Revista Mexicana de Física
ISSN: 0035-001X
rmf@ciencias.unam.mx
Sociedad Mexicana de Física A.C.
México

Reflexiones sobre los conceptos velocidad y rapidez de una partícula en física

S. Díaz-Solórzano y L. González-Díaz
Centro de Investigaciones de Matemática y Física, Departamento de Matemáticas y Física,
Instituto Pedagógico de Caracas, UPEL,
Av. Páez, Caracas 1021, Venezuela,
e-mail: srafael@ipc.upel.edu.ve, lagdelul@gmail.com

Recibido el 27 de abril de 2010; aceptado el 25 de mayo de 2010

Se hace una revisión sobre los conceptos de velocidad y rapidez presentados en diversos libros de texto de física y artículos relacionados con los conceptos en cuestión, encontrándose deficiencias en el contenido formativo asociado con dichos conceptos. Se propone el abordaje del contenido formativo relacionado con los conceptos mencionados desde el punto de vista de la formación de conceptos científicos en Física, lo cual consideramos, le permitirá al aprendiz de física y áreas afines, por un lado, familiarizarse con aspectos básicos en la formación de conceptos científicos, y por el otro, profundizar en los aspectos cinemáticos del movimiento.

Descriptores: Mecánica clásica; cinemática; velocidad y rapidez.

The concepts velocity and speed in diverse physics text books and articles related with the concepts mentioned are revised. Lacks in the formative content associated with the above mentioned concepts are found. One proposes the boarding of the formative content related to the concepts mentioned from the point of view of the formation of scientific concepts in physics, which we consider, will allow the Physics apprentice and related areas, on the one hand, to familiarize with basic aspects in the formation of scientific concepts, and for other one, to penetrate into the cinematic aspects of the motion.

Keywords: Classical mechanics; kinematics; velocity and speed.

PACS: 45.20.D-; 01.55.+b; 01.40.Fk

1. Introducción

El concepto de velocidad es discutido en todos los textos de física general y mecánica, particularmente en el tópico de cinemática. No obstante, el establecimiento del concepto de velocidad, así como sus distintos tipos (velocidad instantánea, media y promedio), no son adecuadamente considerados en algunos textos escolares [1–6]. Éstos no hacen una distinción clara entre velocidad media y promedio, usando dichas denominaciones en forma vaga y en algunos casos como sinónimos, cuando no lo son. La mayoría de los textos consultados, así como algunos artículos revisados [7, 8], presentan la velocidad instantánea como el límite de la velocidad media. Pocas referencias [9] muestran que la velocidad media proviene del valor medio de la velocidad instantánea. Al realizar un análisis del contenido de los textos y artículos consultados, se observa que no muestran condiciones bajo las cuales los distintos tipos para la velocidad coinciden. Los recientes intentos [8] en aclarar los tipos en cuestión han sido infructuosos, ya que se escogen situaciones en las cuales se hacen indistinguibles los diferentes tipos de velocidades.

En el mismo orden de ideas, muchos de los textos y artículos mencionados anteriormente, no hacen una distinción clara entre rapidez instantánea, media y cantidades tales como la norma de las velocidades media y promedio, las cuales serán denominadas *rapidez de la velocidad media* y *rapidez promedio*, respectivamente. Tampoco establecen las significaciones de tales conceptos científicos, en el mejor de los casos muestran algunas definiciones operacionales. Mientras que, pocos autores [9], aclaran que la rapidez media se obtiene a partir del valor medio de la rapidez instantánea. En vista de tales deficiencias y a la dispersión del contenido formativo existente en la literatura, consideramos pertinente un nuevo ordenamiento del contenido formativo, tomando como referente a la teoría de formas conceptuales [10].

Los conceptos teóricos son constructos que sobrepasan la experiencia y, por lo tanto, hacen posible la explicación de la misma [11]. Un concepto es un grupo de conveniencias y ventajas en el que se aúna un cierto número de cosas, de tal manera que nos permiten referirnos a ellas como un todo [12]. Los conceptos de velocidad y rapidez permiten dar una caracterización adecuada a la palabra *movimiento*. Cuando se requiere una instrucción formal de estos conceptos científicos [10,13], se hace necesario introducir definiciones como recurso primigenio para el establecimiento de alguna regla que permita atribuir significados desde lo cualitativo, comparativo hasta lo cuantitativo. Además, las definiciones sirven para eliminar la ambigüedad y vaguedad de los definiens [14]. Para establecer el concepto de velocidad se necesitan ideas abstractas, mediante las cuales comprendamos las experiencias que emergen de la interacción con el entorno, y de conocimientos previos, lo cual denominaremos *unidad de conocimiento*.

En este trabajo se presentan las estipulaciones más adecuadas para construir los conceptos de velocidad y rapidez, así como sus tipologías. Se discuten las situaciones bajo las cuales estas tipologías coinciden. Para tal fin se propone que las definiciones empleadas en la enseñanza de conceptos científicos sean distinguidas entre nominales y operacionales; el primer tipo se encuentra relacionada con los conceptos cualitativos (clasificatorios) y comparativos (topológicos), a diferencia del segundo, que se asocia a conceptos cuantitativos (métricos), presentados por Stegmüller [10] y Mosterín [13]. Las definiciones nominales son de naturaleza lexicográfica y teórica [14]. Las definiciones operacionales se refieren al proceso específico mediante el cual se obtiene una medición. A su vez, cada proceso estipula una escala de medición [15], que de acuerdo con Mosterín [13], está asociado al conjunto de operaciones lógico-matemáticas necesarias para el establecimiento de un concepto métrico. El conjunto de todas las escalas de medición establecen al concepto científico. En este trabajo también se muestran dos formulaciones que permiten pasar del sistema nominal (definiciones nominales de las unidades de conocimiento) al establecimiento de reglas que permiten la medición del concepto de velocidad (definiciones operacionales de las escalas de medición), que a nuestro juicio, hemos denominado *formulación diferencial* o de *diferencia* y *formulación integral*. Presentando además la equivalencia entre ambas formulaciones. La formulación diferencial e integral se reducen a operaciones inversas, reconociendo dos tipos de problemas que pueden surgir en cinemática; éstos consisten en la medición del concepto de velocidad empleando, en primer lugar, el cálculo diferencial y, en segundo lugar, el cálculo integral. Así, en la formulación diferencial se describe el movimiento de una partícula a partir del cambio de posición [5], en contraste con la segunda formulación, que alude al aspecto dinámico del movimiento vía el concepto de aceleración.

