



Rem: Revista Escola de Minas

ISSN: 0370-4467

editor@rem.com.br

Escola de Minas

Brasil

Ajeje, Flávio Henrique; Silva Penna, Samuel; da Silva Pitangueira, Roque Luiz

Elementos finitos de casca do sistema computacional INSANE

Rem: Revista Escola de Minas, vol. 64, núm. 4, octubre-diciembre, 2011, pp. 399-405

Escola de Minas

Ouro Preto, Brasil

Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56421349003>

- Como citar este artigo
- Número completo
- Mais artigos
- Home da revista no Redalyc

redalyc.org

Sistema de Informação Científica

Rede de Revistas Científicas da América Latina, Caribe, Espanha e Portugal  
Projeto acadêmico sem fins lucrativos desenvolvido no âmbito da iniciativa Acesso Aberto

## Elementos finitos de casca do sistema computacional INSANE

*Shell finite elements of the INSANE computational system*

### Flávio Henrique Ajeje

Universidade Federal de Minas Gerais.  
[fhajeje@yahoo.com.br](mailto:fhajeje@yahoo.com.br)

### Samuel Silva Penna

Universidade Federal de Minas Gerais.  
[spenna@dees.ufmg.br](mailto:spenna@dees.ufmg.br)

### Roque Luiz da Silva Pitangueira

Professor associado do Departamento de Engenharia de Estruturas.  
Universidade Federal de Minas Gerais.  
[roque@dees.ufmg.br](mailto:roque@dees.ufmg.br)

### Resumo

Esse artigo apresenta os elementos finitos de casca do sistema computacional INSANE (INTERACTIVE STRUCTURAL ANALYSIS ENVIRONMENT): retangular de quatro nós e triangular de três nós, obtidos por combinações de esforços de membrana e flexão baseadas na Teoria de Kirchhoff; quadriláteros de quatro, oito e nove nós, que combinam esforços de membrana, flexão e cisalhamento, conforme a Teoria de Reissner-Mindlin. Após resumir as características dos elementos, o artigo apresenta resultados de três estudos de convergência e de duas aplicações práticas: uma barragem em arco e um reservatório cônico-cilíndrico. Os resultados são comparados com soluções analíticas e com aqueles obtidos com o elemento finito de casca do SAP2000.

**Palavras-chave:** Análise estrutural, elementos finitos de cascas planas, software livre.

### Abstract

*This paper presents the shell finite elements of the computer system INSANE (INTERACTIVE STRUCTURAL ANALYSIS ENVIRONMENT): four-node rectangular and three-node triangular, obtained by combining membrane and bending efforts, based on the Theory of Kirchhoff; a quadrilateral of four, eight and nine nodes that combine membrane, bending and shear efforts, according to the Reissner-Mindlin Theory. After summarizing the characteristics of the elements, the paper presents results of three convergence studies and two practical applications: an arch dam and a conical cylindrical reservoir. The results are compared with analytical solutions and those obtained with the shell finite element of SAP2000.*

**Keywords:** Structural analysis, flat shell finite elements, free software.

### 1. Introdução

Modelos matemáticos para descrever o comportamento de uma estrutura em forma de casca apresentam grande complexidade. Por esse motivo, as soluções analíticas são desenvolvidas somente para alguns casos específicos, dificultando a aplicação prática das mesmas. Modelos discretos do Método dos Elementos Finitos (MEF) permitem obter soluções aproximadas para condições geométricas, de contorno e de

carregamento genéricas. Entre os modelos discretos do MEF, destacam-se por sua simplicidade, os que são obtidos por meio de combinações de elementos finitos de placas e elementos finitos de estado plano de tensão. Esses modelos são capazes de representar os esforços de flexão, cisalhamento e membrana da casca, combinando elementos de placa que consideram somente os efeitos de flexão, formulados segundo a Teoria

de Kirchhoff, ou os que consideram os efeitos de flexão e de cisalhamento, formulados segundo a teoria de Reissner-Mindlin, com elementos de estado plano de tensão, representando os esforços

de membrana. Nesse cenário, devido à grande variedade de elementos finitos de placas disponíveis na literatura, é possível conceber diversas combinações dos mesmos com elementos de estado

plano de tensões. Esse artigo apresenta os elementos finitos de casca, baseados em algumas das referidas combinações, disponíveis no sistema computacional INSANE.

