar obter o vetor de forças externas  $F_e$ . A partir de uma dada configuração de equilíbrio inicial ( $u^0$  e  $f^0$ ), monta-se a matriz de rigidez global da estrutura  $K$  na sub-rotina DEFAKTS. Após a montagem de  $K$  e o cálculo dos deslocamentos nodais tangenciais, entra em ação a sub-rotina SCALUP, que define a solução predita de  $\Delta \lambda^0$ , isto é, define um passo de carga adequado (de acordo com o grau de não-linearidade do problema).

Nesse ponto, existe uma intervenção deste trabalho referente às formulações inelásticas desenvolvidas. Uma vez que o vetor de forças externas está montado, é necessário somar o vetor de pseudoforças  $F_{ps}$ , que é originado após a formação das rótulas plásticas e limita as forças internas que o elemento (com rótulas) pode suportar, de acordo com a superfície de interação.

Em seguida, entra-se na sub-rotina ITER que controla o ciclo de iterações através do método de Newton-Raphson, e que tem o objetivo de restaurar o equilíbrio do sistema estrutural. Essa sub-rotina pode ser vista de forma mais detalhada na Figura 5. Após o cálculo do vetor de forças internas  $F_i$ , obtém-se o vetor de forças desequilibradas da seguinte forma:

$$g = (\lambda F_r + F_{ps}) - F_i \quad (12)$$

Caso esse gradiente seja suficientemente pequeno, satisfazendo um certo critério de convergência, pode-se afirmar que o equilíbrio de forças no sistema foi atingido. Caso contrário, o ciclo iterativo continua e atualizam-se as vari-

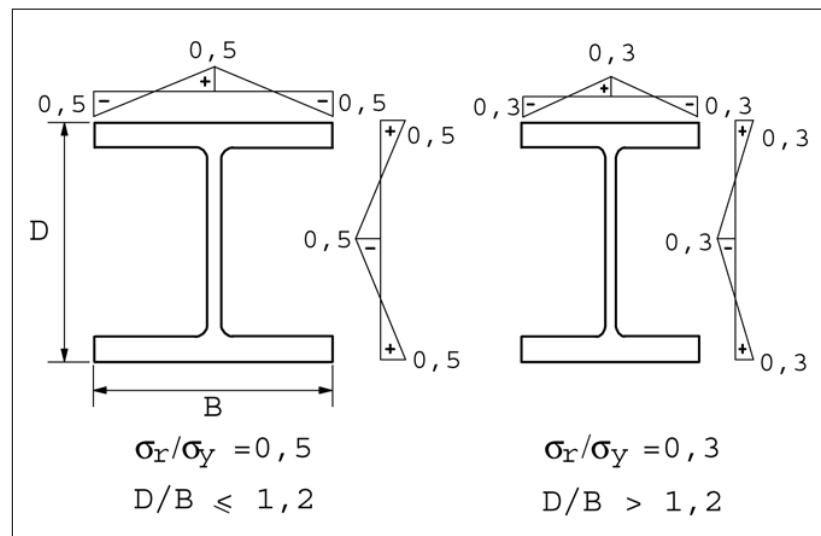


Figura 4 - Distribuição da tensão residual nos perfis do tipo H (coluna) e I (viga).



áveis incrementais e totais; o processo é repetido até que a solução convirja ou até que o número máximo de iterações seja alcançado. Destaca-se, aqui, que, caso o analista decida usar o método de Newon-Raphson padrão, a matriz de rigidez deverá ser recalculada em cada iteração. (Figura 6)

Uma vez obtida a convergência no processo iterativo, segue-se para a sub-rotina NEXTINC, onde são preparadas as informações importantes para o próximo passo de carga ( $M_{pr}$ ,  $P_i$ ,  $S_s$ , etc.) e imprimem-se, também, os resultados.

## 4. Exemplos de validação

Através da análise de problemas estruturais encontrados na literatura, pretende-se verificar, nessa seção, a eficiência da metodologia e implementações apresentadas nas seções anteriores. Optou-se pelo emprego de uma nomenclatura simplificada. Os resultados obtidos aqui, seguindo a abordagem elasto-plástica, serão designados pela sigla EP, e aqueles extraídos da abordagem plástica-refinada por PR. Aqueles retirados da literatura, usando o método da zona plástica, serão representados por ZP e os definidos através do método da rótula plástica por RP.