Este artículo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la Sec. 2 se presenta el concepto de velocidad y su operacionalización, esta última permite introducir dos formulaciones equivalentes para las escalas de medición asociadas al concepto de velocidad, donde se muestra que el conjunto de las escalas resulta ser una tipología más que una clasificación. En la Sec. 3 se muestra el concepto de rapidez y su tipología, mostrando las condiciones para las cuales los distintos tipos coinciden.

2. El concepto de velocidad y su tipología en las formulaciones diferencial e integral

El concepto científico denominado *velocidad* ha sido introducido para dar una caracterización adecuada a la palabra movimiento, que a través de él se logra metrizar las características esenciales del movimiento, en otras palabras, permite medir cómo se mueve una partícula y hacia donde lo hace, además de establecer cuan rápido o lento puede ser un movimiento en relación a otro; atribuyéndole a la palabra movimiento significados que van desde lo cualitativo, comparativo y cuantitativo. La velocidad es un concepto derivado del desplazamiento y cambio del tiempo. Galileo consideró la velocidad como una cantidad que se puede comparar, medir y ser expresada por números [16], además de ser representada mediante un segmento, o bien puede ser concebida como una razón de cambio del espacio con el tiempo. En tal sentido, mostramos en la Tabla I, dos unidades de conocimiento equivalentes para el concepto de velocidad.

TABLA I. Sistema nominal para el establecimiento de las unidades de conocimiento asociadas al concepto de velocidad.

Concepto	Unidad de Conocimiento
Velocidad	1.- Establece la comparación entre el desplazamiento seguido por una partícula con el intervalo de tiempo empleado para dicho desplazamiento. 2.- También puede verse como la razón de cambio de los diferentes lugares que ocupa una partícula durante su recorrido hacia un lugar.

TABLA II. Formulación diferencial o de diferencia para el establecimiento de una escala de medición asociada al concepto de velocidad.

Tipos de velocidades	Definición operacional
Velocidad media	Resulta del cociente entre el desplazamiento seguido por una partícula y el tiempo transcurrido durante el intervalo temporal $I=(t_1,t_2)$ que se emplea para realizar dicho desplazamiento, $$\langle\vec{v}(t)\rangle_I=\frac{\Delta\vec{r}_I}{\Delta t}\,. \qquad (1)$$
Velocidad instantánea	Resulta de comparar el desplazamiento seguido por una partícula con la duración del intervalo de tiempo $I{=}(t,t{+}\Delta t)$ empleado para realizar dicho desplazamiento a medida que Δt tienda a cero. En otras palabras, es la tasa de cambio infinitesimal de la posición respecto al tiempo, $$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\,. \qquad (2)$$
Velocidad promedio	Resulta de la media aritmética entre la velocidad inicial y la velocidad en un instante de tiempo dado, $$\vec{v}_{\text{prom}}(t)=\frac{\vec{v}_0+\vec{v}(t)}{2}\,. \qquad (3)$$

Con la finalidad de metrizar el concepto de velocidad para su posterior medición, es necesario hacer una precisión en cuanto a la palabra “*comparación*” o la frase “*razón de cambio*” en términos de alguna operación matemática que permita cuantificar cada unidad de conocimiento mostrada en la Tabla I. El establecimiento de estas operaciones se conoce con el nombre de *escala de medición* [13]. En primer lugar, cuando se establece una *comparación* se hace referencia al cociente entre dos magnitudes de la misma naturaleza, pero también puede plantearse como el cociente entre dos patrones de medidas. Si los patrones son medidos a partir del cambio o diferencia de dos magnitudes de la misma naturaleza, por ejemplo el cambio de posición o el cambio del tiempo, entonces el cociente entre estos patrones recibe el nombre de *razón* o *tasa de cambio*. Debido a que los cambios pueden ser finitos o infinitesimales, o bien porque la tasa de cambio de los diferentes lugares puede ser finita $(\Delta\vec{r}/\Delta t)$ o infinitesimal $[(d/dt)\vec{r}]$, existen dos tipos de velocidades que denominaremos *velocidad media* y *velocidad instantánea*. Estas velocidades miden aspectos distintos del movimiento de una partícula. No obstante, la velocidad media no toma en cuenta los detalles de la trayectoria, en contraste con la velocidad instantánea. En tal sentido, la escala de medición que se estipula para la velocidad media necesita del conocimiento de la posición para dos momentos distintos; en cambio para el establecimiento de la escala de medición asociada a la velocidad instantánea se requiere de la posición en función del tiempo. Así, la definición operacional mostrada en la Tabla II corresponde a una escala de medición asociada a los conceptos de velocidad media, instantánea y promedio. Esta escala de medición recibe el nombre de *formulación diferencial* o de *diferencia*.

