Estudios Económicos
ISSN: 0188-6916
jsempe@colmex.mx
El Colegio de México, A.C.
México

Bernal Ponce, L. Arturo; Venegas Martínez, Francisco
Impacto de los productos derivados en los objetivos de política monetaria: un modelo de equilibrio general
Estudios Económicos, vol. 26, núm. 2, julio-diciembre, 2011, pp. 187-216
El Colegio de México, A.C.
Distrito Federal, México

IMPACTO DE LOS PRODUCTOS DERIVADOS EN LOS OBJETIVOS DE POLÍTICA MONETARIA: UN MODELO DE EQUILIBRIO GENERAL*

L. Arturo Bernal Ponce
ITESM, Campus Cd. de México

Francisco Venegas Martínez
Instituto Politécnico Nacional

Resumen: Se analiza el impacto que tiene el uso creciente de los de productos derivados en los objetivos de política monetaria. Para ello, se desarrolla un modelo estocástico de equilibrio general, en tiempo continuo, de una economía monetaria en donde los agentes se encuentran expuestos al riesgo de mercado. En el equilibrio se determina de manera endógena la tasa de inflación como función de los parámetros de tendencia y volatilidad de instrumentos derivados. Los resultados principales son: 1) el uso creciente de los productos derivados tiene un efecto significativo en la tasa de inflación y 2) bajo ciertas condiciones un incremento en la volatilidad del mercado de derivados tiene un efecto negativo sobre la inflación.

Abstract: This paper is aimed in analyzing the impact of the growing use of contingent claims in the objectives of monetary policy. To reach this end, a continuous time, stochastic model of macroeconomic equilibrium of a monetary economy where the agents are exposed to the risk market is developed. In the equilibrium the inflation rate is endogenously determined as a function of the trend and volatility of risky assets such as derivatives. The main results are: 1) the growing use of derivatives has a significant effect on the rate of inflation, and 2) under certain conditions, an increase in the volatility of the derivatives market has a negative effect on inflation.

Clasificación JEL/JEL Classification: C61, E44, E52, G13

Palabras clave/keywords: análisis dinámico, mercados financieros, política monetaria, valuación de derivados, dynamic analysis, financial markets, monetary policy, contingent claims pricing

Fecha de recepción: 14 I 2010 *Fecha de aceptación: 30 VII 2011*

* Los autores agradecen los valiosos comentarios de dos dictaminadores anónimos. abernal30@hotmail.com fevengas1111@yahoo.com.mx

1. Introducción

Sin duda, entre los temas actuales de mayor interés se encuentra el de los productos derivados (*forwards*, futuros, *swaps*, opciones de diversos tipos, notas estructuradas, títulos bancarios estructurados, *snowballs* y *snowblades*, *swaps* de riesgo de incumplimiento, *borhis* combinados con opciones, etc.) y el impacto que el creciente uso de éstos puede tener en los fundamentales de la economía, lo cual, a su vez, tiene efectos en el proceso de toma de decisiones de los diferentes agentes que participan en la economía (consumidores, inversionistas, empresas, gobierno, exportadores, etc.) y en los objetivos planteados por los diseñadores de política económica; en particular en lo que se refiere a las políticas monetaria y cambiaria.

Por otra parte, tradicionalmente la política monetaria de un banco central está orientada a influir en el nivel de la tasa de interés de corto plazo, lo que, al mismo tiempo, tiene efectos en la demanda y oferta agregadas a través de varios canales de transmisión, para, finalmente, afectar los precios. Entre los canales de transmisión se encuentran: la curva de tasa de interés, el tipo de cambio y el precio de diversos activos financieros; esto hace que las decisiones de consumo y de portafolio de los agentes se vean afectadas, lo cual crea una demanda natural de instrumentos financieros que permiten a los agentes privados cubrirse contra diversos riesgos (mercado, crédito, liquidez, operativo, país, soberano, etc.).

