

História Unisinos

E-ISSN: 2236-1782

efleck@unisinos.br

Universidade do Vale do Rio dos Sinos

Brasil

Schubring, Gert; Roque, Tatiana

O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada
como regra

História Unisinos, vol. 18, núm. 1, enero-abril, 2014, pp. 91-103

Universidade do Vale do Rio dos Sinos

São Leopoldo, Brasil

Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=579866788014>

- ▶ Como citar este artigo
- ▶ Número completo
- ▶ Mais artigos
- ▶ Home da revista no Redalyc

O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada como regra

The role of the ruler and the compass in Euclid's Elements:
A practice interpreted as a rule

Gert Schubring¹

gert.schubring@uni-bielefeld.de

Tatiana Roque²

tati@im.ufrj.br

Resumo: Neste texto, analisamos as fontes citadas na historiografia tradicional da matemática para afirmar que existiria uma restrição dos instrumentos de construção usados nos *Elementos* de Euclides, muitas vezes encarada como uma influência platônica. Nosso principal objetivo é investigar se a exclusividade do uso dos métodos de construção por retas e círculos nos *Elementos* era uma prática ou uma norma no contexto geométrico da época de Euclides. Tomamos como base o estudo de Arthur Donald Steele, publicado em 1936, mas mencionado raramente e de modo alusivo pelos historiadores. A tese principal, que desenvolvemos a partir desse e de outros trabalhos, é a de que as fontes não permitem afirmar que uma tal restrição fosse uma norma. O fato de que as construções nos *Elementos* de Euclides são feitas, na prática, somente com uso de régua e compasso não permite concluir que essa fosse uma regra, nem que se tratasse de um padrão da época. Mostraremos como uma versão equívocada foi produzida historicamente.

Palavras-chave: régua e compasso, geometria euclidiana, história da matemática grega.

Abstract: In this text we analyze the sources referred to in traditional historiography of mathematics in order to state that there existed a restriction regarding the instruments used in Euclid's *Elements*, often emphasized as due to an influence by Platonism. Our principal aim is to analyze whether the exclusivity in the use of ruler and compass as construction methods was a practice or prescribed as a norm in the geometric context of Euclid's epoch. We follow the study published by Arthur Donald Steele in 1936, scarcely cited by historians. Taking also other works as references, we propose the thesis that the sources do not suggest that such a restriction constituted a norm. The fact that constructions in Euclid's *Elements* are done, in practice, using only the ruler and the compass do not allow us to conclude that this was a rule, or a standard procedure in the time. We also explain how the cited version was historically produced.

Keywords: ruler and compass, Euclidean geometry, history of Greek mathematics.

¹ Universidade de Bielefeld, Alemanha. Professor visitante da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

² Professora do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Pesquisadora dos Archives Poincaré (Nancy-França).

Introdução

O objetivo inicial deste texto é discutir um artigo, publicado por Arthur Donald Steele em 1936, no qual o autor fornece argumentos fundamentais para se entender as razões da exclusividade do uso da régua e do compasso nos *Elementos* de Euclides. Apesar de transcorridos tantos anos e do artigo ter sido publicado na prestigiosa revista *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, seu conteúdo permanece desconhecido.

Em particular, este artigo permite desconstruir versões equivocadas sobre o papel e a motivação do uso da régua e do compasso nos *Elementos*, como a que afirma ser a restrição a tais métodos de construção uma prova da influência do pensamento platônico sobre Euclides. Mais recentemente, a tese geral de que Euclides teria sofrido uma influência platônica tem sido questionada também por outros autores, como Ian Mueller (1969, 1981). De modo ainda mais amplo, tornou-se consenso que não se pode afirmar como produto do cânone filosófico da época o método singular de exposição que distingue os *Elementos* (Knorr, 1986). Todavia, as razões para a exclusividade do uso da régua e do compasso continuam mal compreendidas, o que cerca o tema de afirmações imprecisas e superficiais.

O texto de Steele é mencionado raras vezes, como veremos adiante, mas ainda assim sem que a citação seja complementada por uma discussão dos argumentos apresentados pelo autor. A existência do texto é mencionada de modo alusivo, como uma prova de que é errôneo considerar a restrição à régua e ao compasso nos *Elementos* como uma norma, sendo ainda mais equivocado atribuí-la a uma influência platônica. Ainda assim, as justificativas de Steele não são expostas, o que causa a impressão de que a existência de seu artigo funciona, muitas vezes, como um argumento de autoridade, sem que o conteúdo seja de fato compreendido.

Resumindo, acreditamos que seja válido indagar por que a questão ainda é cercada de ambiguidades e imprecisões se o texto de Steele fornece argumentos bem fundamentados para eliminar qualquer motivação platônica para o uso da régua e do compasso nos *Elementos*. Não responderemos a essa pergunta. Nossa objetivo aqui, como já mencionado, é, em primeiro lugar, fornecer evidências para mostrar que o problema existe e, em segundo lugar, relacionar as conclusões de Steele com a análise mais ampla dos objetivos da geometria grega proposta por Wilbur Knorr (1986).

Começaremos por fornecer um panorama do modo como ainda se afirma a influência platônica em di-

ferentes textos sobre os *Elementos* de Euclides, visto como o ponto alto do esforço de organização da geometria grega elaborada antes do século III a.E.C.³ Celebra-se que os resultados obtidos pelos geômetras tenham sido expostos de um modo novo, o que traduziria a predominância de um pensamento axiomático e dedutivo. A transição para esse tipo de pensamento teria sua expressão máxima na sistematização operada nos *Elementos*, frequentemente associada à necessidade de fundar a geometria prática sobre bases mais sólidas. Mostraremos que uma explicação filosófica para essa transformação da geometria é atribuída à influência de Platão. Uma vez que a matemática abstrata e universal era valorizada pelo platonismo, teria sido necessário estruturar a geometria segundo esses padrões, o que estaria na origem do método axiomático-dedutivo.

Muitos dos mitos sobre os *Elementos*, em particular aqueles que dizem respeito às construções permitidas e à influência platônica, têm origem nos comentários de Pappus e de Proclus, que estão separados de Euclides por pelo menos 500 anos. Pappus viveu no século III E.C. e Proclus era um filósofo neoplatônico do século V E.C., que escreveu um *Comentário sobre o Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, ao qual podemos atribuir, em grande parte, a difusão da crença sobre o platonismo de Euclides. Uma interpretação superficial dessas fontes possui influência ainda hoje na literatura historiográfica.

A introdução à tradução brasileira dos *Elementos*, publicada em 2009, afirma claramente que o programa de axiomatização levado a cabo por Euclides se deve à influência platônica (Bicudo, 2009, p. 78). Depois de descrever o caráter empírico das matemáticas egípcia e babilônica, o tradutor pergunta por que, ao herdarem esse conhecimento, os gregos não se contentaram com o seu fundamento empírico.

Por que substituíram a coleção existente de receitas matemáticas por uma ciência dedutiva sistemática? O que os levou a confiar mais no que podiam demonstrar do que naquilo que podiam “ver” como correto? Por que a transformação no critério de verdade ali usado, trocando a justificativa baseada na experiência por aquela sustentada por razões teóricas? É na moldagem dessa nova configuração da matemática, julgamos, que foi decisiva a influência de Platão (Bicudo, 2009, p. 84).

Em uma linha de pensamento análoga, considerase que, por influência platônica, as construções geométricas aceitáveis, no tempo de Euclides, deviam ser realizadas com régua e compasso. O fato de que, nos *Elementos*, todas as construções são realizadas por meio de retas e círculos

³ Como edições modernas dessa obra clássica podemos citar Heath (1956) e Vitrac (1990-2001).

somente deu origem à crença de que essa seria uma restrição da geometria, imposta pelos cânones filosóficos da época.⁴ Na verdade, Euclides não menciona a régua e o compasso como instrumentos de construção, mas sim a linha reta e o círculo. Os comentadores que subscrevem à tese da influência platônica, afirmam que, devido à valorização da matemática teórica, Platão desprezava as construções mecânicas, ao passo que as retas e os círculos, por possuírem propriedades especiais, seriam figuras mais aceitáveis do que as outras.