Estrictamente hablando el símbolo

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t),$$

no debe entenderse como un cociente entre el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ y el intervalo de tiempo dt; por el contrario debe entenderse como el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero. En otras palabras, este símbolo representa la derivada de la posición respecto al tiempo o la tasa infinitesimal de cambio de la posición respecto al tiempo, y debe ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) \quad \text{en lugar de} \quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

para enfatizar que no es un cociente. De hecho las cantidades llamadas diferenciales, tales como el desplazamiento infinitesimal $(d\vec{r})$ o el intervalo de tiempo infinitesimal (dt) no pueden ser vistas, en primer lugar, como entidades separadas y en segundo lugar, como cantidades arbitrariamente pequeñas [17], tal como fueron concebidas por [4] Leibnitz y Newton. Del artículo de Martínez *et al.* [17], se desprende que, Cauchy consideró que la velocidad media es una cantidad distinta de la velocidad instantánea; la cual no puede ser identificada, como un cociente incremental. Matemáticamente hablando, el límite de una sucesión no tiene por qué pertenecer a dicha sucesión [18]. Por ejemplo, consideremos una partícula que describe un movimiento armónico simple cuyo vector posición es $\vec{r}(t) = A\cos(\omega t)\hat{\imath}$, la velocidad media en el intervalo de tiempo $I = (t, t+\Delta t)$ es

$$\langle\vec{v}(t)\rangle_I = \vec{v}(t)\left[\frac{\mathrm{sen}(\omega\Delta t)}{\omega\Delta t}\right] - \omega\vec{r}(t)\left[\frac{1-\cos(\omega\Delta t)}{\omega\Delta t}\right]. \qquad (4)$$

Observando claramente que la velocidad media no coincide con la velocidad instantánea, por más pequeño que sea Δt. Adicionalmente, Δt no puede anularse, ya que los términos dentro de cada corchete no admiten dicho valor. Sin embargo, es claro que el límite cuando Δt tiende a cero converge a la velocidad instantánea. Este hecho ocurre para todos los movimientos con aceleración.

La formulación en diferencia o diferencial para la velocidad, mostrada en la Tabla II, es la más apropiada cuando se conoce la posición de la partícula como función del tiempo. La formulación en cuestión exhibe un anidamiento jerárquico: Para determinar la velocidad promedio se hace indispensable conocer la velocidad instantánea y para determinar ésta última es necesario tener la velocidad media en cualquier intervalo de tiempo. En la Tabla III se muestran las definiciones operacionales que corresponden a otra escala de medición para los conceptos de velocidad instantánea, media y promedio. Esta escala de medición alude al aspecto dinámico del movimiento vía el concepto de aceleración instantánea. En dicho caso, el anidamiento jerárquico es otro, se requiere la velocidad instantánea, y con ésta se construye la velocidad media y promedio. Dicha escala de medición recibe el nombre de *formulación integral*.

El carácter vectorial que posee la velocidad instantánea permite determinar en cada momento *hacia donde se mueve* la partícula, además con dicha cantidad vectorial se logra determinar la trayectoria seguida por ésta y la forma de la trayectoria correspondiente responde cuantitativamente a la pregunta *¿cómo se mueve la partícula*? Así, un movimiento con velocidad instantánea constante describirá una trayectoria rectilínea, siendo ésta la que seguiría una partícula libre en cualquier marco de referencia inercial. Por el contrario,

TABLA III. Formulación integral para el establecimiento de una escala de medición asociada al concepto de velocidad.

Tipos de velocidades	**Definición operacional**
Velocidad instantánea	Se obtiene al integrar la aceleración $\vec{a}(t)$ adquirida por una partícula en los primeros t segundos, más la velocidad que posee ésta inicialmente, $$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')dt'. \qquad (5)$$
Velocidad media	Se obtiene al tomar el valor medio de la velocidad instantánea durante el intervalo de tiempo I, cuya duración es $\Delta t = t_2 - t_1$, $$\langle\vec{v}(t)\rangle_I = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt. \qquad (6)$$
Velocidad promedio	Se obtiene de la suma entre la velocidad inicial de la partícula y un medio de la integración sobre la aceleración $\vec{a}(t)$ que adquiere dicha partícula durante los primeros t segundos, $$\vec{v}_{\mathrm{prom}}(t) = \vec{v}_0 + \tfrac{1}{2}\int_0^t \vec{a}(t')dt'. \qquad (7)$$

cuando la velocidad instantánea varía en el tiempo, la trayectoria descrita por dicha partícula corresponde a una curva en general, encontrándose la partícula sujeta a interacción. Sin embargo, el concepto de velocidad media no arroja tanta información como la instantánea, ya que los detalles de esta última desaparecen al promediar [Ec.(6)]; de hecho sólo toma en cuenta la información inicial y final tal como se indica en la relación (1). Por ejemplo, una partícula puede moverse de un punto A hasta B por una trayectoria curvilínea o una recta, en consecuencia estos movimientos no se realizan, en general, en el mismo intervalo de tiempo. No obstante, si la partícula se moviera a lo largo de una línea recta con una velocidad instantánea constante, cuyo valor coincide con la velocidad media calculada para el movimiento curvilíneo, entonces el tiempo que le tomase a la partícula en ir de A hasta B en línea recta sería el mismo si lo hiciera por la trayectoria curva. En particular, si consideramos el lanzamiento horizontal de una partícula con velocidad $\vec{v}(0) = v_0\widehat{\imath}$ en presencia del campo gravitacional $\vec{g} = -g\widehat{\jmath}$, desde la cúspide de un plano inclinado con ángulo θ y altura h, medida desde la horizontal, tal como se indica en la Fig. 1, se tiene que el alcance (d), el tiempo de vuelo (t_v) y la velocidad media durante el tiempo de vuelo son

$$d = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta}{g\cos^2\theta}\,, \tag{8a}$$

$$t_v = \frac{2v_0\tan\theta}{g}\,, \tag{8b}$$

$$\langle \vec{v}(t)\rangle_{t_v} = v_0\left(\widehat{\imath} - \tan\theta\widehat{\jmath}\right)\,. \tag{8c}$$

Si la partícula se moviera en línea recta sobre el plano inclinado en el lugar de seguir la trayectoria parabólica, con velocidad constante cuyo valor coincide con el de la velocidad media (8c), entonces el tiempo empleado por dicha partícula al recorrer el alcance d viene dado a partir del cociente entre la distancia recorrida y la norma de la velocidad en el lapso $[0, t_v]$,

$$\frac{d}{|\langle \vec{v}(t)\rangle_{t_v}|} = \frac{2v_0\tan\theta}{g} \equiv t_v. \tag{9}$$

Coincidiendo éste con el tiempo que le toma a la partícula en ir de A hasta B a través del lanzamiento horizontal, tal como se indica en la Fig. 1.