### 4.1 Pórtico Tipo Galpão

O pórtico tipo galpão é um dos portais de calibração usados pela ECCS (1983) para verificar a eficiência dos programas computacionais para análise inelástica (Vogel, 1985; Ziemian, 1993). A Figura 7 apresenta a geometria do pórtico, que é formado por perfis IPE360. São aplicadas, inicialmente, imperfeições geométricas na estrutura de 1/200 no prumo das colunas e 1/288 na inclinação das vigas.

A análise feita por esse trabalho consistiu em obter os caminhos de equilíbrio da estrutura, tomando-se, como parâmetros de controle, os deslocamentos

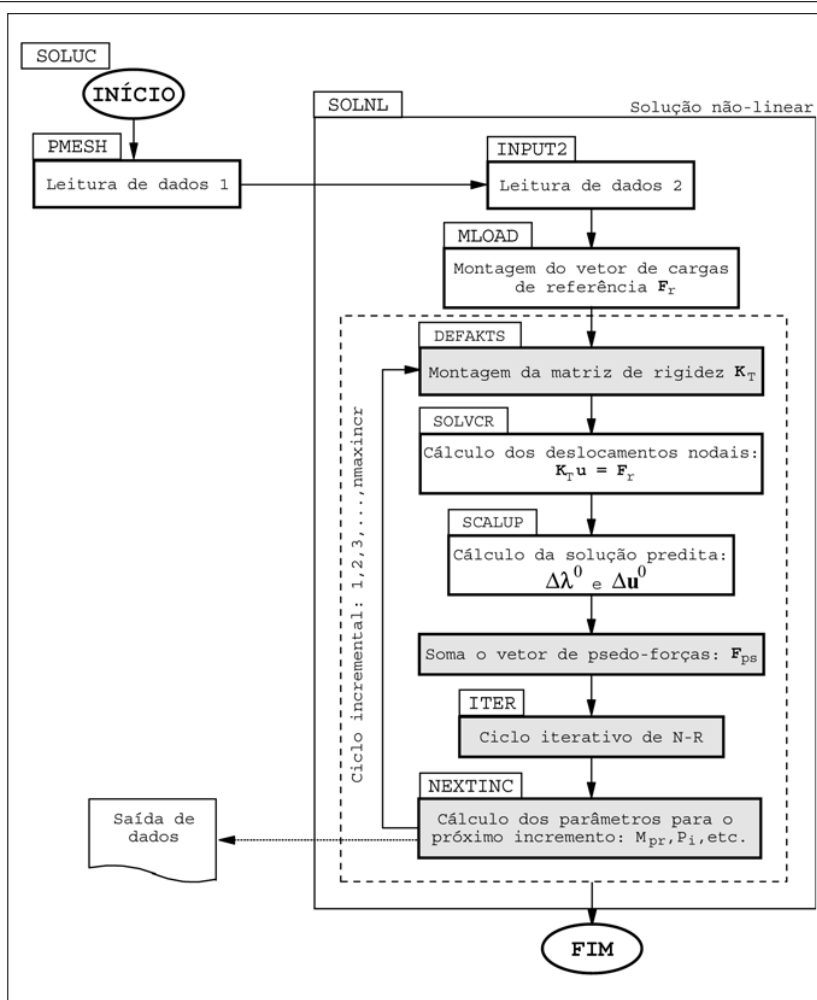


Figura 5 - Procedimentos para solução não-linear.