No entanto, a menção à inspiração platônica para esse tipo de restrição vem acompanhada, na maioria das vezes, de referências alusivas e imprecisas. Os livros de história da matemática mais usados no Brasil fornecem exemplos explícitos da ambiguidade historiográfica que pretendemos desfazer neste artigo:

Nos três primeiros postulados dos Elementos, Euclides enuncia as três “construções” permitidas em geometria: (i) traçar uma reta por dois pontos; (ii) prolongar uma reta limitada continuamente segundo uma reta; (iii) descrever um círculo com qualquer centro e qualquer distância [...] A restrição de que essas construções devem ser realizadas apenas com o uso de uma régua sem escalas e um compasso tem tradicionalmente sido atribuída a Platão (Eves, 1994, p. 29).

Depois de lembrar que Plutarco, na *Vida de Marcelo*, afirma a indignação de Platão contra o uso de instrumentos mecânicos na geometria, Carl Boyer acrescenta:

Platão, consequentemente, pode ter sido o grande responsável pela restrição, que prevalecia nas construções geométricas gregas, às que podem ser efetuadas somente com régua e compasso (Boyer, 1974, p. 64).

Os livros acima citados são antigos e considerados ultrapassados pela comunidade de historiadores da matemática.⁵ Contudo, no Brasil, tais livros ainda são referências muito mais comuns do que se desejaría, principalmente no ensino de matemática, o que acaba por tornar populares e disseminadas versões equivocadas com pouco ou nenhum fundamento histórico.

Obras mais recentes não reproduzem a versão sobre a inspiração platônica de Euclides. Desde os anos 1970, quando as discussões historiográficas a respeito do modo de se fazer história da ciência começaram a

ter impacto na formação e no trabalho dos historiadores da matemática, diversas pressuposições tidas até então como verdadeiras começaram a ser questionadas. No caso da geometria grega, concepções filosóficas como as de Platão passaram a ser vistas mais como resultado de reflexões sobre a prática matemática do que como causa dessa prática (ver Mueller, 1969).

No caso específico da restrição à régua e ao compasso, o problema não é mais visto como uma imposição que vale para toda a geometria grega, o que significaria afirmar que o conjunto das práticas gregas segue um padrão de rigor. Para entender que isso não é verdade, basta lembrar que um matemático do porte de Arquimedes, que viveu logo depois de Euclides, não seguiu a regra e empregou outros métodos de construção. O fato de que outros geômetras gregos de uma época próxima a de Euclides, como Arquimedes mas também Apolônio, não tenham se restringido às construções com régua e compasso é usado para indicar que tal restrição não devia ser um cânone na época (Knorr, 1986).

Livros gerais de história da matemática, publicados mais recentemente, já não reproduzem a tese de que o uso da régua e do compasso era um padrão na época, de inspiração platônica⁶. Em 1993, o livro de Victor Katz afirma:

It is well known that Euclidian constructions are based on the straightedge and compass [...] The question is then why Euclid restricted constructions to these two devices, especially because other mathematicians, both before and after Euclid, used different types of constructions to solve problems. No answer for Euclid can be given definitely, however, other than to note that these constructions are all he needed to develop what he considered the basic results, the “elements”. Other constructions belong to advanced mathematics (Katz, 1993, p. 58).

Ele reconhece que, apesar das construções propostas nos *Elementos* serem efetuadas por meio da régua e do compasso, não há indícios dessa restrição em outros trabalhos da época. No entanto, ainda que não se refira a Platão, o autor parece interpretar a restrição às construções euclidianas nos *Elementos* como uma norma, ainda que interna ao livro. A razão de tal restrição permanece em aberto e o autor sugere, de modo alusivo, sem nenhuma discussão posterior, que outras construções pertenceriam à matemática avançada. Mas qual o sentido de matemática

⁴ Na realidade, quando falamos de “régua e compasso” estamos nos referindo a retas e círculos, pois, nos *Elementos* de Euclides, as construções são executadas por meio dessas curvas, definidas de modo abstrato. Não há indício algum de que fossem usados instrumentos de verdade.

⁵ Paradigmático para o novo rumo metodológico da historiografia da matemática foi o debate sobre a existência de uma “álgebra geométrica” em Euclides, instigado por Sabetai Unguru (1975, 1979). Ver Schubring (2008).

⁶ Em português, essa versão é desconstruída em Roque (2012).

avançada na época? Por que podemos afirmar que os *Elementos* visavam expor a matemática elementar? Por que, na suposta matemática elementar, as construções deviam ser feitas com régua e compasso?

Temos aqui um típico exemplo das ambiguidades e imprecisões que, hoje, ainda ceram o problema. Não responderemos às perguntas acima, mas pretendemos mostrar, a partir da análise de Steele, que não há evidências para se acreditar que a restrição dos meios de construção nos *Elementos* fosse uma norma. Na verdade, Euclides não afirma explicitamente, em lugar nenhum dos treze livros que compõem essa obra, que as construções *tenham* que ser efetuadas com régua e compasso. Simplesmente, elas são, de fato, realizadas desse modo. Além disso, tal restrição não se verifica na prática geométrica de sua época.

Ian Mueller (1981) propõe uma análise minuciosa sobre que sentido teria, para Euclides, a estrutura dedutiva com que apresenta seus *Elementos*, deixando claro que uma tal escolha não se deve a razões normativas nem filosóficas, mas a uma economia da exposição dos resultados que o livro visa apresentar. Ao questionar as razões da restrição à régua e ao compasso, o autor observa não se tratar de uma norma e indica, nas notas, o artigo de Steele como evidência, mas sem explicar seu conteúdo.

Em um capítulo intitulado “Sifting History from Legend”, Knorr (1986) enumera algumas recomendações para se compreender a história da geometria grega em seus próprios termos. A respeito dos métodos julgados satisfatórios para construir as soluções para os problemas clássicos, ele alerta que:

Historical accounts of these materials almost invariably assume at the outset that the ancients had at a very early time distinguished compass-and-straightedge constructions from the others and were continually urged on in the quixotic search for constructions of this type for the three special problems (Knorr, 1986, p. 7).

Essa observação é seguida por uma nota em que Knorr remete ao artigo de Steele de 1936 como única exceção à regra, uma vez que o autor mostra, de modo convincente, que a restrição a construções com régua e compasso era raramente explicitada nas técnicas gregas de resolução de problemas.⁷

Em um comentário extenso e profundo sobre os *Elementos* de Euclides (Artmann, 1999), depois de apresentar a construção de Arquimedes para o polígono de sete lados, realizada por meio da *neusis*, uma técnica que não pode ser efetuada por régua e compasso, Benno Artmann observa que:

It seems that at some time and for some unknown reason neusis constructions were decided to be unacceptable. Only ruler and compass were permitted for geometrical constructions. It is sometimes said that this goes back to Plato, but an adequate reference to Plato's writings has not been supplied (Artmann, 1999, p. 104).

Nas notas, Artmann indica: “About the restriction to ruler and compass see Steele [1936]” sem revelar que foi o Steele que desconstruiu essa afirmação (Artmann, 1999, p. 326). Mas, como veremos, esse trabalho não mostra como a construção por *neusis* tornou-se inaceitável. Além disso, o autor afirma que as construções com régua e compasso eram as únicas “permitidas”, como se constituíssem uma norma, versão que é desconstruída pelos argumentos de Steele.

Aparece aqui uma das sutilezas da tese de Steele que, a nosso ver, foram mal compreendidas pela historiografia: não apenas não se pode falar de uma norma platônica para a geometria da época, como não se pode sequer entender o uso da régua e compasso como uma norma na elaboração dos *Elementos*.