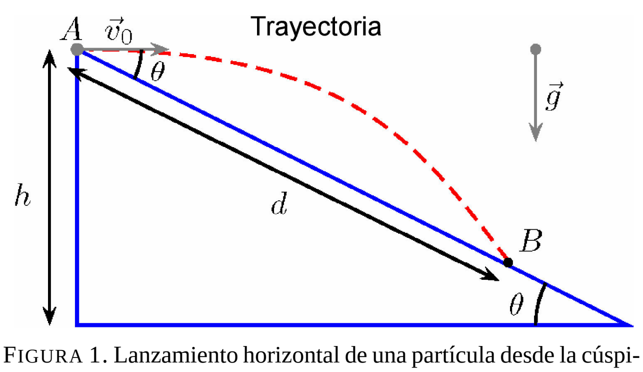

FIGURA 1. Lanzamiento horizontal de una partícula desde la cúspide de un plano inclinado.

En la literatura [2, 3, 6] la *velocidad promedio* suele ser confundida con la velocidad media, y no se profundiza en su significado. La escala de medición asociada al concepto de velocidad promedio comúnmente se define operacionalmente a partir de la media aritmética de la velocidad inicial y la obtenida en un instante de tiempo dado, tal como es reflejado en la Tabla II. En la Tabla III, se exhibe otra escala de medición para el concepto de velocidad promedio que no ha sido difundida en los textos escolares. En general, la velocidad promedio (3) corresponde a una tasa de cambio temporal infinitesimal de la posición promedio entre la trayectoria seguida por una partícula libre y la seguida por una partícula con interacción. Por tal razón es considerada como una velocidad, pero ésta no puede ser atribuida a la partícula en estudio, en contraste con las velocidades instantánea y media que son conceptos que se les asigna a una partícula en movimiento. Para clarificar este hecho, consideremos la trayectoria seguida por dos partículas, una de ellas está libre y la otra está sujeta a interacción, de forma que la partícula libre describirá una trayectoria rectilínea, en contraste con aquella sujeta a interacción. Los respectivos vectores de posición son

$$\vec{r}_{\text{libre}}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t\,, \tag{10a}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t')\,dt'\,, \tag{10b}$$

donde $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$ corresponden a la posición y velocidad inicial de ambas partículas. Así, la trayectoria promedio entre la seguida por la partícula libre y aquella sujeta a interacción viene dada por

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\text{prom}}(t) &= \frac{\vec{r}_{\text{libre}}(t) + \vec{r}(t)}{2}\,,\\ &= \vec{r}_0 + \frac{\vec{v}_0 t}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t \vec{v}(t')\,dt'\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Al derivar respecto al tiempo y teniendo en cuenta que la velocidad inicial es $\vec{v}_0$, resulta que

$$\vec{v}_{\text{prom}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_{\text{prom}}(t) = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2}\,, \tag{12}$$

coincidiendo con (3). Resulta claro que esta velocidad no puede ser atribuida a la partícula en movimiento, tal como ocurre con las velocidades media e instantánea; por el contrario puede ser interpretada como la velocidad de una "partícula virtual" cuyo movimiento corresponde al promedio del movimiento seguido por una partícula libre y otra que se mueve sujeta a interacción, bajo las mismas condiciones iniciales. La velocidad promedio también puede ser concebida como la velocidad del centro de masa para el sistema formado por dos partículas de igual masa, donde una de ella se mueve libremente y la otra se encuentra sujeta a interacción, siempre que el movimiento de ambas inicie con las mismas condiciones iniciales.

Las expresiones matemáticas mostradas en las Tablas II y III son equivalentes, debido a que generan el mismo concepto métrico de velocidad; es decir, cada escala de medición debe arrojar la misma cantidad vectorial. Para probar que la medición de la velocidad instantánea (5) coincide con la medición hecha en la formulación diferencial (2), bastaría sustituir $\vec{a}(t)$ como la segunda derivada de la posición respecto al tiempo en (5), obteniéndose

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \int_0^t \frac{d^2}{dt'^2}\vec{r}(t')\,dt' \\ &= \vec{v}_0 + \frac{d}{dt}\vec{r}(t) - \frac{d}{dt}\vec{r}(t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\vec{r}(t)\,,\end{aligned} \tag{13}$$

donde se ha hecho la identificación

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\,|_{t=0} = \vec{v}_0.$$

De igual forma, la definición operacional para la escala de medición asociada al concepto de velocidad media (6) es equivalente a (1), lo cual se evidencia al sustituir (13) en (6) para llegar a (1),

$$\begin{aligned}\langle\vec{v}(t)\rangle_I &= \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\vec{r}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Delta t}\big[\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)\big] = \frac{\Delta\vec{r}_I}{\Delta t}\,,\end{aligned} \tag{14}$$

donde se ha reemplazado la diferencia de posiciones por el desplazamiento; es decir $\Delta\vec{r}_I = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$. Finalmente, para mostrar la equivalencia entre la escala de medición asociada al concepto de velocidad promedio presentada en la Tabla III con la mostrada en la Tabla II, basta sustituir la aceleración $\vec{a}(t)$ como la segunda derivada de la posición respecto al tiempo en (7), obteniéndose

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{prom}}(t) &= \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2}{dt'^2}\vec{r}(t')\,dt' \\ &= \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{r}(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2},\end{aligned} \tag{15}$$

donde se ha reemplazado

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\,|_{t=0} \quad \text{por} \quad \vec{v}_0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \quad \text{por} \quad \vec{v}(t)$$

en virtud de (13). Quedando así demostrada la equivalencia entre ambas formulaciones.