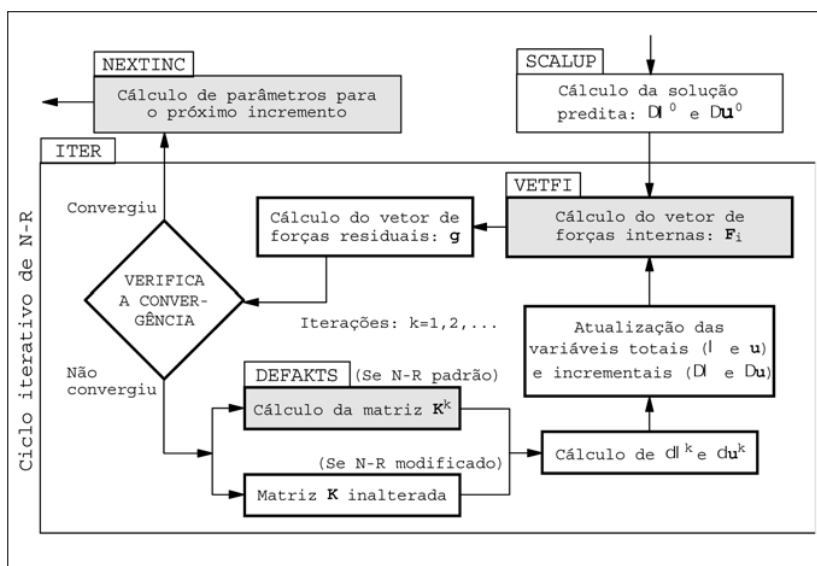


Figura 6 - Ciclo iterativo de Newton-Raphson.



de dois pontos da estrutura e o fator de carga  $\lambda$ . Para isso, foi utilizada uma malha de EF, que divide as colunas em 4 elementos e as vigas, em 20 elementos iguais. As curvas obtidas aqui, através das abordagens elasto-plástica (EP) e plástica-refinada (PR), foram comparadas com os resultados de Vogel (1985), como pode ser visto nas Figuras 8 e 9.

Também foram feitas comparações entre os fatores de carga limites obtidos pelas formulações implementadas e aqueles fornecidos por Chen et al.(1996) e Chan e Chui (2000) (ver as Tabelas 1 e 2). Essas tabelas indicam que os resultados aqui obtidos estão bastante próximos daqueles da literatura.

Tabela 1 - Fatores de carga limites para a formulação EP.

| Referência            | Fator de carga |
|-----------------------|----------------|
| Presente trabalho, EP | 1,05           |
| Vogel (1985), RP      | 0,96           |

Tabela 2 - Fatores de carga limites para a formulação PR.

| Referência            | Fator de carga |
|-----------------------|----------------|
| Presente trabalho, PR | 0,95           |
| Chen et al. (1996)    | 0,95           |
| Chan e Chui (2000)    | 0,97           |
| Vogel (1985), RP      | 0,96           |
| Vogel (1985), ZP      | 1,07           |

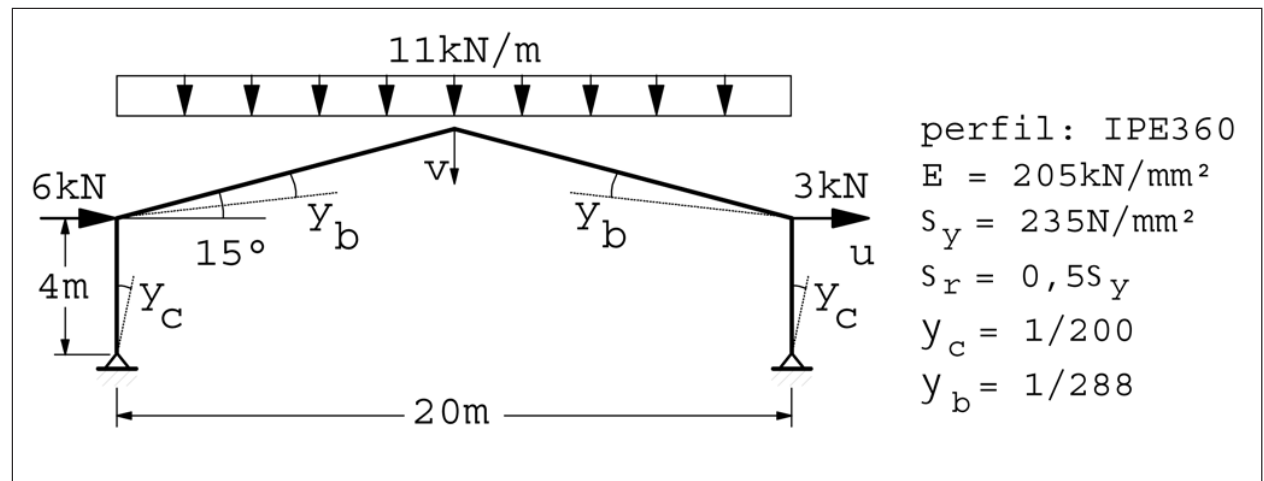


Figura 7 - Pórtico tipo galpão.