A investigação de Knorr (1986) sobre a tradição grega de resolução de problemas geométricos mostra a prática de resolução de problemas como a atividade principal dos geômetras gregos ativos entre os séculos V e II a.E.C. Já a sistematização e a organização das técnicas de resolução eram uma atividade secundária, que se desenvolveu principalmente no final do período analisado, como uma forma de se ter uma compreensão geral dos problemas acumulados até então. A partir daí, pode ter se tornado interessante analisar e classificar os métodos de resolução, preocupação cujos registros podem ter tido ecos nos primeiros séculos da era comum.

A ênfase na normatização é distinta da prática geométrica e data de um período posterior a Euclides. Além disso, ainda que uma preocupação com a sistematização dos resultados tenha aparecido no contexto grego tardio, não se trata de uma formalização do mesmo tipo daquela que marcou a axiomatização da matemática no século XIX, marcada por uma preocupação com os fundamentos.

Poderíamos perguntar, portanto, se a história da matemática escrita a partir do final do século XIX não teria sido marcada pela visão da própria matemática que se desenvolvia nesse momento, até meados do século XX. O foco excessivo em problemas formais da matemática podem ter levado aqueles que escreviam a sua história a enxergar, no passado, esforços de formalização semelhantes. Devido ao modo como seus enunciados se organizam, os

⁷ Knorr afirma que as condições eram “raramente” explicitadas, mas, de acordo com Steele, até Apolônio elas nunca foram explicitadas.

Elementos de Euclides eram um terreno fértil para uma tal extração.

Começaremos por analisar em detalhes o trabalho de Steele, na realidade, uma tese de doutorado, defendida na Alemanha, na universidade de Bonn publicada em seguida na série *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik* com o título *Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik*.

Depois de estudar o texto de Steele, discutiremos o contexto de resolução de problemas na geometria grega antes e depois de Euclides. É conhecido o papel dos problemas clássicos da geometria grega – duplicação do cubo, quadratura do círculo e trissecção do ângulo – mas normalmente associa-se a relevância desses problemas à discussão sobre a possibilidade de receberem uma solução por régua e compasso. Como mencionamos acima, Wilbur Knorr, critica a abordagem sobre esses problemas na historiografia e discute, com base no contexto da época, a pertinência de se falar em uma interdição de outros métodos de construção para além da régua e do compasso. Para ele, os geômetras desejavam resolver os problemas por qualquer método possível, sem se preocupar com o caráter formal de suas técnicas.

A razão pela qual o problema da exclusividade do uso da régua e do compasso nos *Elementos* é colocada como uma norma, e não simplesmente como uma prática, parece interessante para caracterizar um modo de se fazer história da matemática. Apesar das preocupações metodológicas serem cada vez mais presentes entre os historiadores, muitas das antigas versões insistem em diferentes tipos de texto e o desafio de construí-las em novos termos permanece sendo um dos objetivos fundamentais da pesquisa.

A análise de Steele

A historiografia

Arthur Donald Steele era inglês e escreveu sua tese em perfeito alemão. Nasceu em 1894 na Inglaterra, mas residiu de 1912 até 1935 na Alemanha, estudando matemática e dando aulas particulares. Em 1915, entrou para a ordem dos Jesuítas. Retornando à Inglaterra, foi professor no Heythrop College, Chipping Norton e, a partir de 1948, docente de matemática na Jesuit University em Feldham, Nova York, vindo a falecer em 1953 (*Catholic Herald*, 1953).

Steele começa por se perguntar como e quando teve origem a afirmação sobre a exclusividade do uso de régua e compasso, ressaltando que, durante boa parte do século XIX, ela não se encontra nas publicações de história da matemática, vindo a aparecer pela primeira vez em 1874, em um livro sobre história da matemática na antiguidade e na idade média. O autor é Hermann Hankel (1839-1873), matemático alemão com interesses sobre história e fundamentos, que afirma:

Devemos então a Platão a restrição – tão importante para geometria – dos instrumentos gráficos aos dois elementares. Os outros instrumentos, frequentemente anunciados com pompa por seus inventores, são esquecidos hoje em dia porque lhes falta qualquer significado científico superior (Hankel, 1874 in Steele, 1936, p. 290, tradução nossa).⁸

Hankel apresenta três provas: duas citações tiradas de Plutarco e outra de uma obra de Platão sobre a *República*. Segundo Steele, depois do livro de Hankel, a afirmação sobre a origem platônica da restrição à régua e ao compasso tornou-se uma constante na historiografia – seja em trabalhos que citam Hankel, ou em outros que não fornecem referências. Steele cita, em particular, as obras de Heiberg (1884), Zeuthen (1886), Rouse Ball (1888), Siegmund Günther (1895), Moritz Cantor (1907) e E. Dijksterhuis (1929) (Steele 1936, p.290-291), e constata:

Alguns autores desistem de apresentar suas fontes e outros sempre perseveram, repetitivamente, nas três provas utilizadas pelo próprio Hankel, em apoio à opinião de Hankel, não acrescentando novas provas (Steele, 1936, p. 293, tradução nossa).⁹

Steele observa, ainda, que o livro de Hankel foi publicado postumamente, de forma inacabada e sem a redação final. Para dar um exemplo do cuidado que se deve ter ao usar esta obra como referência, a parte que versa sobre a geometria grega é interrompida depois da citação acima. Reconhecendo a necessidade de investigar com mais profundidade os argumentos de Hankel, Steele dedica uma parte principal de sua tese a analisar se as três provas usadas por Hankel são válidas ou pertinentes.

As três provas

Plutarco (cerca 46 a 120 E.C.), historiador grego e cidadão romano, relata duas vezes uma crítica feita por

⁸ "Wir verdanken daher Plato die für die Geometrie so wichtige Beschränkung der geometrischen Instrumente auf jene zwei elementaren. Die anderen, von ihren Erfindern oft mit Pomp angekündigten Instrumente sind heute vergessen, da ihnen jede höhere wissenschaftliche Bedeutung abging" (Hankel, 1874 in Steele, 1936, p. 290).

⁹ "Die einen Schriftsteller verzichten auf die Darlegung ihrer Quellen, immer und immer wieder halten andere, als Stütze für die Hankelsche Ansicht, an den drei von Hankel selbst benutzen Stellen fest und tragen ihnen keine neuen dazu" (Steele, 1936, p. 293).

Platão a Arquitas (ca. 428 a ca. 350 a.E.C.), Eudoxo (408 a 355 a.E.C.) e Menaechmos (ca. 380 a ca. 320 a.E.C.).¹⁰ Segundo o historiador grego, a crítica consistiria em apontar que estes matemáticos tentaram reduzir o problema da duplicação do cubo a construções mecânicas pelo uso de aparelhos (*organikás*, gerätliche); assim, ter-se-ia pervertido o lado bom da geometria, fazendo-a retornar a um âmbito sensual. O segundo relato intervém em uma discussão que Plutarco propõe sobre os aparelhos de defesa construídos por Arquimedes; Platão teria criticado, em termos semelhantes, o uso da mecânica porque a essência da geometria seria pervertida e arruinada sempre que ela se afastasse de suas abordagens conceituais e imateriais e procurasse abrigo no sensual ou em objetos materiais (Steele, 1936, p. 294-295).

Na visão de Steele, os dois relatos são independentes. Há em comum o fato de que, em ambos os casos, os mesmos três matemáticos são criticados, ao se citar a redução do problema da duplicação do cubo a operações materiais, tendo como consequência arruinar o lado bom da geometria e o abandono de elementos imateriais em favor do sensual. Os relatos fazem sentido uma vez que os três nomes criticados possuíam conexões: Eudoxo foi um aluno de Arquitas, e Menaechmos, um aluno de Eudoxo. Além disso, encontram-se testemunhos semelhantes em vários outros autores da antiguidade (Steele, 1936, p. 296-297). No entanto, não há confirmação alguma sobre a mencionada crítica feita por Platão – nem nas obras de Platão, nem em Aristóteles, nem em comentários sobre os dois filósofos; também não se encontra referência a essa crítica em Teon de Smyrna (ca. 70 a ca. 135), Diógenes Laertius (ca. 200 a ca. 250), Pappus (ca. 290 a ca. 350), Proclus Diadocos (411 a 485) ou Eutokios (ca. 480 a ca. 540) (Steele, 1936, p.298).