## 2. INSANE, um projeto de software livre

Afinal, o que é software livre? Richard Stallman, criador do Projeto GNU, cujo principal objetivo era desenvolver um sistema operacional que pudesse ser distribuído livremente, define software livre como um programa de computador que satisfaz a quatro liberdades (DiBona et al., 1999): 1) a liberdade de executá-lo para qualquer propósito; 2) a liberdade de modificá-lo para adaptá-lo às suas necessidades; 3) a liberdade de redistribuir cópias, de forma gratuita ou não; 4) a liberdade de distribuir cópias modificadas, beneficiando a comunidade com as melhorias.

Segundo essas premissas ideológicas, o projeto INSANE nasceu do desejo de desenvolver um sistema computacional livre, de código aberto, para dar suporte a pesquisas na área de métodos numéricos e computacionais aplicados à engenharia. Perseguindo esse objeti-

vo, desde 2002, o sistema atualmente reúne recursos para modelagem geométrica; geração de malhas; visualização de resultados; análise estática linear, fisicamente não-linear e geometricamente não-linear; análise dinâmica linear e geometricamente não-linear. O ambiente gráfico interativo do sistema INSANE é organizado em três grandes aplicações: o pré-processador, o processador e o pós-processador. Todas são implementadas em linguagem JAVA segundo o paradigma da Programação Orientada a Objetos, empregando-se padrões de projeto de software adequados, e apoiadas em modernos recursos tecnológicos. Essa metodologia vem propiciando o desenvolvimento de um ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade.

Especificamente, os recursos para

modelos estruturais de cascas foram inseridos no sistema a partir do trabalho de Ajeje (2009), que combinou as contribuições anteriores de Almeida (2005), Saliba (2007) e Penna (2007). Almeida (2005) implementou elementos finitos paramétricos no sistema, incluindo aí todos os elementos planos triangulares e quadrilaterais para estado plano de tensão, fundamentais para as combinações que geram elementos finitos de casca planos. Os elementos finitos de placa triangulares e quadrilaterais, tanto os baseados na Teoria de Kirchhoff como os baseados na Teoria de Reissner-Mindlin, também fundamentais para as referidas combinações, foram implementados no sistema a partir do trabalho de Saliba (2007). Os recursos gráficos interativos, indispensáveis para visualização dos resultados, são oriundos do trabalho de Penna (2007).

## 3. Elementos finitos de casca do INSANE

Conforme extensa bibliografia sobre o tema (Hughes, 2000; Oñate, 1995; Soriano, 2003; Zienkiewicz & Taylor, 2000; entre outras referências), similarmente às placas, as teorias de cascas diferem entre si, basicamente, quanto à idealização das deformações de esforço cortante, podendo ser divididas, basicamente, em duas teorias: a teoria de Reissner-Mindlin, aplicadas a cascas espessas, e a teoria de Kirchhoff, aplicadas a cascas finas. Para problemas geometricamente lineares, essas teorias fundamentam-se em quatro hipóteses (Figuras 1, 2 e 3): (i) todos os pontos contidos numa reta nor-

mal ao plano médio têm o mesmo deslocamento transversal; (ii) a tensão normal na direção transversal é desprezível; e (iii) retas normais ao plano médio da casca indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais ao plano médio, após a deformação desta, para a teoria de Reissner-Mindlin; ou (iv) retas normais ao plano médio da casca indeformada permanecem retas e normais ao plano médio, após sua deformação, para a teoria de Kirchhoff. A partir dessas hipóteses, pode-se obter os campos de deslocamentos para cada teoria, como ilustrados nas Figuras 2 e 3.