Según Mosterin [13], un concepto científico es considerado como clasificatorio cuando se pueden establecer conjuntos llamados clasificaciones. Las clasificaciones conforman una partición del conjunto asociado con el concepto clasificatorio. Los tipos [22] asociados con el concepto velocidad (velocidad instantánea, media y promedio) no son clasificaciones de dicho concepto, ya que éstos no tienen porque ser clases de equivalencia del conjunto asociado al concepto en cuestión. En otras palabras, en un movimiento dado, los tipos antes mencionados pueden coincidir. En lugar de intentar clasificar el concepto de velocidad, se puede clasificar el movimiento usando el concepto de velocidad [21].

Para justificar el hecho de que la velocidades instantánea, media y promedio son tipos, basta observar, en primer lugar, que para un movimiento sin aceleración (*movimientos rectilíneos uniformes*) la velocidad instantánea coincide con la velocidad media. En efecto, usando la formulación diferencial se tiene que,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \implies \begin{cases}\vec{v}(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{v}_0\,, \\ \langle\vec{v}(t)\rangle_I = \dfrac{\Delta\vec{r}_I}{\Delta t} = \vec{v}_0\,,\end{cases} \tag{16}$$

observándose que $\vec{v}(t) = \langle\vec{v}(t)\rangle_I$ en cualquier intervalo de tiempo I. En este sentido, ambos conceptos coinciden y no es posible distinguirlos. Bajo la formulación integral, se puede observar más fácilmente que la velocidad media coincide con la instantánea cuando el movimiento se realiza a velocidad constante, ya que en dicho caso se puede extraer del integrando a $\vec{v}(t)$. En efecto, si $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$ entonces (6) toma la siguiente forma,

$$\langle\vec{v}(t)\rangle_I = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}_0 dt = \vec{v}_0 \;\therefore\; \langle\vec{v}(t)\rangle_I = \vec{v}(t)\,. \tag{17}$$

para cualquier intervalo de tiempo $I = (t_1, t_2)$. En segundo lugar, las definiciones operacionales para las escalas de medición asociadas al concepto de velocidad promedio presentadas en las Tablas II y III colapsan con las escalas asociadas al concepto de velocidad media, de las referidas tablas, en la medida en que el movimiento se realice con aceleración constante. Lo cual se evidencia al calcular el valor medio de la velocidad instantánea desde el inicio hasta un instante de tiempo t,

$$\begin{aligned}\langle\vec{v}(t)\rangle_t &= \frac{1}{t}\int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t')dt' \\ &= \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2} = \vec{v}_{\text{prom}}(t)\,,\end{aligned} \tag{18}$$

donde se ha eliminado, después de integrar, el producto $\vec{a}t$ mediante la expresión $\vec{a}t = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$. El resultado (3) también puede obtenerse en la formulación diferencial o de diferencia, ya que para un movimiento con aceleración constante se tiene que su posición en función del tiempo es

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,, \tag{19}$$

donde la velocidad media para los primeros t segundos del movimiento y la velocidad promedio en t segundos, coinciden, ya que

$$\begin{cases} \langle \vec{v}(t)\rangle_t = \dfrac{\Delta \vec{r}_t}{t} = \vec{v}_0 + \dfrac{\vec{a}t}{2}\,, \\ \vec{v}_{\text{prom}}(t) = \dfrac{\vec{v}_0 + \frac{d}{dt}\vec{r}(t)}{2} = \vec{v}_0 + \dfrac{\vec{a}t}{2}\,. \end{cases} \tag{20}$$

A partir del trabajo de Mallinckrodt [19] se puede extraer que, la importancia del estudio de la velocidad promedio radica en el hecho de que la posición de una partícula con aceleración constante (19) puede ser escrita como en el caso de un movimiento uniforme con una velocidad igual a la velocidad promedio, de forma que al sustituir (20) en (19) resulta la ecuación cinemática para la posición de una partícula en función del tiempo cuando la velocidad es constante,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_{\text{prom}}(t)t \quad \text{ó} \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \langle \vec{v}(t)\rangle_t t\,. \tag{21}$$

3. El concepto de rapidez y su tipología

La forma en que se mueve una partícula es muy diversa, pero en todas sus formas de movimiento ésta debe recorrer un cierto espacio en un cierto intervalo de tiempo. Sin duda, cada forma de movimiento selecciona a su vez, algún tipo de desplazamiento, permitiendo caracterizar al movimiento mediante la velocidad instantánea o media; las cuales tienen toda la información referente al movimiento de la partícula. La velocidad es un concepto cuantitativo al cual se le asigna una magnitud vectorial y su norma puede ser usada como criterio para comparar movimientos, ya que ésta cantidad establece el cociente entre una longitud con el intervalo de tiempo empleado en el movimiento, atribuyéndole un significado directo al concepto de *rapidez*. En la Tabla IV, se estipula la unidad de conocimiento referente al concepto de rapidez.