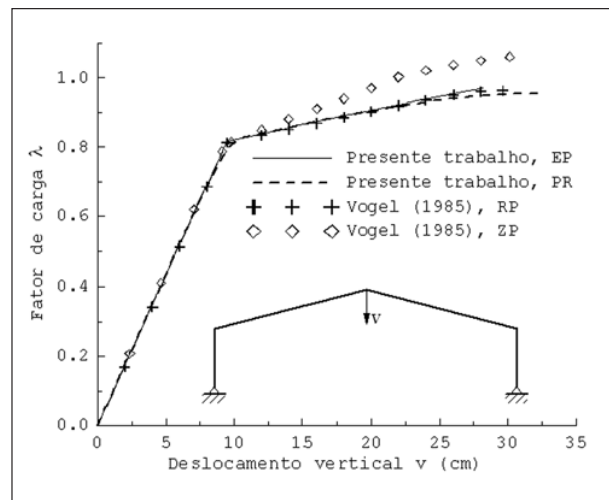


Figura 8 - Curva carga-deslocamento vertical v.

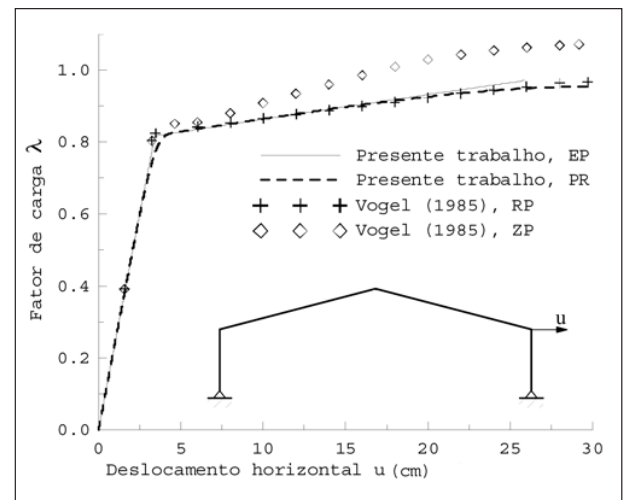


Figura 9 - Curva carga-deslocamento horizontal u.

## 4.2 Pórtico de Dois Andares

Analisa-se, agora, o comportamento inelástico de um pórtico retangular de dois andares e com bases rotuladas, onde as vigas são formadas por perfis do tipo W360x72 e as colunas, por perfis W310x143. Como apresentado na Figura 10, o carregamento principal é formado por forças verticais  $P$ , aplicadas nos quatro pontos de conexão viga-coluna; o carregamento desestabilizador é composto por duas forças horizontais,  $0,001P$  e  $0,002P$ , aplicadas nos pontos onde a viga superior e a inferior se juntam com a coluna esquerda, respectivamente.

As cargas limites obtidas por esse trabalho estão na Tabela 3 e as trajetórias de equilíbrio são apresentadas na Figura 11. Como esperado, o valor obtido aqui para a carga crítica, usando a formulação plástica-refinada (PR), é próximo daquele de Chan e Chui (2000). Observa-se, também, que a carga crítica obtida pela formulação elasto-plástica (EP) é maior que aquela fornecida pela formulação plástica-refinada, o que é característico nesse caso.

Outra análise importante realizada por Chan e Chui (2000) foi a de buscar o

traçado da trajetória pós-crítica do pórtico. Procurando reproduzir os resultados obtidos por esses pesquisadores, utilizou-se, aqui, a estratégia do comprimento de arco na solução não-linear. Os resultados dessa análise são mostrados na Figura 12, onde foi empregada a formulação plástica-refinada (PR).

## 4.3 Pórtico de Seis Andares

O último sistema estrutural a ser analisado foi também estudado por Vogel (1985) e é bastante utilizado na calibração de programas computacionais para análise inelástica de estruturas de aço. Trata-se de um pórtico duplo com seis andares, como ilustrado na Figura 13. Suas dimensões podem ser conferidas, assim como os tipos de perfis usa-

dos, na mesma figura. Seu carregamento principal é formado por cargas distribuídas nas vigas e por cargas concentradas de desestabilização, que são aplicadas na lateral do pórtico, nos pontos de encontro das vigas com os pilares. Seguindo as prescrições da ECCS (1983), são aplicadas imperfeições no prumo dos pilares no valor de  $\psi_0 = 1/300$ .