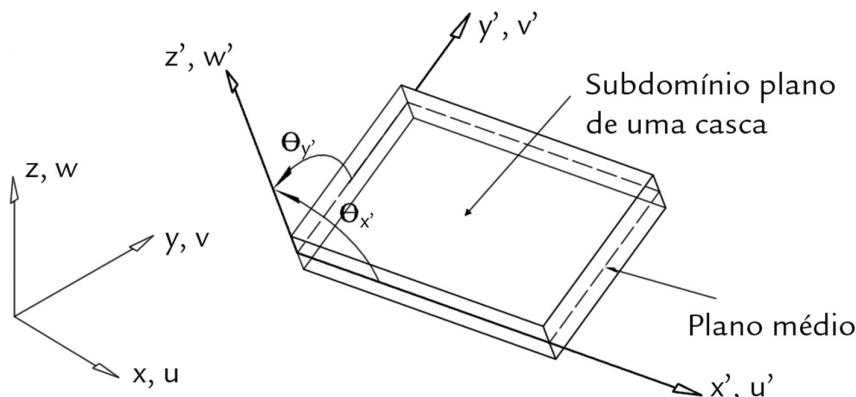


Figura 1  
Subdomínio plano de uma casca no espaço. Sistemas de coordenadas local e global.

Figura 2  
Campo de deslocamentos segundo a Teoria de Reissner-Mindlin.

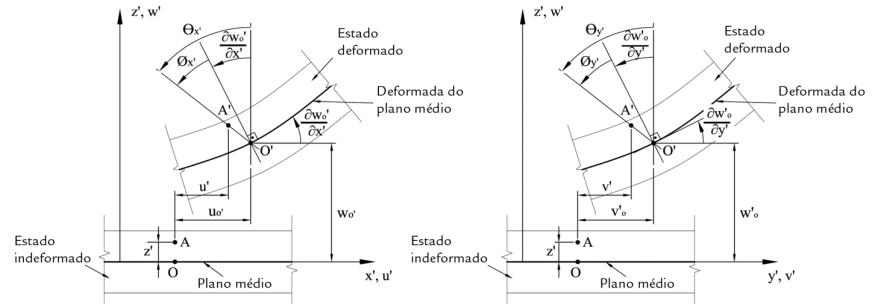
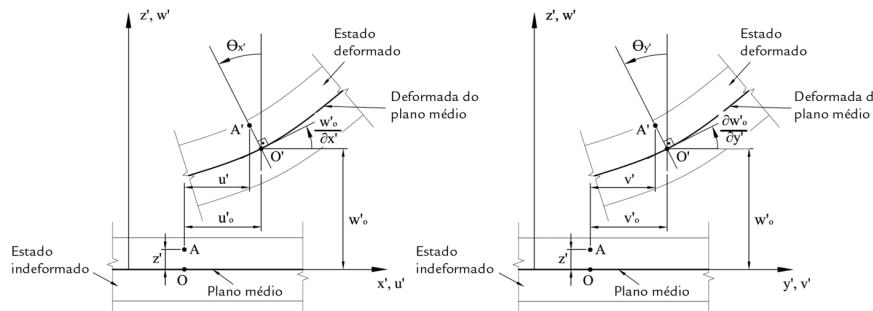


Figura 3  
Campo de deslocamentos segundo a Teoria de Kirchhoff.



combina EM com o EP triangular de três nós, que foi desenvolvido por Cheung et al. (1968). Nos elementos do segundo grupo, tanto os efeitos de membrana como os de flexão são aproximados parametricamente, o que permite a generalização da geometria e da implementação computacional. Por outro lado, quan-

do os elementos baseados na Teoria de Reissner-Mindlin são usados para cascas finas, pode ocorrer o efeito de bloqueio da solução e, portanto, alguma técnica para evitá-lo deve ser adotada. A técnica de deformação de cisalhamento imposta foi escolhida para os elementos implementados no INSANE, conforme sugerido por

Önate (1995). Assim, foram disponibilizados os seguintes elementos baseados na Teoria de Reissner-Mindlin: quadrilaterais de 4, 8 e 9 nós (RMQ4, RMQ8 e RMQ9, respectivamente) e quadrilaterais com deformação de cisalhamento imposta correspondentes (RMCIQ4, RMCIQ8 e RMCIQ9).