A nivel nominal existe una clara diferencia entre velocidad y rapidez; en el primer caso se comparan desplazamientos con intervalos de tiempo o en su defecto, tasas de cambio de los lugares recorridos en el tiempo, en el segundo caso, se comparan simplemente los espacios recorridos en determinados intervalos de tiempos. Al igual que la velocidad, el concepto de rapidez es ambiguo y vago, esto se debe a que la palabra "*espacio*" presenta varios significados. En la Ref. 20 se muestran tres estipulaciones factibles distintas para la construcción del concepto de rapidez, basadas en la forma en cómo se miden el espacio y el tiempo empleados por una partícula durante su movimiento. Volviendo al caso que nos ocupa, entenderemos como espacio a la *distancia* o la *longitud*; sin embargo habrá que precisar cuál distancia o longitud debe ser considerada para cuantificar el concepto de rapidez. En tal sentido, la escala de medición que puede ser empleada para cuantificar al concepto de rapidez queda establecida mediante la norma del vector velocidad, desde luego que la norma de cada tipo de velocidad no arroja, en general, el mismo valor numérico, haciéndose necesario una distinción entre cada tipo de rapidez, que a su vez selecciona un tipo de distancia o longitud recorrida, tal como se muestra en la Tabla V.

Las definiciones operacionales mostradas en la Tabla V son independientes de la formulación diferencial o integral asociadas a los tipos de velocidades que se emplee. El concepto de rapidez permite establecer cuánto mayor o menor puede ser un movimiento. Así, cuando la norma del vector velocidad instantánea para un movimiento es mayor (menor) que la de otro en un instante de tiempo dado, bien sea porque el cociente es mayor (menor) que la unidad, se dice que el primero presenta mayor (menor) movimiento que el segundo, empleándose la frase ≪*un movimiento es más* (*menos*) *rápido en relación al otro en cada momento*≫. También es posible establecer en cuáles momentos del movimiento de una partícula se mueve rápidamente o lentamente; esto se logra comparando la rapidez instantánea en dos instante de tiempo distintos. En relación al concepto de rapidez instantánea, cabe destacar que el desplazamiento infinitesimal no debe ser

TABLA IV. Sistema nominal para el establecimiento de la unida de conocimiento asociada al concepto de rapidez.

Concepto	**Unidad de Conocimiento**
Rapidez	Establece la comparación entre los espacios seguidos por una partícula con el intervalo de tiempo empleado para recorrer dichos espacios.

TABLA V. Definición operacional para las escalas de medición asociadas al concepto de rapidez.

Tipos de rapidez	**Definición operacional**
Rapidez instantánea	Compara la longitud del desplazamiento infinitesimal con el intervalo de tiempo empleado en recorrer dicho desplazamiento, determinándose mediante la norma de la velocidad instantánea, $$\lvert\vec{v}(t)\rvert = \sqrt{\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)}\,. \tag{22}$$
Rapidez media	Compara la distancia total recorrida con el tiempo total empleado en recorrer dicha distancia, determinándose mediante el valor medio de la rapidez instantánea en un intervalo de tiempo $I = (t_1, t_2)$, $$\langle\lvert\vec{v}(t)\rvert\rangle_I = \frac{d_I}{\Delta t}\,. \tag{23}$$
Rapidez de la velocidad media	Compara la longitud del desplazamiento finito con el intervalo de tiempo empleado en recorrer dicha distancia, determinándose mediante la norma de la velocidad media, $$\lvert\langle\vec{v}(t)\rangle_I\rvert = \sqrt{\langle\vec{v}(t)\rangle_I\cdot\langle\vec{v}(t)\rangle_I}\,. \tag{24}$$

considerado como una cantidad arbitrariamente pequeña como hemos mencionado, por el contrario, basándonos en la definición dada por Frechet (citado por Martinez *et al.* [17]), en la cual el desplazamiento infinitesimal es la única aproximación lineal del incremento cuya pendiente coincide con la velocidad, tenemos que

$$d\vec{r} \stackrel{def}{=} \vec{v}(t)dt = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)\,dt\,, \qquad (25)$$

cuya norma la entenderemos como la longitud de un desplazamiento infinetisimal; es decir,

$$|d\vec{r}| \stackrel{def}{=} |\vec{v}(t)|dt = \left|\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right| dt\,. \qquad (26)$$

La rapidez media establece cuán veloz puede ser una partícula para ir de un punto del espacio a otro a lo largo de su trayectoria. En tal sentido, dicha cantidad debe comparar la distancia recorrida con el tiempo total empleado en recorrer dicha distancia. El valor numérico de la rapidez media se obtiene al tomar el valor medio de la rapidez instantánea a lo largo de la curva seguida por la partícula,

$$\langle|\vec{v}(t)|\rangle_I = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|dt = \frac{d_I}{\Delta t}\,, \qquad (27)$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$, y se ha sustituido la integral de la rapidez por la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo $I = (t_1, t_2)$; es decir,

$$d_I = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|dt.$$

Por el contrario, la rapidez de la velocidad media, $|\langle\vec{v}(t)\rangle_I|$, nos da una medida de cuán veloz resulta el movimiento de una partícula para ir de un punto del espacio a otro, a lo largo de una recta, con una rapidez constante igual a la rapidez media del movimiento curvilíneo, durante el mismo tiempo que se emplearía en recorrer dicho movimiento curvilíneo.