Apesar da escassez de evidências sobre o aspecto citado acima, Steele avalia que podemos confiar em Plutarco como uma testemunha sobre a matemática. Ao analisar as numerosas menções sobre assuntos matemáticos em suas obras, não encontrando indícios de incompetência, Steele acredita que é possível confiar no bom uso de suas fontes:

Considerando outros relatos sobre matemática que ele apresenta, não há nenhuma razão perceptível para duvidar de que ele não tenha escolhido cuidadosamente suas fontes para sustentar as críticas e extraído de tais fontes, em duas ocasiões distintas, os argumentos adequados (Steele, 1936, p. 301, tradução nossa).¹¹

Para Steele, é possível que a fonte usada por Plutarco para se referir à crítica de Platão tenha sido uma

obra que não existe mais, o *Platônico*, escrita por Eratosthenes que tratou, entre outros, do problema deliano; o conhecimento dessa obra é indireto (Teon de Smyrna, 1878, 2:3-12; Steele, 1936, p. 301). Resumindo, a análise sobre os dois relatos de Plutarco não permite decidir com segurança se constituem testemunhos confiáveis. Contudo, essa indecisão não impede que se afirme o valor dessa referência para se decidir sobre a veracidade da afirmação sobre a restrição à régua e ao compasso nos *Elementos*. Isso porque, ou os relatos sobre uma possível censura feita por Platão são falsos, desvalorizando os relatos, ou, mesmo no caso de serem verdadeiros, não se pode afirmar se a censura implica realmente uma restrição à régua e ao compasso.

Com o objetivo de decidir se tal censura – se verdadeira – teria sido feita contra o uso de outros instrumentos além da régua e do compasso, Steele analisa os dois relatos à luz da terceira fonte mencionada por Hankel, a citação de Platão na *República*. Primeiramente, Steele descarta a hipótese de que Platão teria recusado, nessa obra, o uso de movimentos na geometria, ou conjurado uma geometria de movimentos: por um lado, os conceitos de Arquitas não se relacionam a uma geometria desse tipo e a posição de Platão sobre uma tal geometria não é evidente (Steele, 1936, p. 302-303). Faz mais sentido entender os dois relatos de censura – que não mencionam de modo algum a régua e o compasso – como se referindo a modelos que apelam aos sentidos e utilizam ferramentas materiais e produções que se servem da mecânica. De fato, segundo Diógenes Laertius, Arquitas utilizava argumentos baseados em movimentos materiais em sua solução do problema deliano (“*organike kinesis*”; Diógenes Laertius 1828-1831, VIII, § 83). Por esse motivo, Platão pode ter desejado recusar esta descida à área da percepção pelos sentidos, vendo-a como renúncia de uma geometria puramente conceitual, refúgio condenável a objetos que surgem do trabalho de operários por meios materiais (Steele, 1936, p. 303). Uma tal conjectura corresponde às concepções de Platão. Steele acrescenta que, na verdade, Aristóteles também distingue entre a atuação de um geômetra e a de um marceneiro: ambos consideram o ângulo reto, mas o marceneiro somente na medida em que seu trabalho o exige, ao passo que o geômetra estuda o ângulo na sua essência e particularidade, porque a tarefa do geômetra é o estudo do verdadeiro. Quanto a Platão, segundo os dois relatos de Plutarco, sua indignação concernia às soluções mecânicas em substituição às conceituais:

A geometria deve se segurar nas formações originais eternas e incorporais, deve permanecer de natureza

¹⁰ Uma crítica encontra-se na obra *Moralia* de Plutarco: no oitavo livro *Quaestiones convivales*, 718 EF, e a outra, na obra *Vita paralleliae*, na vida do Marcellus, 305 EF.

¹¹ “Von seinen übrigen mathematischen Stellen aus bietet er also keinen besonderen greifbaren Grund zu zweifeln, daß er die Quellen der Tadelstellen mit Umsicht gewählt und ihnen bei zwei verschiedenen Gelegenheiten das jeweils Passende entnommen hat” (Steele, 1936, p. 301).

conceitual e deve dominar tarefas difíceis por meios teóricos e não tomindo de empréstimo coisas dadas pelos sentidos empíricos (Steele, 1936, p. 305, tradução nossa).¹²

Em seguida, Steele analisa a terceira prova, a citação de Platão propriamente dita, que traz a recusa de qualquer uso, em geometria, de uma terminologia que faça referência a atos reais. Platão diz ser ridículo o fato de alguns escolherem expressões insinuando que façam alguma coisa ou efetuem atos [Handlungen setzen wollen], por exemplo, falando em “quadrar”, “acrescentar” (*prostithenai*), ao passo que esta ciência deve ser cultivada somente para se chegar ao conhecimento (*Erkenntnis, gnoseos*), como afirma na *República*, (Platão, 1980, 527 A; cf. Steele, 1936, p. 306). Platão confronta, assim, a geometria “em ação” com a geometria que procede por reflexão, a prática com a teoria, a ciência aplicada com a ciência pura, a ciência ligada às intuições com a ciência conceitual. Mais adiante, na *República* (Platão, 1980, 529 DE), Platão confirma essa posição, quando compara figuras e modelos com conceitos: figuras ou modelos, embora desenhados e realizados de maneira precisa por um Dédalo, escultor ou pintor, poderiam ser apreciados como bem feitos por um geômetra experimentado, mas este último nunca acreditaria reconhecer neles a verdadeira essência, seja de um idêntico, de um duplo ou de qualquer razão.

Do mesmo modo que as duas primeiras, a terceira prova não fala explicitamente de construções com régua e compasso. Mas em outro trecho, na *República*, próximo dos comentários acima, há uma menção ao problema deliano, que parece ser apreciado como característico para a estereometria, exprimindo a aceitação da solução correta por Arquitas, realizada por meio da estereometria (Platão, 1980, 528 B). Porém, essa solução exige um espaço tridimensional e não pode ser efetuada somente por régua e compasso (Steele, 1936, p. 307). Steele alerta-nos, portanto, que a conexão entre a solução do problema deliano e construções com régua e compasso, muito familiar na atualidade, não deve ser suposta como uma conexão presente na matemática grega. Além disso, deve-se estar consciente de que o problema deliano – quando explicitado – aparece somente como um exemplo e não pode ser interpretado como evidência de um discurso geral sobre construções com régua e compasso, uma vez que a censura de Platão poderia ter sido formulada contra soluções que não conhecemos mais, porque não nos foram transmitidas.

Resumindo a análise das três provas utilizadas por Hankel, Steele acredita na veracidade de algumas

censuras feitas por Platão em relação à geometria, mas não as vê como indício da exclusão de uma geometria de movimentos ou do uso de instrumentos distintos da régua e do compasso. Platão recrimina o uso de ferramentas materiais em geral, pois isto significaria o abandono da geometria puramente conceitual (Steele, 1936, p. 308). O desenvolvimento da geometria depois dele confirma essa avaliação, em particular os progressos na teoria das curvas, que podem ser vistas como indicando um maior grau de abstração em relação a elementos materiais.

Na seção seguinte, Steele analisa as maneiras como matemáticos de gerações posteriores definiram curvas superiores. Revela-se que eles estudaram as seções cônicas, mas também um grande número de outras curvas, como quadratriz, conoides, espirais, esferoides, etc. sem nenhuma restrição à régua e ao compasso. Além disso, eles substituíram as primeiras construções dessas curvas, que usavam instrumentos materiais, por meios teóricos (Steele, 1936, p. 311-313).

Há outras evidências para se considerar uma restrição à régua e ao compasso?