#### 4. Estudos de convergência

Conforme detalhado em Ajeje (2007), a implementação dos cinco elementos foi verificada através do teste da malha de Irons ou “Patch Test”, como sugerido por MacNeal e Harder (1985). Para esse teste, uma casca retangular formada por elementos com geometria irregular foi submetida a deslocamentos prescritos em suas bordas, correspondentes a esforços de membrana e de flexão

constantes no domínio da casca. Como esperado, para os esforços de membrana, todos os elementos atenderam ao “Patch Test”, uma vez que todos eles, mesmo quando distorcidos, mantêm a aproximação constante para o campo de tensões. No caso de flexão, somente os elementos de Reissner-Mindlin com Cortante Imposto (RMCI) passaram no teste, uma vez que, como sabido, os

elementos MZC e CKZ não atendem ao critério da conformidade. Entretanto, o insucesso de um elemento nos “Patch Tests” não invalida sua utilização prática, se esse elemento apresentar um bom comportamento em estudos de convergência. Detalhes de vários destes estudos podem ser encontrados em Ajeje (2007). Alguns resultados de três desses estudos são aqui apresentados.

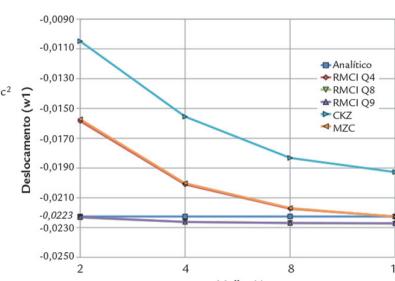
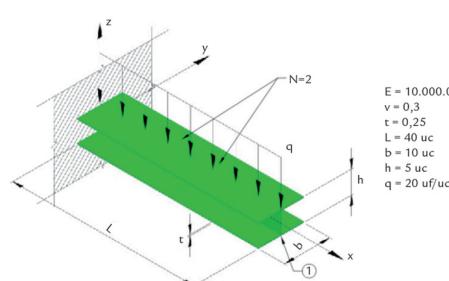
#### Viga em balanço

Uma viga de seção  $I$  com vão de  $40\text{ uc}$  (unidades de comprimento) e submetida a carga distribuída de  $20\text{uf/uc}$  (unidade de força por unidade de com-

primento) foi discretizada utilizando-se os cinco elementos implementados, conforme mostra a Figura 4. Os valores do deslocamento transversal do

ponto 1 na extremidade da viga ( $W_1$ ) obtidos com 4 malhas diferentes ( $N=2, 4, 8$  e  $16$ ), também são apresentados na figura.

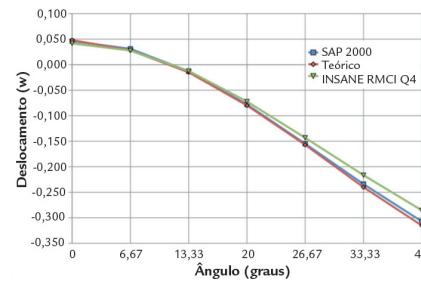
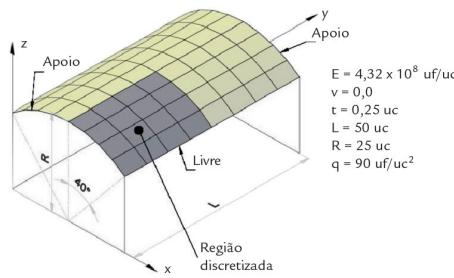
Figura 4  
Resultados de estudo de convergência para uma viga em balanço.



## Cobertura em abóbada cilíndrica

Outro estudo refere-se à cobertura em abóbada cilíndrica da Figura 5. A geometria, as propriedades e o carregamento são sugeridos por Macneal e Harder (1985). A estrutura é simplesmente apoiada ao longo de sua borda curva e sua borda reta é livre. O car-

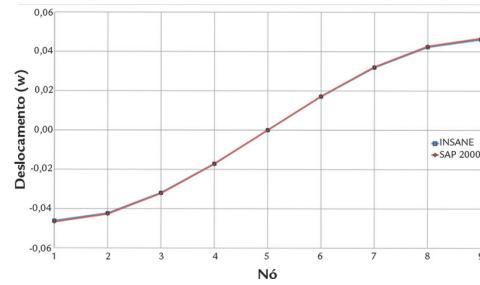
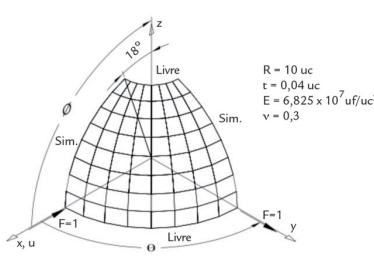
regamento é de  $90 \text{ uF/uc}^2$ , distribuído verticalmente ao longo de toda cobertura. Valendo-se da simetria, apenas 1/4 da estrutura é de fato analisada e uma malha de  $6 \times 6$  elementos RMCIQ4 é utilizada. O gráfico da Figura 5 mostra valores do deslocamento vertical ( $w$ ) ao