Resulta claro que la definiciones presentadas en la Tabla V conforman una tipología para el concepto de rapidez más que una clasificación, debido a que éstas colapsan cuando el movimiento se realiza con aceleración nula; es decir, para un movimiento rectilíneo y uniforme. En primer lugar, se observa que para este tipo de movimientos la velocidad instantánea es igual a la velocidad media y en consecuencia sus normas coinciden. Verificándose en esta circunstancia que

$$|\vec{v}(t)| = \langle|\vec{v}(t)|\rangle_I = \frac{d_I}{\Delta t}\,, \qquad (28)$$

para cualquier intervalo de tiempo I. En segundo lugar, la trayectoria descrita por la partícula es rectilínea, por ello la distancia recorrida sobre la referida trayectoria presenta el mismo valor numérico que la norma del vector desplazamiento; es decir, $d_I = |\Delta\vec{r}_I|$. Luego,

$$\langle|\vec{v}(t)|\rangle_I = |\langle\vec{v}(t)\rangle_I|\ . \qquad (29)$$

En virtud de (28) y (29), todos los tipos mostrados en la Tabla V colapsan para el caso en que el movimiento sea rectilíneo y uniforme. La coincidencia mostrada en (28) no sólo ocurre para movimientos rectilíneos. La expresión (22) coincide con (23) cuando la rapidez es constante, pero no necesariamente iguales a (24); situación que se evidencia en un movimiento circular uniforme, donde para un periodo T del movimiento, se tiene que

$$|\vec{v}(t)| = \langle|\vec{v}(t)|\rangle_T = \frac{2\pi R}{T} \neq |\langle\vec{v}(t)\rangle_T| = 0\ \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}\,, \qquad (30)$$

donde $2\pi R$ es el perímetro de la circunferencia de radio R, que corresponde a la distancia recorrida por la partícula en su trayectoria circular; observándose así, de (30), que $\langle|\vec{v}(T)|\rangle \neq |\langle\vec{v}(T)\rangle|$, contrario a (29). También puede ocurrir que (23) coincida con (24) pero no con (22), en contraste con (28). Esta situación ocurre cuando la norma del vector desplazamiento coincide con la distancia recorrida; tal situación ocurre cuando el movimiento es rectilíneo no uniforme [23] y además, la partícula no se regrese en aquellos intervalos de tiempos que se empleen para determinar los valores medios. De lo contrario, ocurriría que la distancia recorrida d_I por la partícula en el intervalo de tiempo I es superior al desplazamiento empleado en recorrer dicha distancia; es decir, $d_I > |\Delta\vec{r}_I|$. Por ejemplo, en la Fig. 2 se muestra la trayectoria seguida por una partícula a lo largo de una línea recta en el intervalo de tiempo $I = (t_1, t_3)$; observándose que la longitud del desplazamiento coincide con la distancia recorrida por la partícula en los intervalos de tiempo $I_1 = (t_1, t_2)$ e $I_2 = (t_2, t_3)$, es decir $d_{I_k} = |\Delta\vec{r}_{I_k}|$ con $k = 1, 2$. En cambio, para el intervalo de tiempo I se cumple que $d_I > |\Delta\vec{r}_I|$.

La escala de medición asociada al concepto de *rapidez promedio* se construye a partir de la norma de los vectores presentados en (3) y (7). Esta rapidez no puede emplearse como otra tipología para el concepto de rapidez que se muestra en la Tabla IV, hecho motivado a que tal concepción no se corresponde a una comparación entre la longitud del desplazamiento o la distancia recorrida por una partícula. En todo caso, se ajusta perfectamente a la rapidez del movimiento descrito por la partícula virtual, empleada para describir la trayectoria promedio entre la partícula material sujeta a una interacción y otra que se encuentra libre, bajo las mismas condiciones iniciales. Cuando un movimiento es realizado con aceleración o velocidad constante, la escala asociada a la rapidez promedio coincide con la escala asociada a la ra-

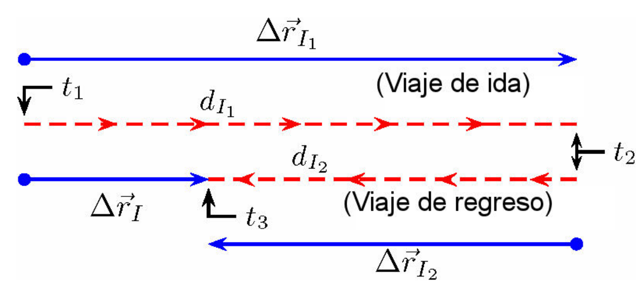

FIGURA 2. Trayectoria rectilínea seguida por una partícula.

pidez para la velocidad media presentada en (24); en dicho caso, se emplea a la rapidez promedio como otra tipología para el concepto de rapidez.

4. Discusión

En la formulación diferencial o de diferencia se presenta la velocidad instantánea (2) como el límite de la velocidad media (1), en contraste con la formulación integral, en la cual la velocidad media (6) se obtiene a partir del valor medio de la velocidad instantánea (5). Ambas formulaciones deben presentarse por separado, ya que al usar (2) y (6) simultáneamente las definiciones se hacen tautológicas [14]. Sin embargo, ambas formulaciones se complementan. Es habitual presentar la cinemática introduciendo las variables posición, velocidad y aceleración (en este orden); por lo que debe presentarse en primer lugar la formulación de la Tabla II y luego la formulación de la Tabla III. Sin embargo, bajo este enfoque es posible presentar dicho tópico introduciendo las variables cinemáticas en orden inverso (aceleración, velocidad, posición), en este caso se muestra en primer lugar la formulación integral en lugar de la diferencial.

En Física, cuando se habla del valor medio de una magnitud $f(t)$, que puede ser escalar, vectorial o tensorial y que toma valores en el parámetro tiempo, se ha de entender

$$\langle f(t)\rangle_I = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \quad \text{con } I = (t_1, t_2)\,. \tag{31}$$

Cuando la magnitud $f(t)$ es una rata de cambio de otra magnitud $g(t)$, es decir

$$f(t) = \frac{d}{dt}g(t),$$

entonces su valor medio coincide con tasa de cambio finito de la magnitud $g(t)$ respecto al tiempo; es decir,

$$\langle f(t)\rangle_I = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{32}$$

Además, si la magnitud $f(t)$ es constante, su valor medio coincide con su valor instantáneo; es decir, $\langle f(t)\rangle = f(t)$, para $f(t)$ constante. Aplicando esto último a la velocidad, tenemos que la velocidad media e instantánea coinciden cuando el movimiento es rectilíneo y uniforme ($\vec{a}(t) = \vec{0}\,\mathsf{m/s^2}$). La rapidez media coincide con la rapidez instantánea cuando el movimiento es uniforme; es decir, cuando la rapidez instantánea permanece constante. En el mismo orden de ideas, hemos mostrado que existe una clara distinción entre rapidez media y rapidez para la velocidad media, las cuales no son diferenciadas (y la rapidez de la velocidad media raramente considerada) en los libros de textos de física. Ambas rapideces coinciden sólo cuando el movimiento es rectilíneo y la partícula no cambia el sentido del movimiento durante el intervalo de tiempo empleado en realizar las medidas de los valores medios.