Depois dessa primeira parte dedicada à análise das provas apresentadas na historiografia, Steele estuda sistematicamente outras evidências que poderiam indicar uma restrição à régua e ao compasso por princípio. Como primeiro passo, ele trata do chamado fragmento de Hipócrates (cerca 450 a.E.C.), um documento extenso sobre a matemática antes de Platão.¹³ Os ângulos centrais de duas lúnulas de Hipócrates estão um para o outro na razão de dois números inteiros p e q . Dos possíveis pares (p, q) , Hipócrates constrói três pares; de dois destes, vê-se facilmente que podem ser construídos por régua e compasso e do terceiro, é possível mostrar que ele poderia ter conseguido construir da mesma maneira. No entanto, não é possível afirmar que Hipócrates tenha se restringido a estes três casos e que não tenha investigado outros pares (o que teria exigido outros meios de construção), porque queria utilizar somente a régua e o compasso (Steele, 1936, p. 322).

Depois de estudar esta parte altamente desenvolvida da matemática antes de Platão, Steele volta-se para este último, a fim de verificar se ele teria excluído meios de construção mais sofisticados do que a régua e o compasso. Os problemas escolhidos são os cúbicos, em particular o da duplicação do cubo. Segundo um relato do Philopo-

¹² “Die Geometrie muß an den ewigen, unkörperlichen Urgebilden festhalten, sie muß begrifflich bleiben und schwierige Aufgaben theoretisch, nicht durch Anleihen bei Sinnendingen bezwingen” (Steele, 1936, p. 305).

¹³ O fragmento está contido no comentário de Simplicius sobre a Física de Aristóteles, ver Simplicius (1882).

nos, Platão teria sugerido aos seus alunos resolver este problema (Philoponus, 1909, 102:22-23). Encontramos neste contexto um primeiro indicador do verdadeiro papel histórico da régua e do compasso: o uso ou não deste tipo de construção teria servido como divisória exata entre geometria elementar e geometria superior (Steele, 1936, p.324). Além disto, um trecho do *Menon*, de Platão (86E-87B), mostra que ele não praticou a suposta restrição, pois permitiu o uso de outros meios, ao menos para a solução de problemas cúbicos (Steele, 1936, p. 325).

Steele discute, portanto, uma aparente contradição: se Platão tivesse banido o uso de instrumentos materiais na geometria, como ele poderia ter admitido a régua e o compasso, que são também instrumentos materiais? A única maneira de evitar tal contradição seria admitir que Platão teria concebido, na verdade, o círculo e a linha reta como figuras ou curvas originais e geratrizes, todas as outras figuras sendo combinações destas duas. Embora, em uma primeira abordagem, haja indícios dessa concepção, uma análise mais fina não confirma a natureza geratriz dessas curvas. Há inclusive trechos em que Platão mostra que não concebeu o círculo e a linha reta como sendo da mesma natureza original e primitiva, pois atribui à linha reta a primordialidade: o retílineo precede e o circular só se realiza posteriormente (Plutarch, 1895, V, § 2, 130: 14-16 in Steele, 1936, p. 334).

Depois de pesquisar detalhadamente, constatando o silêncio sobre qualquer restrição à régua e ao compasso nas obras matemáticas da época clássica grega, Steele passa a refletir sobre suas possíveis causas. Em épocas diferentes, pode-se pensar em motivos distintos. Pode-se esperar que a restrição à régua e ao compasso como meios para resolver um problema tenha sido enunciada como uma condição adicional. Ao passo que, na matemática de hoje, da ausência de enunciação explícita de uma condição adicional, deduz-se que ela não exista, não se pode dizer o mesmo do contexto grego. Como Steele aponta, ao enunciar os três problemas famosos, nenhum dos autores clássicos menciona a condição adicional. Mas talvez, em períodos nos quais a referência ao uso de régua e compasso esteve em vigor, não teria sido preciso explicitá-la; por outro lado, quando as formulações dos problemas foram expressas em terminologia mais especificamente geométrica, os matemáticos já suspeitavam da insuficiência da régua e do compasso e, por isso, podem não ter mais desejado exigir uma solução só com esses meios.

Nos *Elementos* de Euclides, encontramos, pela primeira vez, uma restrição efetiva e palpável ao uso de régua e compasso. Porém, a restrição praticada nessa obra não era válida para toda a geometria. De fato, segundo Pappus, o próprio Euclides excedeu esse limite em outras obras (que não foram conservadas), em particular numa obra

sobre cônicas. Nas duas obras em que Euclides praticou tal restrição, os *Elementos* e os *Data*, não encontramos explicações ou comentários sobre suas razões, que devem ser, portanto, razões indiretas. Para Steele, o principal motivo de Euclides para se restringir às construções por régua e compasso nos *Elementos* teria sido evitar todas as curvas de grau superior e isto por razões relacionadas ao ensino (Steele, 1936, p. 338).

Steele retoma a famosa citação de Pappus ao classificar os problemas geométricos em três tipos, mencionando a régua e o compasso como característica para os problemas ‘planos’:

Os antigos consideravam três classes de problemas geométricos, chamados ‘planos’, ‘sólidos’ e ‘lineares’. Aqueles que podem ser resolvidos por meio de retas e circunferências de círculos são chamados de ‘problemas planos’, uma vez que as retas e curvas que os resolvem têm origem no plano. Mas problemas cujas soluções são obtidas por meio de uma ou mais seções cônicas são denominados ‘problemas sólidos’, uma vez que superfícies de figuras sólidas (superfícies cônicas) precisam ser utilizadas. Resta uma terceira classe, que é chamada ‘linear’ porque outras ‘linhas’, envolvendo origens diversas, além daquelas que acabei de descrever, são requeridas para sua construção. Tais linhas são as espirais, a quadratriz, o conchoide, o cисоide, todas com muitas propriedades importantes (Pappus, 1933, livro III, prop. 5, tradução nossa).

Pappus relata que os “antigos” geômetras tentaram resolver os problemas da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo por meio da régua e do compasso, mas ficaram embaraçados porque não conseguiram. Porém, ele não explica esta abordagem a partir de uma interdição de outros meios, ou de uma imposição da restrição a esses dois instrumentos, mas unicamente pela falta de familiaridade daqueles geômetras com os meios verdadeiramente necessários para as construções citadas, que são as seções cônicas (Steele, 1936, p. 338). Devido a essa falta de familiaridade, os antigos geômetras também não foram capazes de comparar a capacidade das construções com régua e compasso com a capacidade das construções com curvas superiores e, portanto, de realizar uma escolha consciente dos métodos mais adaptados a cada caso.

Já Proclus, embora seja um neoplatônico e tenha relatado extensamente as concepções matemáticas de Platão, nunca menciona uma censura ou uma prescrição em relação a métodos de construção. Quando quer explicar porque se evitou certos problemas, que não podem ser resolvidos por régua e compasso, Proclus não se refere a uma interdição intencional de outros meios geométricos,

mas sim às necessidades de um ensino sistematicamente hierarquizado (Steele, 1936, p. 340). Graças a essa colocação chave, Steele propõe, na terceira e última parte de sua investigação, uma compreensão inovadora sobre o verdadeiro papel da régua e do compasso para os matemáticos gregos.

O verdadeiro papel da régua e do compasso

Resumindo os resultados das duas primeiras partes de sua tese, Steele constata que não é possível afirmar uma restrição geral, na geometria grega, às construções por régua e compasso. Porém, pode se constatar uma restrição condicional: uma obrigação de se utilizar régua e compasso sempre quando possível, com a permissão de se utilizar outros meios nos outros casos (Steele, 1936, p. 341). Uma regra condicional desse tipo teria sido expressa por Pappus na citação abaixo:

De algum modo, contudo, um erro do tipo seguinte parece não ter sido considerado pequeno pelos geômetras: quando um problema plano é solucionado por alguém por meio de cônicas ou instrumentos lineares, e, em suma, quando é resolvido como se fosse de uma classe que não é a sua, como no exemplo da parábola no quinto livro das Cônicas de Apolônio e da neusis sólida de um círculo (Sefrin-Weis, 2010, p. 145).