## Casca esférica aberta

Nesse exemplo, conforme a Figura 6, uma estrutura em casca hemisférica é analisada com um carregamento de quatro cargas pontuais com sentidos alternados: a cada  $90^\circ$  ao longo do equador

do hemisfério, com intensidade igual a  $2 \text{ uF}$ . Utilizando simetria, apenas 1/4 da estrutura é modelada. A casca é aberta no topo do hemisfério e tanto a borda superior como a inferior são livres. Uma



Os resultados do exemplo da viga em balanço (Figura 4) demonstram boa convergência de todos os cinco elementos para a solução analítica ( $w_1 = 0,0223 \text{ uc}$ ), destacando-se os elementos com ordem de aproximação mais alta (RMCIQ8 e RMCIQ9). Nesse caso, ao se comparar os elementos de classe  $C_1$  com os de classe  $C_0$ , observa-se uma coincidência dos resultados dos elementos MZC e RMCIQ4, que se explica pela igual capacidade dos mesmos (ambos possuem quatro nós) em

representar o problema em questão. No gráfico comparativo da Figura 5, para o problema da casca cilíndrica, o elemento RMCIQ4 mostra-se mais rígido, revelando deslocamentos pouco menores que os analíticos e os obtidos com o SAP2000. Conforme manual do programa, o elemento de casca do SAP2000 é o descrito em Ibrahimbegovic e Wilson (1991). Este elemento é baseado na Teoria de Reissner-Mindlin e possui aproximação quadrática tanto para os deslocamentos no plano

## 5. Aplicações práticas

Os elementos de casca são úteis em inúmeras aplicações na engenharia civil, mecânica, naval, aeronáutica, entre

outras. Duas dessas aplicações são aqui apresentadas e os resultados obtidos com o elemento RMCIQ4 do INSANE são

longo da seção central ( $y = L/2$ ). Os resultados do INSANE são comparados aos resultados analíticos e ao elemento "shell-thick" do programa comercial SAP2000-Versão 11.0.8. Os resultados analíticos foram obtidos por Scordelis e Lo (1964).

Figura 5  
Resultados de estudo de convergência para uma cobertura em abóbada cilíndrica.

malha com  $8 \times 8$  elementos RMCIQ4 foi adotada. O gráfico da Figura 6 mostra valores dos deslocamentos verticais ao longo da borda inferior ( $z = 0,0$ ) obtidos com o INSANE e com o SAP2000.

Figura 6  
Resultados de estudo de convergência para uma casca esférica.

(membrana), como para os deslocamentos fora do plano do elemento (flexão). Isso explica o melhor desempenho desse elemento em relação ao elemento RMCIQ4 do INSANE, onde as referidas aproximações são lineares. Entretanto, para o problema da casca hemisférica (Figura 6), no qual os deslocamentos são satisfatoriamente descritos com aproximação linear, os resultados obtidos com o elemento do SAP2000 e os obtidos com o elemento RMCIQ4 do INSANE são coincidentes.

comparados com os obtidos com o programa SAP2000.

## Barragem em arco

O primeiro exemplo é uma barragem em arco submetida à pressão em

sua parte convexa. A geometria e propriedades da estrutura foram adotadas

de acordo com Zienkiewicz e Taylor (2000). A descrição geométrica e as

características do modelo discreto são mostradas na Figura 7.

A barragem foi modelada com elementos RMCIQ4. Cada elemento possui dimensões de  $6 \text{ uc} \times 6 \text{ uc}$ . Os nós coinci-

dentes com a linha de fundação da barragem foram engastados e o carregamento de pressão foi aplicado na direção normal de cada elemento. A Figura 8 apresenta os resultados dos esforços normais.