Debido al notable crecimiento en el uso de los productos derivados en los últimos años, la discusión en relación a su efecto sobre los objetivos de política monetaria ha tomado gran relevancia. La discusión se ha centrado en que el aumento del uso de derivados ha propiciado cambios importantes en la forma en que la política monetaria es conducida, comunicada y trasmitida a la economía. Tal es el caso de la investigación de Savona, Maccario y Oldani (2002), quienes encuentran que los instrumentos derivados tienden a cambiar la efectividad de las acciones de política monetaria y modifican la esencia de los instrumentos que pueden ser usados. Al respecto, existen otros estudios que han documentado que los derivados tienen un impacto favorable para las estrategias de los bancos centrales con propósitos de estabilizar los precios. Por ejemplo, un estudio del *Bank for International Settlements* (1994) y otro de *Upper* (2006) muestran que los derivados permiten que se incremente tanto la velocidad como el grado de transmisión las acciones de política monetaria.

No obstante lo anterior, también se ha encontrado que el uso de productos derivados puede debilitar las estrategias de política económica, como se muestra en Gomez, Vásquez y Zea (2005) y

Hunter y Smith (2002). De la misma manera, Fender (2000a, 2000b) y Vickery (2008) han observado que el incremento en el uso de derivados para cubrir el riesgo, tanto corporativo como de intermediarios financieros, proporciona una posible explicación de la inestabilidad del canal de crédito. Por otra parte, existen también estudios como el de Morales (2001) que revela que el impacto de derivados en la política monetaria es ambiguo o el de Vrolijk (1997) que sustenta que no existe evidencia de que la inflación pudiera ser debilitada o rezagada debido a la presencia de derivados.

En relación con la política monetaria se ha encontrado, en diversos trabajos, que ésta puede ser afectada por la estructura de los mercados financieros, en particular, en lo referente a su grado de completez (ver Vrolijk, 1997; Mies, Morandé y Tapia, 2002; Gomez, Vásquez y Zea, 2005). Es decir, en mercados financieros desarrollados parece no haber evidencia de un impacto significativo de los derivados sobre la política monetaria, mientras que en mercados financieros que aún se encuentran en desarrollo, sucede lo contrario. Una de las razones del resultado es el efecto de la volatilidad de los mercados financieros sobre la tasa de inflación (Wagner y Berger, 2005; Beltratti y Morana, 2006).

Con base en los estudios anteriores, este artículo intenta desarrollar un modelo estocástico que permita ampliar el conocimiento acerca de la forma en que el incremento en el uso de derivados impacta los objetivos de política monetaria. Para conseguir dicho objetivo se recurre a un modelo cuya estructura es similar a la expuesta en Cox, Ingersoll y Ross (CIR) (1985), Lioui y Poncet (2004) y (2005) y Venegas (2006) y (2008).[1] De tal forma que, como en Venegas (2009), Lioui y Poncet (2004) y Bakshi y Chen (1996), se obtendrá de manera endógena la tasa de inflación de equilibrio.

Las principales diferencias del presente artículo con esos trabajos son las siguientes: *i*) en relación con Lioui y Poncet (2004) y Bakshi y Chen (1996), mostramos que la tasa de inflación es afectada por los parámetros de tendencia y volatilidad de instrumentos derivados; *ii*) en Lioui y Poncet (2005) los resultados obtenidos se usan para valuar un derivado suscrito sobre una variable obtenida de manera endógena, para ello utilizan una medida martingala equivalente (*pricing kernel*), en nuestra investigación para valuar un derivado se utiliza el hecho de que el subyacente y el derivado comparten la misma prima al riesgo y *iii*) el modelo que se propone proporciona soluciones cerradas, lo

[1] En lo sucesivo Venegas (2008) se referirá, en particular, a la sección XIX: Modelos económicos de riesgos.

que hace más fácil el entendimiento de diferentes aspectos del uso creciente de los productos derivados.