Apesar de se referir frequentemente aos comentários de Pappus, a historiografia não chegou a avaliar suficientemente essa regra; só Heath chega a mencioná-la (Heath, 1981, p. 385), mas sem lhe dar a devida atenção¹⁴. Analisando essa e outras fontes, Steele coloca as seguintes questões:

- Como os próprios gregos justificaram a restrição condicional? Eles foram consequentes na aplicação da regra?
- A regra de Pappus levou em conta os casos geometricamente impossíveis. Os gregos suspeitaram que a impossibilidade poderia ser causada pela natureza do assunto?
- Os gregos procuraram e encontraram uma característica puramente geométrica que fosse realmente comum às duas curvas associadas à régua e ao compasso, quer dizer ao círculo e à linha reta?

Para responder à primeira pergunta, Steele recorre à regra de Pappus enunciada acima, que exprime clara-

mente a posição de que se deve utilizar o máximo possível a régua e o compasso. O trabalho de Apolônio (c. 262 a c. 190 a.E.C.) sobre lugares geométricos planos é a primeira obra matemática grega na qual o uso de régua e compasso são determinantes para a escolha dos assuntos a serem tratados. Por que os gregos teriam assumido a posição de se restringir o máximo possível ao uso de régua e compasso?

Steele responde que “As razões que foram transmitidas literalmente, indicadas pelos próprios gregos, são de natureza didática ou epistemológica” (Steele, 1936, p. 343, tradução nossa).¹⁵ Ele cita Proclus, em particular, que chama a linha reta e o círculo de linhas “simples”, das quais mesmo os leigos possuem ideias claras, ao passo que as linhas mistas superiores pertencem à ciência. Proclus também propõe que o problema geral de se dividir um ângulo não deve ser abordado no ensino, pois as curvas necessárias para resolvê-lo são complicadas demais para iniciantes. Além disso, Steele comenta a escolha dos métodos por Euclides, afirmando que ele tratou somente das linhas puras, e não das mistas, porque “na exposição de assuntos simples deve-se utilizar os tipos simples” (Proclus, 1970 in Steele, 1936, p. 344). Segundo Proclus, Euclides teria excluído dos *Elementos*, por exemplo, a trissecção do ângulo, uma vez que tratar de problemas resolvidos somente por curvas mistas ia de encontro à concepção expressa acima. Pappus também enuncia várias vezes razões didáticas para a escolha dos métodos. Por exemplo, em um trecho paralelo à regra, onde relata que os geômetras antigos lidavam com lugares planos por meio do círculo e da linha reta, ele afirma que esta prática de restrição dos métodos não se aplicou por princípio da mesma maneira em todas as partes da geometria, mas somente na exposição de elementos (Pappus, 1933, 644, p. 5-7 in Steele, 1936, p. 344).

Quanto à questão de investigar se os gregos aplicaram a restrição condicional de modo consequente, Steele é obrigado a dizer que ainda faltam estudos que analisem exceções à prática da regra. Ele anunciou que realizaria esse trabalho (Steele, 1936, p. 348), mas não chegou a fazê-lo.

Já em relação às razões epistemológicas que teriam levado à restrição às construções com régua e compasso nos *Elementos*, Steele não apresenta muitas evidências. Ele se refere, por um lado, a Aristóteles, ao afirmar que a beleza da ciência matemática consiste na ordem dos seus teoremas, na coerência dos seus resultados e na determinação imutável de seus conceitos, o que implicaria uma hierarquia de níveis na geometria. Por outro lado, ele cita Proclus, quando enfatiza uma graduação na geometria e critica outros autores de elementos que acrescentam coisas demais às partes elementares (Steele, 1936, p. 345).

¹⁴ Essa citação de Pappus será retomada por Knorr, como veremos mais adiante.

¹⁵ “Die wörtlich überlieferten Gründe, welche die Griechen selbst angegeben haben, sind entweder lehrkundlicher oder wissenschaftstheoretischer Art” (Steele, 1936, p. 343).

Com o fim de tratar a segunda pergunta, sobre a impossibilidade de algumas construções, Steele mostra que há um grande número de citações, nas obras gregas, sobre impossibilidades geométricas em geral: sobre a impossibilidade de resolver alguns problemas com régua e compasso e sobre a intenção de encontrar uma prova certa para a impossibilidade da quadratura do círculo (Steele, 1936, p. 348-352).

Em resposta à terceira pergunta, Steele sublinha que linhas retas e círculos no plano foram combinados na matemática grega em uma união que reside inteiramente na teoria e não depende dos instrumentos accidentais de desenho, ou seja, não depende realmente de régua e compasso (Steele, 1936, p. 363).

Vale mencionar que, na continuação do artigo, apesar de sua postura crítica e cuidadosa quanto ao uso de fontes por historiadores contemporâneos, Steele segue a tendência de sua época ao atribuir aos gregos a prática de uma álgebra. Visto que a possibilidade de se obter uma construção com régua e compasso é equivalente a poder resolver uma certa equação algébrica, Steele analisa se é possível detectar conceitos e meios algébricos ligados a construções geométricas. Ele constata, por fim, que “faltavam” tais ferramentas para os gregos (Steele, 1936, p. 358).

De nosso ponto de vista, para além da análise meticulosa mostrando a ausência de evidências que permitam afirmar a restrição à régua e ao compasso como uma prescrição para a geometria contida nos *Elementos*, o aspecto mais interessante do trabalho de Steele reside em sua argumentação sobre as razões pedagógicas que teriam motivado o uso exclusivo da reta e do círculo nessa obra.

Construções geométricas e a arte de resolver problemas na geometria grega

Nesta seção, procuraremos entender os objetivos dos *Elementos* no contexto mais amplo da prática de resolução de problemas que marcou a matemática no tempo de Euclides. No livro *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Wilbur Knorr analisa em detalhes a diversidade de métodos usados na resolução de problemas geométricos até o século III a.E.C. (ver Knorr, 1986). Contrariando a visão de que houvesse uma preocupação com a sistematização dos métodos de construção usados, esse historiador defende a ideia de que, até esse momento, o importante para os geômetras era resolver os problemas por qualquer

técnica que estivesse disponível. Esse *leitmotiv*, em nada similar ao caráter sistemático e formal dos *Elementos*, marca a tradição grega de resolução de problemas geométricos na época de Euclides, que se estendeu ao menos por mais um século depois dele.

Os argumentos usados por Knorr mostram que as tentativas de resolução de problemas envolviam uma diversidade de técnicas, não havendo realmente indícios de que essas fossem vistas como inferiores a construções por régua e compasso. Essa conclusão complementa, a nosso ver, a tese de Steele, contextualizando suas hipóteses em um panorama mais amplo dos objetivos da prática geométrica no período aqui analisado. Além disso, a explicação de Knorr pode fornecer elementos que nos ajudem a compreender as razões que levaram o trabalho de Steele a permanecer desconhecido, ou conhecido superficialmente, pela historiografia.

Por volta do século IV a.E.C., os problemas clássicos da duplicação do cubo e da quadratura do círculo tinham adquirido notoriedade, em parte graças a pensadores ligados a Platão. Antes dessa época, contudo, esses problemas já tinham sido abordados por Hipócrates. Por exemplo, Aristóteles afirma que esse geômetra teria fornecido uma prova falsa do problema da quadratura do círculo em seu tratado sobre as lúnulas, trabalho no qual o autor demonstra que as áreas de dois círculos estão uma para a outra assim como os quadrados de seus diâmetros. Os métodos usados incluem a *neusis*, que, como vimos, era considerado um procedimento essencialmente distinto de uma construção com régua e compasso.