Vogel (1985) empregou os métodos da zona plástica (ZP) e da rótula plástica (RP) para resolver o pórtico. Ziemian (1993) reanalisou a estrutura através dos programas computacionais CU-SP2D e CU-STAND, que usam as mesmas metodologias, respectivamente. Liew et al. (1993) e Chan e Chui (2000) também estudaram o mesmo pórtico com o objetivo de calibrar e validar suas implementações.

Tabela 3 - Cargas limites para o pórtico de dois andares.

| Referência            | Carga crítica(kN) |
|-----------------------|-------------------|
| Presente trabalho, EP | 2173              |
| Presente trabalho, PR | 1941              |
| Chan e Chui (2000)    | 1955              |

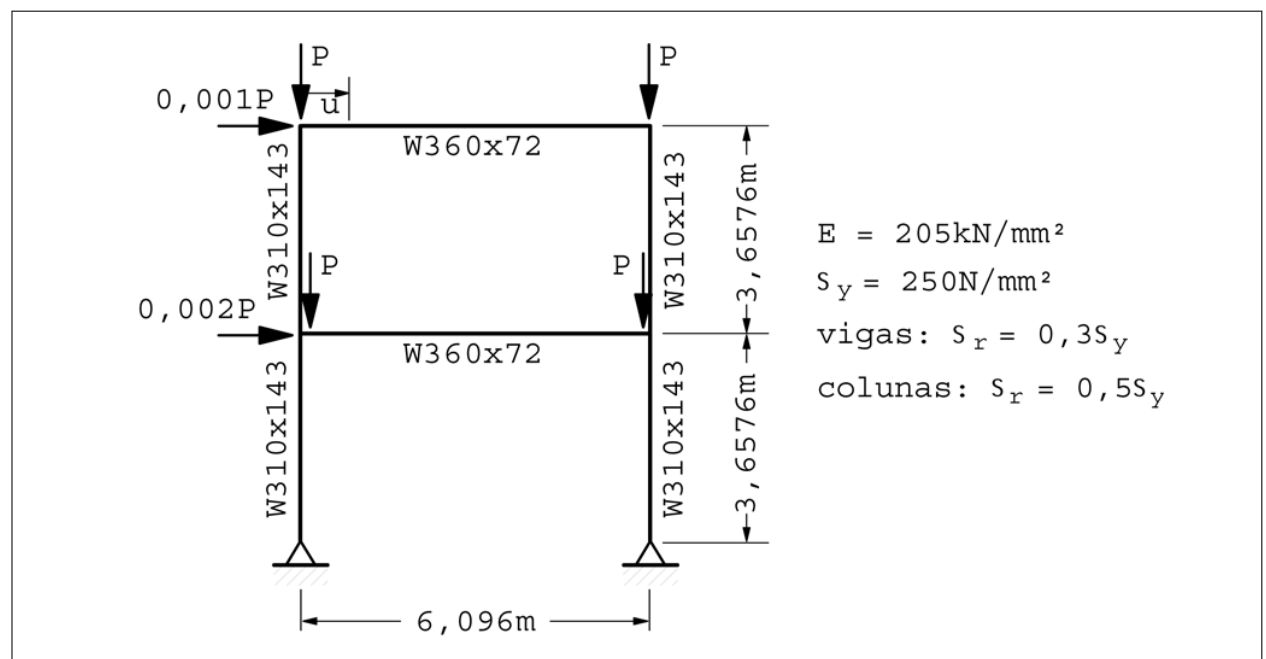


Figura 10 - Pórtico de dois andares com bases rotuladas.