Figura 7  
Modelo de elementos finitos do  
INSANE para a barragem em arco.

Figura 8  
Esforços normais na barragem:  
a) variação no domínio e  
b) valores na linha de centro.

### Reservatório cônico-cilíndrico

O segundo exemplo é o reservatório cônico-cilíndrico, apoiado em vigas e pilares, mostrado na Figura 9, uma estrutura muito utilizada na indústria de mineração, química e de tratamento de esgoto. O reservatório é apoiado em 16 pilares de seção circular de diâmetro igual a  $0,5 \text{ uc}$  (2 pilares a cada  $45^\circ$ ), que elevam a estrutura  $3,0 \text{ uc}$  acima do nível de referência. O diâmetro total do reservatório é de  $20,0 \text{ uc}$ . A

altura total do reservatório é de  $4,0 \text{ uc}$  ( $2,5 \text{ uc}$  da parte cilíndrica e  $1,5 \text{ uc}$  da parte cônica). O reservatório é carregado com uma pressão que varia linearmente: igual a  $0,0 \text{ uf/uc}^2$ , na elevação  $7,0 \text{ uc}$ , até  $4,0 \text{ uf/uc}^2$ , na elevação  $3,0 \text{ uc}$ . Valendo-se da simetria, apenas  $1/4$  da estrutura é modelada. Os detalhes da malha de elementos finitos, que combina elementos RMCIQ4 com elementos de pórtico espacial, também são

A distribuição desses esforços no domínio do problema, obtidos no INSANE, é dada na Figura 8(a). A Figura 8(b) apresenta um gráfico comparativo dos esforços normais na linha de centro da malha.

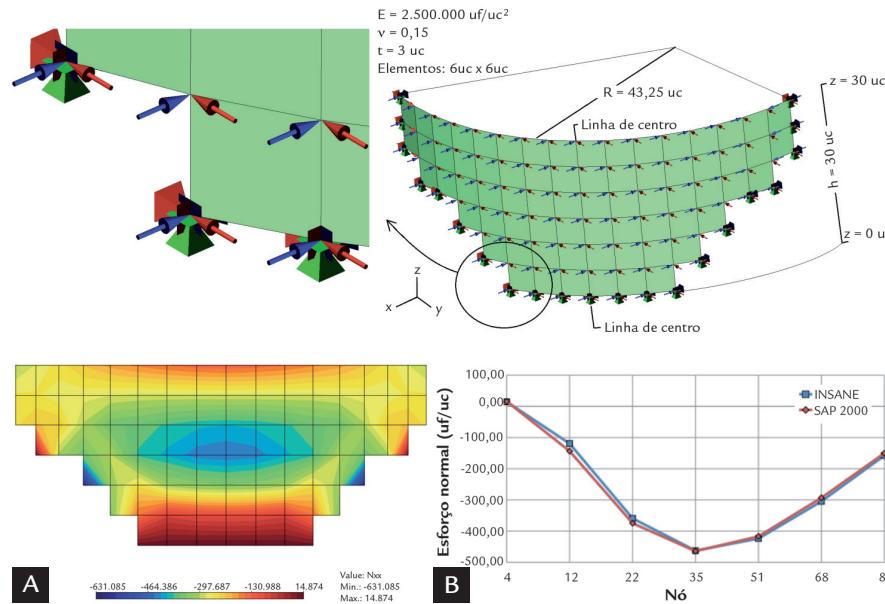


Figura 9  
Detalhamento geométrico e modelo  
INSANE do reservatório cônico-cilíndrico.

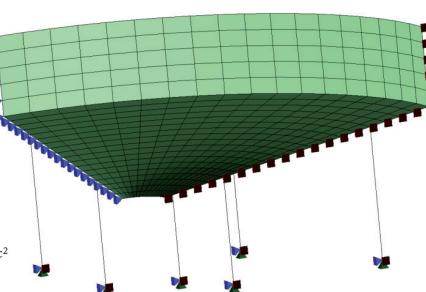
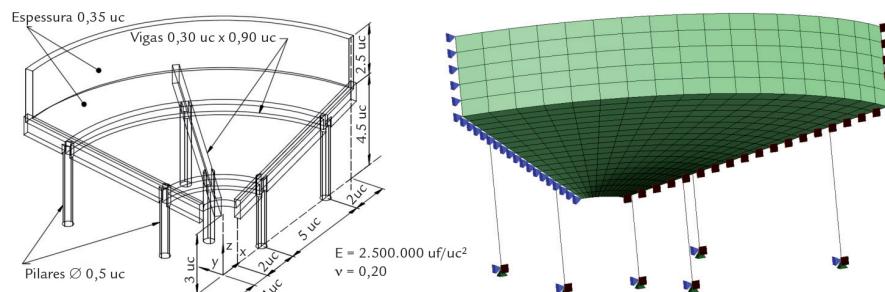
### 6. Considerações finais