O papel de Hipócrates, que atuou no século V a.E.C., foi central na história dos problemas clássicos. Nos fragmentos que restaram de sua obra, observamos que, apesar de grande parte dos casos que Hipócrates apresenta ser resolvível com régua e compasso, ele opta por outros métodos. O método da *neusis* é uma técnica de construção usada na resolução de problemas geométricos que não pode ser classificada como construção com régua e compasso, uma vez que emprega uma régua graduada.¹⁶ Em seu tratado sobre as lúnulas, Hipócrates usa soluções por *neusis* em problemas que poderiam ser resolvidos por meio de construções com régua e compasso.

Isso prova que o objetivo do trabalho do geômetra mais conhecido anterior a Euclides não era fornecer construções com régua e compasso para os problemas geométricos, mas encontrar uma construção possível qualquer, ou seja, resolver os problemas. Logo, apesar de ser vasta a extensão dos problemas que podiam ser

¹⁶ A construção por *neusis* (do grego νεῦσις de νεύειν *neuein* “inclina em direção a”, plural: νεῦσεις *neuseis*) consiste em intercalar uma linha reta de tamanho dado (*a*) entre duas linhas retas dadas (*l* e *m*), de modo que a linha reta intercalada, ou sua extensão, passe por um ponto dado *P*. Ou seja, uma extremidade da linha reta deve estar em *l*, e a outra em *m*, ao passo que a linha reta esteja “inclinada” em direção a *P*.

resolvidos por régua e compasso, outros métodos eram amplamente utilizados antes de Euclides.

Durante o século IV a.E.C. foram desenvolvidas novas técnicas, em particular as que empregavam curvas especiais geradas por seções de sólidos (como as cônicas) ou por movimentos mecânicos (como a espiral). As soluções para a duplicação do cubo exploravam uma vasta gama de métodos geométricos, característicos da prática de resolução de problemas desse século. Arquitas, por exemplo, chegou a usar a curva formada pela interseção de um toro com um cilindro para duplicar o cubo, e a quadratriz, para trissecular o ângulo. Outro método muito utilizado era o da aplicação de áreas, já conhecido no período pré-euclidiano.

Alguns dos matemáticos que aperfeiçoaram essas diferentes técnicas eram próximos de Platão, como Eudoxo, e integravam a Academia. Uma tal convergência entre interesses filosóficos e geométricos levou muitos intérpretes a postular posições inapropriadas sobre a motivação dos geômetras gregos pré-Euclides. Mas os trabalhos desses geômetras podem não ter tido uma natureza formal. Ao contrário, como argumenta Knorr, foi a busca de técnicas de resolução para os problemas geométricos que manteve o campo matemático em movimento, gerando novas pesquisas. A tarefa de resolver problemas não parece ter sido constrangida, nem antes nem depois de Euclides, pela imposição da régua e do compasso.

Na verdade, a restrição à régua e ao compasso não era praticada sequer em outros escritos de Euclides. Os postulados do livro I, que tratam da construtibilidade, isto é, das construções permitidas, são uma particularidade dos *Elementos*. Em outras obras importantes da geometria grega, como as de Apolônio ou Arquimedes, além de serem usados outros meios de construção, esses meios não são enunciados explicitamente nos preâmbulos. Retomamos, portanto, a pergunta: a que se deveria a sistematização presente nos *Elementos*?

Atualmente, a tese mais reveladora a respeito do encadeamento das proposições nesse livro é a de que seus resultados foram enunciados de trás para frente. Dentre os primeiros princípios, alguns teriam por função construir os objetos efetivamente utilizados nas demonstrações. Depois de ter estabelecido as proposições que queria demonstrar, ou as construções que queria efetuar, Euclides teria listado os princípios dos quais se poderiam deduzir essas proposições ou construir os objetos nelas utilizados.

Para Mueller (1981), os princípios e os resultados enunciados no livro I teriam como objetivo primordial permitir as construções requeridas em algumas proposições desse livro, como: ligar pontos a retas dadas, estender retas, cortar segmentos em partes iguais a segmentos dados, bissetar retas, erigir perpendiculares e, finalmente, copiar ângulos. Do mesmo modo, o objetivo de outros

resultados do livro I seria o de possibilitar que certas construções fossem realizadas por meio de outras mais simples, o que caracterizaria o procedimento típico dos *Elementos*. Se um postulado foi usado para demonstrar um teorema (ou para efetuar uma construção), esse teorema (ou essa construção) se torna uma verdade disponível para a demonstração de novos teoremas (ou para a realização de novas construções). Cada resultado aprendido constitui a base para o aprendizado de novos resultados. Os primeiros princípios servem, portanto, à demonstração dos primeiros resultados que, em seguida, efetuariam o papel de premissas para novas demonstrações. O encadeamento dedutivo das proposições pode ser compreendido, assim, como a busca de uma espécie de economia na argumentação.

Com base nessa tese, podemos compreender, mais uma vez, a restrição às construções por meio de retas e círculos de um modo não normativo, ou seja, como uma espécie de otimização, o que está de acordo com a interpretação levantada por Steele, exposta na seção anterior.

Do ponto de vista da exclusividade, ou da predominância da régua e do compasso como técnicas de construção, a situação não se transformou muito no período pós-euclidiano. Knorr (1986) mostra ainda que, ao menos até o século II a.E.C., o objetivo principal dos geômetras era o de encontrar construções por qualquer método que estivesse disponível.

A restrição a um certo método de construção pode ser vista como uma limitação motivada pela necessidade de dividir e classificar o corpo de resultados existentes. Seria plausível afirmar, portanto, que a riqueza da investigação sobre problemas geométricos de construção pode ter levado a uma reflexão sobre a natureza geral da arte de resolver problemas. Essa clareza, por sua, vez, pode ter motivado as primeiras demandas de sistematização e ordenação da geometria.

Knorr conjectura, com base nessa hipótese, que podem datar da transição entre os séculos III e II a.E.C. as primeiras tentativas de regularização dos métodos de construção para problemas geométricos. Já próximo da virada para a nossa era, o campo da geometria estava desenvolvido a tal ponto que pode ter se tornado interessante regularizar e classificar os métodos de resolução de problemas. A consideração de classes distintas de problemas – como a dos problemas planos, sólidos e lineares, citada por Pappus – ajudava a compreender o escopo dos métodos usados para tratá-los. Isso explicaria o esforço para reduzir outros tipos de construção a um desses três. Sendo assim, descrever os tipos de problema existentes podia ser conveniente, mas somente com o intuito de organizar a pesquisa.

Mesmo que um processo de sistematização tenha se iniciado no século II a.E.C., a divisão dos problemas geométricos em três tipos só foi enunciada no comentá-

rio de Pappus no terceiro século da era comum. A única referência encontrada na obra de Pappus a uma suposta exigência de se procurar preferencialmente construções planares (com retas e círculos) é a citação que mencionamos anteriormente, que afirma ser um erro solucionar um problema plano por meio de cônicas ou instrumentos lineares (ver Knorr, 1986, p. 345).

Além de não haver evidências de que a classificação de Pappus provenha do tempo de Euclides, a divisão entre problemas planos (construídos com régua e compasso) e outros, sólidos ou mecânicos, devia ser de ordem descritiva, mais do que normativa:

What the early geometers introduced as a useful division of loci becomes, among commentators, a normative division of problems in general, imposing in an unworkable form the recommendation to seek planar methods of solution (Knorr, 1986, p. 368).

Insistimos na hipótese, defendida também por Knorr, de que a resolução de problemas era a parte essencial da atividade geométrica na época de Euclides, Arquimedes e Apolônio, e a compilação do saber na forma de um conjunto de teoremas, uma atividade auxiliar. A função dessa atividade poderia estar ligada a preocupações pedagógicas, o que é coerente com a tese de Steele.