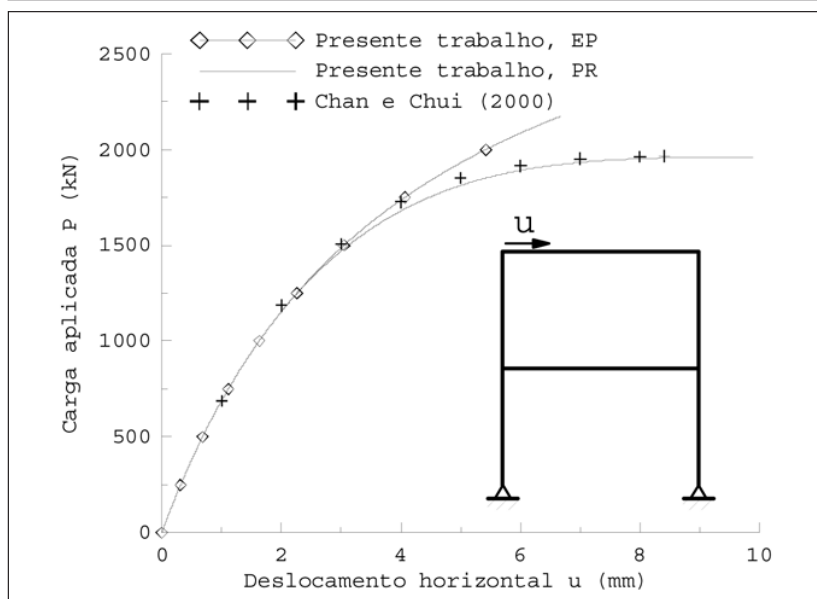


Figura 11 - Trajetórias de equilíbrio do pórtico de dois andares.

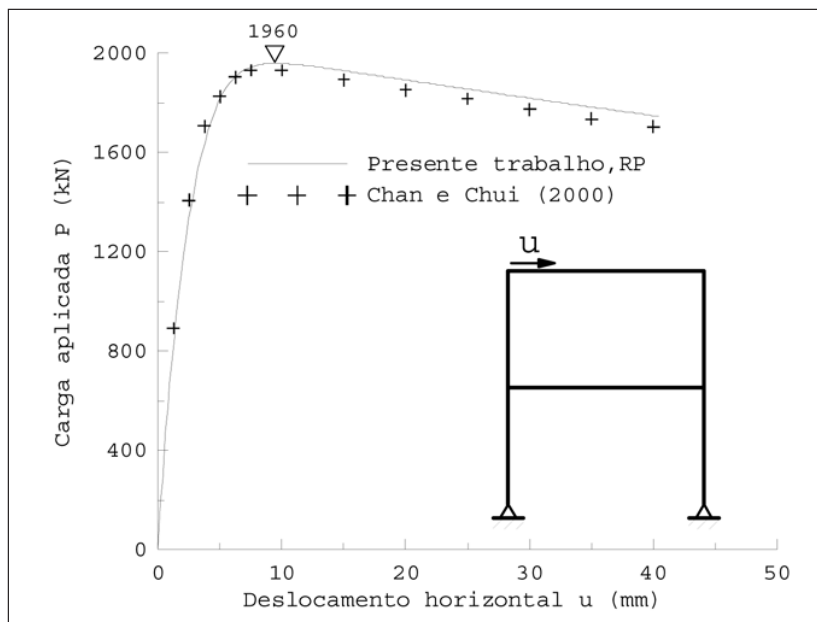


Figura 12 - Trajetórias de equilíbrio pós-crítica do pórtico de dois andares.

Mais uma vez, a análise realizada nesse trabalho consistiu em obter a carga crítica e as trajetórias de equilíbrio da estrutura, tomando-se, como referência, o deslocamento horizontal de um ponto do pórtico localizado no sexto andar. A malha de EF adotada para essa análise foi definida pela divisão das vigas em quatro elementos e as colunas, em dois elementos iguais.

A Tabela 4 fornece os valores críticos do fator de carga obtidos aqui e os apresentados pelos trabalhos citados.

Por fim, a coerência e a boa aproximação dos resultados extraídos desse trabalho podem ser conferidas adicionalmente através das trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 14.