Entre os recursos do Método dos Elementos Finitos disponíveis no INSANE, mostrou-se aqui os elementos finitos de casca planas: MZC e CKZ, tendo, como base, a Teoria de Kirchhoff; RMQ4, RMQ8, e RMQ9, tendo, como base, a Teoria de Reisner-Mindlin; RMCIQ4, RMCIQ8 e RMCIQ9 – adap-

tações de RMQ4, RMQ8 e RMQ9, respectivamente, com deformação de cisalhamento imposta. Os recursos foram ilustrados para modelos de cascas finas. Tais resultados foram comparados com soluções analíticas e com os resultados obtidos com o programa SAP2000. As comparações com as soluções analíticas

mostrados na Figura 9.

A Figura 10 mostra valores das flechas para uma das vigas radiais internas e a Figura 11 apresenta a distribuição das flechas no domínio do problema. Novamente, o modelo com elementos RMCIQ4 do INSANE mostrou-se mais rígido que o modelo do SAP2000, conforme mostra a Figura 10, mas os dois resultados são bastante próximos.



permitem validar as implementações e caracterizar as limitações de cada um dos elementos quanto ao seu uso. As comparações com os resultados do SAP2000 mostram que o sistema pode ser satisfatoriamente utilizado em aplicações variadas. Essas comparações também revelam que os modelos do INSANE parecem

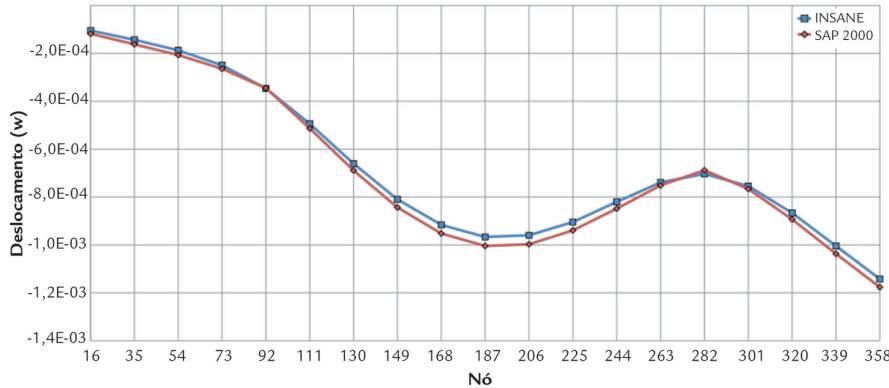


Figura 10  
Valores dos deslocamentos verticais em uma viga radial interna do reservatório.

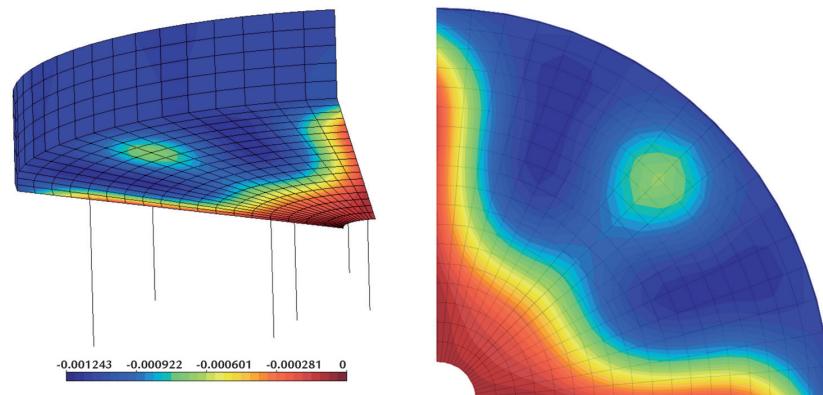


Figura 11  
Variação dos deslocamentos verticais no domínio do reservatório.