Seria plausível explicar a predominância de uma preocupação com a organização dos enunciados geométricos a partir dos objetivos didáticos da escola de Alexandria, que se desenvolveu depois de Euclides. O tipo de composição encontrado nos *Elementos* se encaixava perfeitamente aos objetivos pedagógicos dessa escola, cuja abordagem privilegiava uma exposição sintética, que tornava inacessível o procedimento heurístico da descoberta. A abordagem teórica, de inspiração euclidiana, seria característica, portanto, do ensino nas escolas filosóficas.

Knorr chega a atribuir a paralisação do trabalho produtivo da geometria grega aos efeitos esclerosantes dessa pedagogia, típica da orientação escolástica dos pensadores da Alexandria antes do início da era comum.

Resumindo: o modo de exposição dos *Elementos* era uma exceção em sua época, mas seu estilo foi conveniente para difundir os ideais pedagógicos dos pensadores da escola de Alexandria – que não tinham uma prática matemática própria. Isso explicaria porque esse aspecto nos foi transmitido com uma relevância maior do que parecia ter na época de Euclides.

nos *Elementos* de Euclides é de ordem pedagógica. As construções com estes instrumentos seriam mais simples e não exigiriam nenhuma teoria adicional (como seria o caso das construções por meio de cônicas). Desse ponto de vista, a restrição a esses instrumentos não seria consequência de uma proibição, mas de uma economia de argumentação: devia-se usar a régua e o compasso sempre que possível para simplificar a solução dos problemas de construção. Assim, apesar do destaque dos primeiros princípios na organização dos *Elementos*, seu sentido deveria ser de ordem prática, mais do que metafísica, ou formalista.

Essa tese está de acordo com as interpretações de Knorr, pois as construções com régua e compasso não fornecem um panorama amplo das técnicas usadas pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides, que não se furtavam a utilizar outros métodos de construção. Knorr postula que a sistematização do campo de problemas geométricos pode ter sido parte de uma prática filosófica iniciada por pensadores gregos, mas em um momento próximo à transição para a nossa era.

Entre os historiadores que citamos, há consenso atualmente de que a divisão, proposta por Pappus, entre problemas planos, sólidos e lineares – responsável pelo entendimento da prática de Euclides como uma regra – possui um papel mais descritivo do que normativo. Não é difícil entender, contudo, que os matemáticos mais recentes tenham enxergado, na proposta de Pappus, uma tentativa de classificação. Classificar, separar os problemas em tipos, identificar os meios legítimos e banir os ilegítimos, delimitar a fronteira entre o teórico e o prático, o puro e o aplicado, são preocupações centrais de uma matemática que se desenvolveu a partir do século XIX. Knorr (2001) propõe que as versões historiográficas ressaltando as motivações formalistas da matemática grega têm origem no final do século XIX, ou seja, no momento em que as preocupações metamatemáticas com os fundamentos eram predominante no exercício da matemática, o que influenciou também a escrita de sua história.

A exclusividade não declarada de construções por meio de retas e círculos é uma prática dos *Elementos* de Euclides, que possui um caráter excepcional no contexto da geometria de sua época. Que tal singularidade tenha sido interpretada como uma regra parece ser uma ocasião para investigar as transformações historiográficas que têm influenciado as pesquisas mais recentes em história da matemática. Nossa análise, neste artigo, não é conclusiva, mas talvez as concepções formalistas sobre as motivações da matemática grega possam ter desviado a atenção dos historiadores de um ponto primordial: a geometria tem suas bases na atividade essencialmente prática – ainda que abstrata – de resolver problemas.

Conclusão

Como apontado por Steele, uma das explicações mais convincentes para o uso da régua e do compasso

Referências

- ARTMANN, B. 1999. *Euclid: The Creation of Mathematics*. New York, Springer-Verlag, 349 p.
- BICUDO, I. 2009. *Os Elementos de Euclides* (tradução e introdução). São Paulo, Editora UNESP, 593 p.
- BOYER, C. 1974. *História da Matemática*. São Paulo, Edgar Blücher, 508 p.
- CATHOLIC HERALD. 1953. Obituary, 26 jun., p. 7.
- DIOGENES LAERTIUS. 1828-1831. *de Vitis dogmatibus et apophthegmatibus chroum philosophorum*. Leipzig, Teubner.
- EVES, H. 1994. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*. São Paulo, Editora Atual, 75 p.
- HANKEL, H. 1874. *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig, Teubner, 410 p.
- HEATH, T. 1956. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 2^a ed., Nova York, Dover Publications, 3 vols., 464 p., 464 p., 574 p.
- HEATH, T. 1981. *A History of Greek Mathematics. Vol. II*. Nova York, Dover, 608 p.
- KATZ, V. 1993. *A History of Mathematics. An Introduction*. Nova York, Harper Collins College Publishers, 786 p.
- KNORR, W. 1986. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston-Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 411 p.
- KNORR, W. 2001. Impact of Modern Mathematics on Ancient Mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques*, 7:121-135.
- MUELLER, I. 1969. Euclid's Elements and the Axiomatic Method. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 20(4):289-309.
- MUELLER, I. 1981. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Massachusetts, MIT Press, 378 p.
- PAPPUS. 1933. *Collection mathématique*, 2 vol (tradução e introdução de Paul ver Ecke). Paris-Bruges, Desclée de Brouwer. CXXVI + 364 p.
- PHILOPONUS. 1909. *In Aristotelis Analytica posteriora commentaria: cum anonymo in librum II; consilio et auctor*. Academiae Litterarum Regiae Borussicae. Editado por M. Wallies. Berlin, Reimer.
- PLATÃO. 1980. *A República*. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, LVIII + 500 p.
- PLUTARCHUS. 1887-1896. *Moralia. vol. I-VII*. Leipzig, Teubner; vol. VI. *Quaestiones Platonicae*, 1895.
- PLUTARCHUS. 1881-1891. *Vitae Parallelae. vol. I-V*. Leipzig, Teubner.
- PROCLUS. 1970. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton, Princeton University Press, XLV + 355 p.
- ROQUE, T. 2012. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro, Jorge Zahar, 512 p.
- SCHUBRING, G. 2008. The debate on a "geometric algebra" and methodological implications. In: R. CANTORAL; F. FASANELLI; A. GARCIA DIEGO; B. STEIN; C. TZANAKIS (orgs.), *Proceedings of HPM 2008, The satellite meeting of ICME: History and pedagogy of mathematics*. Cidade do México, México. [CD-ROM].
- SEFRIN-WEIS, H. (ed.). 2010. *Pappus of Alexandria: Book 4 of the Collection*. New York, Springer, 328 p.
- SIMPLICIUS. 1882. *In Physicam*. Editado por H. Diels, Berlin.
- STEELE, A.D. 1936. Ueber die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik* (Abteilung B), 3:288-369.
- THEON VON SMYRNA. 1878. *Expositio de rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*. Editado por E. Hiller. Leipzig, Teubner.
- UNGURU, S. 1975. On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, 15:67-114.
- UNGURU, S. 1979. History of Ancient Mathematics: some reflections on the present state of art. *Isis*, 70:555-565.
- VITRAC, B. 1990-2001. *Euclide: Les Éléments* (tradução comentada). Paris, P.U.F., vol. 1, Livres I à IV, 531 p.; vol. 2, Livres V à IX, 572 p.; vol. 3, Livre X, 432 p.; vol. 4, Livres XI-XIII, 482 p.

Submetido: 30/07/2013

Aceito: 07/03/2014

Gert Schubring
 IDM, Universidade de Bielefeld
 Universitaetsstrasse 25, D – 33615
 Bielefeld, Alemanha

Universidade Federal do Rio de Janeiro
 Av. Athos da Silveira Ramos, 149
 Centro de Tecnologia, Bloco C
 Cidade Universitária, Ilha do Fundão
 21941-909, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Tatiana Roque
 Universidade Federal do Rio de Janeiro
 Av. Athos da Silveira Ramos, 149
 Centro de Tecnologia, Bloco C
 Cidade Universitária, Ilha do Fundão
 21941-909, Rio de Janeiro, RJ, Brasil