## 5. Considerações finais

A formulação inelástica puramente elasto-plástica, embora simplificada, se apresenta como uma alternativa viável, no caso de estruturas onde existe o predomínio de pequenos carregamentos axiais, com dominância de momentos fletores, ou em sistemas estruturais com alta esbeltez, onde existe predomínio dos efeitos de segunda ordem. Entretanto trata-se de um método aproximado e geralmente superestima a resistências e rigidez dos elementos no regime inelástico para estruturas compactas, fornecendo, normalmente, cargas críticas maiores que as reais. Esse fator não permite sua classificação como um método de análise avançada. Os ganhos computacionais proporcionados por essa formulação, em relação à plástica-refinada, também não são relevantes.

Oriunda do refinamento da formulação elasto-plástica, a formulação plástica-refinada demonstrou ser um grande aperfeiçoamento desta última. Essa metodologia aplica formulações especiais para simular o efeito da distribuição da plasticidade, responsável pela degradação da resistência e rigidez dos elementos durante a formação da rótula plástica, simulando de forma adequada a distribuição da plasticidade. Sua principal vantagem é a de ser tão simples e eficiente quanto a abordagem elasto-plástica, porém mantendo os resultados suficientemente precisos na avaliação da resistência e estabilidade de um sistema estrutural e seus componentes, comparando-se, assim, ao método da zona plástica.

O emprego da análise avançada como metodologia de análise/projeto de estruturas metálicas apresenta diversas vantagens. Entre essas vantagens destaca-se o fato de capturar o limite de resistência e de estabilidade de um sistema estrutural e seus membros de forma direta, sem que haja necessidade de verificação separada da capacidade de cada membro, fato que a torna tempo-eficaz, eliminando completamente as verificações da capacidade dos membros, que são frequentemente cansativas e confusas.

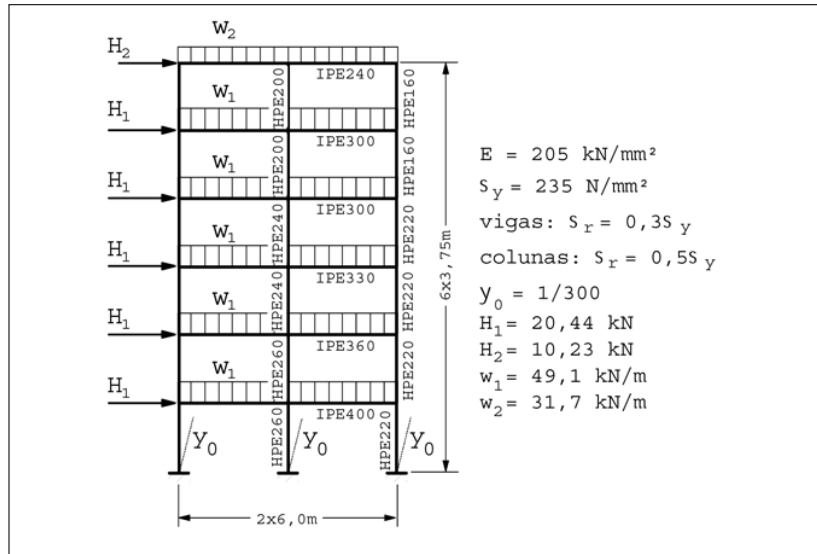


Figura 13 - Pórtico de seis andares (Vogel, 1985).

Tabela 4 - Fatores de carga crítica para a formulação PR.

| Referência            | Fator de carga |
|-----------------------|----------------|
| Presente trabalho, PR | 1,15           |
| Chan e Chui (2000)    | 1,13           |
| Ziemian (1993), RP    | 1,13           |
| Vogel (1985), RP      | 1,12           |
| Ziemian (1989), ZP    | 1,18           |
| Vogel (1985), ZP      | 1,11           |