mais rígidos que os do *SAP2000*, o que se explica pela diferença entre as aproximações para os deslocamentos, tanto no plano (membrana), como fora do plano do elemento (flexão), dos elementos dos dois programas. Essa aproximação é quadrática, no elemento do *SAP2000*, e linear, no elemento RMCIQ4 do *INSANE*. Outras pequenas variações entre os resultados dos dois programas podem ter origem na ausência de informações sobre como o *SAP2000* procede para obter esforços nos nós e para evitar o efeito

de bloqueio. Esses procedimentos podem diferir dos adotados pelo *INSANE*, que, para obtenção de esforços nos nós, calcula-os nos pontos de integração, extrapola-os para os nós e suaviza a descontinuidade por média aritmética e, para evitar o bloqueio, como já dito, impõe que as deformações de cisalhamento sejam nulas. Por fim, é importante destacar que mais relevante que a quantidade e as características dos elementos finitos de casca aqui apresentados é o formato de implementação e distribuição. A implementação

segundo adequado projeto orientado a objetos e a distribuição na forma de código-fonte aberto permitem as liberdades pregadas por Richard Stallman, ao definir software livre. Para detalhes sobre a documentação e distribuição do sistema *INSANE*, o sítio [www.insane.dees.ufmg.br](http://www.insane.dees.ufmg.br) deve ser consultado. Lá estão disponíveis, além das diversas dissertações e teses que documentam o sistema, um manual para desenvolvimento com base em um sistema de controle de versão que permite o acesso a todo o código-fonte.

## 7. Referências bibliográficas

- AJEJE, F. H. *Abordagem orientada a objetos para implementação computacional de elementos finitos de cascas planas*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2007. (Dissertação de Mestrado).
- ALMEIDA, M. L. *Elementos finitos paramétricos implementados em Java*, Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2005. (Dissertação de Mestrado).
- CHEUNG, Y. K., KING, I. P., ZIENKIEWICZ, O. C. Slab bridges with arbitrary shape and support condition: a general method of analysis based on finite elements. *Proc. Inst. Civil Engng.*, v. 40, p. 9-36, 1968.
- DIBONA, C., OCKMAN, S., STONE, M. (Ed.). *Open sources*. Sebastopol: O'Reilly, 1999.
- HUGHES, T. J. R. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Nova York: Editora Dover, 2000.
- IBRAHIMEGOVIC, A., WILSON, E. L., A unified formulation for triangular and quadrilateral flat shell finite elements with six nodal degrees of freedom. *Communications in Applied Numerical Methods*, v. 7, p. 1-9, 1991.
- MACNEAL, R. H., HARDER, R. L. A proposed set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 1, p.3-20, 1985.

- MELOSH, R. J. A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. *Journal of Aerospace Science*, v. 28, p. 34-42, 1961.
- ONATE, E. *Calculo de estructuras por el metodo de elementos finitos*. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos em Ingeniería, 1995.
- PENNA, S. S. *Pós-processador para resultados de análise não-linear de modelos do método dos elementos finitos*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2007. (Dissertação de Mestrado).
- SALIBA, S. S. *Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2007. (Dissertação de Mestrado).
- SAP2000 - *Analysis Reference Manual*, Versão 11.0.8. Computers and Structures Inc., Berkeley.
- SCORDELIS, A. C., LO, K. S. Computer analysis of cylindrical shells. *Journal of the American Concrete Association*, v. 61, p. 539-562, 1964.
- SORIANO, H. L. *Método de elementos finitos em análise de estruturas*. São Paulo: EDUSP, 2003.
- ZIENKIEWICZ, O. C., CHEUNG, Y. K. The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs. *Proc. Inst. Civ. Engng.*, v. 28, p. 471-488, 1964.
- ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The finite element method*. (5. Ed.). Massachusetts: Butterworth-Heinemann, 2000.

---

Artigo recebido em 04 de abril de 2011. Aprovado em 24 de agosto de 2011.