5. Conclusión

Los conceptos científicos en Física no pueden ser definidos o estipulados, por consiguiente la velocidad y la rapidez no pueden definirse; error en que incurren con mucha frecuencia los textos escolares. Por el contrario, lo realmente admisible es definir las escalas de medición asociadas a cada concepto, y las estipulaciones de estas escalas son posibles dentro del tópico de la metrización, enmarcado en la teoría de las formas conceptuales o estructura de formación de conceptos. Otro aspecto realmente novedoso del trabajo es presentar el surgimiento de una nueva forma conceptual llamada *conceptos tipográficos*, que aun cuando toma elementos de las formas conceptuales cualitativas, comparativa y cuantitativas se distingue de estas formas en cuanto a la existencia de condiciones o situaciones límites que permiten la coincidencia de los distintos tipos que conforman la forma conceptual tipográfica. En otras palabras, las escalas de medición asociadas a cada tipo arrojan la misma magnitud aun cuando sus significaciones sean distintas. Quedando clarificado que los conceptos de velocidad instantánea, media, promedio y los conceptos de rapidez instantánea, media, promedio y la rapidez para la velocidad media son tipos de los conceptos de velocidad y rapidez. Todas estos tipos colapsan cuando el movimiento es rectilíneo y uniforme, también han sido probadas condiciones en la cuales algunas de estas tipologías coinciden y otras no.

Desde el punto de vista didáctico conviene enseñar tanto las definiciones nominales (en primer lugar) como las operacionales, con miras a la ampliación, modificación o sustitución del marco conceptual que poseen los aprendices. En consecuencia, esta metodología permitirá dar un paseo por las distintas formas conceptuales, además le dará recursos al aprendiz sobre el proceso de metrización y medición. Consideramos que es adecuado diseñar las clases de forma tal que se muestre más de una definición nominal y operacional, esto en aras de no estereotipar o fijar la atención únicamente en una unidad de conocimiento o en una sola escala de medición. El proceso de metrización de un concepto es complejo para los expertos y más aun para los aprendices, por ello consideramos que las evaluaciones de los conceptos deben están enfocados esencialmente en la medición más que en la metrización.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con apoyo del proyecto de investigación `08-011`, inscrito ante la Subdirección de Investigación y Postgrado del Instituto Pedagógico de Caracas de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Agradecemos al Prof. Ángel Delgado por sus observaciones y valiosas recomendaciones.

1. M. Alonso y E. Finn, *Física* (Fondo Educativo Interamericano, Caracas, 1976) Vol. 1.
2. R. Serway y J. Jewett, *Física para ciencias e ingeniería* (International Thomson, México, 2005) Vol. 1.
3. F. Bueche, *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería, Tomo 1* (McGraw Hill, México, 1991).
4. P. Hewitt, *Conceptos de Física*, Ed. 1ra (Limusa, México, 2005).
5. A.P. French, *Mecánica Newtoniana*, Ed. 1ra (Reverté, España, 1974).
6. D. Figueroa, *Física para ciencias e ingeniería: Cinemática*, Ed. 2da (Gráfica León, Caracas, 2000) Vol. 1.
7. L. Mark Rosenquist y C. Liliian McDeimott, *Am. J. Phys.* **55** (1987) 407.
8. J. Morales, *Ciencia Ahora* **24** (2009) 67.
9. I. V. Savéliev, *Curso de fisica general: Mecánica y Fisica Molecular, Tomo 1* (Mir, Moscú, 1984).
10. W. Stegmüller, *Teoría y Experiencias* (Ariel, Barcelona, 1979).
11. M. Bunge, *Foundations of physics. Springer Tracts in Natural Philosophy* (Springer Verlag, Berlin, 1967) Vol. 1.
12. E. De Bono, *Lógica fluída* (Ediciones Paidós Ibérica, Barcelona, 1996).
13. J. Mosterin, *Investigación y ciencia* **16** (1978) 82.
14. I. Copi y C. Cohen, *Introducción a la lógica*, Ed. 8va (Editorial LIMUSA, México, 2009).
15. Usamos los términos medición y escala de medición tal como se consideran en Ref. 13.
16. C. Azcarate G., *Historia de las Ciencia y Enseñanza* (1984) 203.
17. J. Martinez Torregrosa, R. López-Gay, A. Gras Martí y G. Torregrosa Girones, *Enseñanza de la Ciencias* **20** (2002) 271.
18. T. M. Apostol, *Análisis Matemático,* Ed. 2da. (Editorial REVERTE, España, 1982).
19. A. John Mallinckrodt, *Am. J. Phys.* **61** (1993) 668.
20. J. Lévy - Leblond, *Am. J. Phys.* **48** (1980) 345.
21. S. Díaz-Sólorzano y L. González-Díaz, *Clasificación del movimiento de una partícula en Física.* En preparación.
22. Un tipo $\mathcal{T}$ en un conjunto T es una relación en T, de lo cual se desprende que un tipo no es necesariamente una clase de equivalencia del conjunto T.
23. En un movimiento curvilíneo la distancia recorrida por una partícula no coincide con la norma del desplazamiento debido a que la longitud de arco entre dos puntos no es igual a la longitud de la cuerda sustentada por el arco.