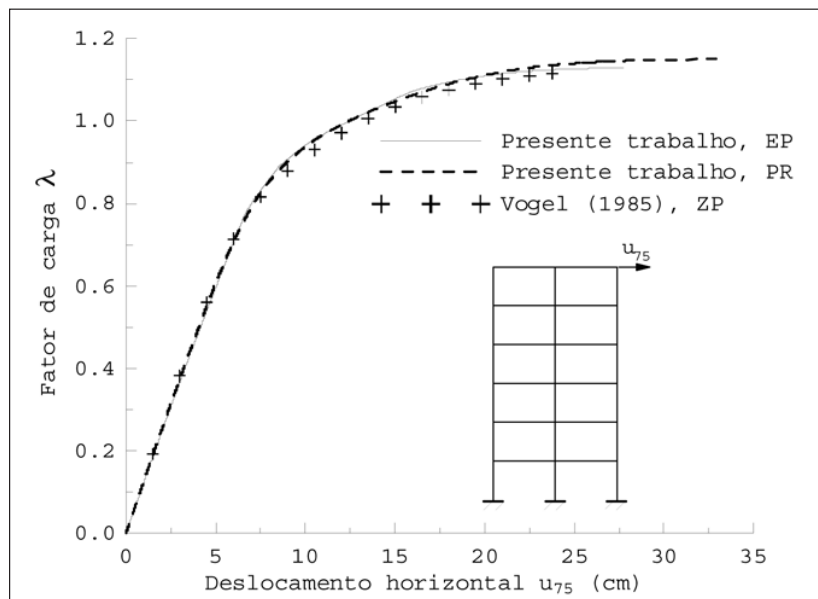


Figura 14 - Trajetórias de equilíbrio do pórtico de seis andares.

## 6. Agradecimentos

Os autores são gratos à USIMINAS, CNPq e CAPES pelo apoio recebido para a realização desse trabalho de pesquisa.

## 7. Referências

- AISC, *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. 1ª edn. Chicago: American Institute of Steel Construction, AISC, 1986. IL.
- BS 5950, *Structural use of steelwork in buildings*. Part 1. London: British Standards Institution, 1990.
- CHAN, S.-L., CHUI, P.P.T. A generalized design-based elasto-plastic analysis of steel frames by sections assemblage concept. *Journal of Engineering Structures*. v. 19, n. 8, p. 628-636, 1997.
- CHAN, S.-L., CHUI, P.P.T. *Non linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Oxford, Elsevier: 2000.
- CHEN, W.F., GOTO, Y., LIEW, J.Y.R. *Stability design of semi-rigid frames*. USA: John Wiley & Sons Inc., 1996.
- CHEN, W.F., KIM, S.-E. *LRFD steel design using advanced analysis*. CRC Press, Inc., Flórida, USA, 1997.
- CHEN, W.F., SOHAL, I. *Plastic design and second order analysis of steel frames*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- ECCS, *Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints*. Pub. n. 33 European Convention for Constructional Steelwork, 1983.
- GALVÃO, A.S. *Formulações não-lineares de elementos finitos para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*. Ouro Preto: PROPEC /EM/UFOP, 2000. (Dissertação de Mestrado).
- GALVÃO, A.S. *Análise linear de estruturas reticulares planas e espaciais*. Rio de Janeiro: 2001. (Trabalho da disciplina Estudo Orientado do Programa de Pós-Graduação da PUC-Rio de Janeiro).
- GALVÃO, A.S. *Instabilidade estática e dinâmica de pórticos planos com ligações semi-rígidas*. Rio de Janeiro: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, 2004. (Tese de Doutorado).
- LIEW, J.Y.R., WHITE, D.W. e CHEN, W.F. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *J. Struct. Div. ASCE*, v. 119, N. 11, p. 3217-3237, 1993.
- MACHADO, F.C.S. *Análises inelásticas de segunda ordem de sistemas estruturais metálicos*. Ouro Preto: PROPEC/EM/UFOP, 2005. (Dissertação de Mestrado).
- PINHEIRO, L. *Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos*. Ouro Preto: PROPEC/EM/UFOP, 2003. (Dissertação de Mestrado).
- ROCHA, G. *Estratégias numéricas para análise de elementos estruturais esbeltos metálicos*. Ouro Preto: PROPEC /EM/UFOP, 2000. (Dissertação de Mestrado).
- SCI, *Steelwork design guide to BS5950*. Part 1, v. 1, Section properties and member capacities, 2ª ed., The Steel Construction Institute, 1983.
- SILVEIRA, R.A.M. *Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato*. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 1995. (Tese de Doutorado).
- VOGEL, U. *Calibrating frames*, Stahlbau, v. 54 (outubro), p. 295-311, 1985.
- ZIEMIAN, R.D. Examples of frames studies used to verify advanced methods of inelastic analysis. In: *Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames*. USA: SSRIC, Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1993.

Artigo recebido em 07/04/2005 e  
aprovado em 02/08/2005.