El resto del artículo está organizado como sigue: en la sección dos y tres se describe la estructura de la economía, se resuelve el problema de decisión de consumo de los agentes representativos y se determinan las condiciones de equilibrio general, para, posteriormente, obtener la tasa de inflación de equilibrio. A través de la sección cuatro se determina el precio de equilibrio de un derivado suscrito sobre un activo riesgoso. Por último se presentan las conclusiones y algunos apéndices que contienen detalles técnicos sobre los resultados obtenidos.

2. Estructura de la economía y problema del consumidor

En esta sección se establecen los supuestos de la economía y las características de los individuos. Para ello, se considera que existe un solo bien en la economía que puede ser asignado para el consumo o la inversión. El producto de la tecnología, en términos de unidades de dicho bien, al tiempo t, es denotado por $y(t)$ y sigue una ecuación diferencial estocástica de la forma:[2]

$$\mathrm{d}y\,(t) = y\,(t)\,[\mu_y dt + \sigma_y \mathrm{d}W_y\,(t)] \tag{1}$$

cuya solución está dada por (ver Karatzas *et al.*, 1991):

$$y\,(t) = y\,(0) \exp\left\{\left(\mu_y - \frac{1}{2}\sigma_y\right) t + \sigma_y W_y\,(t)\right\}$$

[2] En términos estrictos una ecuación diferencial estocástica como (1) es una notación simplificada de la integral estocástica de tipo:

$$ln\ \ y(t){=}ln\, y(0){+}\int_0^t du{+}\int_0^t dW_y(u).$$

Las reglas de la diferencial estocástica se desprenden de las de la integral estocástica, sin embargo, se utiliza la diferencial estocástica por que permite, en muchos casos, obtener resultados de manera más rápida y sencilla sobre la integral estocástica.

donde μ_y es la tasa de rendimiento medio esperada de la inversión del activo físico, σ_y es su volatilidad y $W_y(t)$ es un movimiento browniano definido en un espacio de probabilidad fijo

$$\left(\Omega^{(M)}, \mathcal{F}^{(M)}, \left(\mathcal{F}^{(M)}\right)_{t>0}, P^{(M)}\right),$$

donde $\left(\mathcal{F}^{(\mathcal{M})}\right)_{t>0}$ denota su filtración aumentada (cualquier información relevante al tiempo t, $t > 0$).

Se supone también que el banco central emite dinero y arbitrariamente establece su tasa de rendimiento nominal igual a cero. Así mismo, la política monetaria es conducida, de tal forma, que la oferta monetaria, $M(t)$, tiene la siguiente dinámica estocástica:

$$\mathrm{d}M\left(t\right) = M\left(t\right)\left[\mu_M \mathrm{d}t + \sigma_M \mathrm{d}W_M\left(t\right)\right], \tag{2}$$

con solución por (ver Karatzas *et al.* 1991):

$$M(t) = M(0)\exp\left\{\left(\mu_M - \frac{1}{2}\sigma_M\right)t + \sigma_M W_M(t)\right\},$$

donde μ_M es la tasa de crecimiento media esperada de la oferta monetaria, σ_M es la volatilidad de la oferta monetaria y $W_M(t)$ es un movimiento browniano definido en un espacio de probabilidad fijo

$$\left(\Omega^{(M)}, \mathcal{F}^{(M)}, \left(\mathcal{F}^{(M)}\right)_{t>0}, P^{(M)}\right),$$

donde, como antes, $\left(\mathcal{F}^{(\mathcal{M})}\right)_{t>0}$ denota su filtración aumentada. Se supone que los movimientos brownianos $\mathrm{d}W_y(t)$ y $\mathrm{d}W_M(t)$ están correlacionados entre sí, de tal forma que:

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_y\left(t\right), \mathrm{d}W_M\left(t\right)\right) = \rho\ \mathrm{d}t,$$

en donde ρ es el coeficiente de correlación.

La incertidumbre exógena de la economía está descrita tanto por $\mathrm{d}W_y(t)$ como por $\mathrm{d}W_M(t)$. En este sentido, existe una variable de estado, $Z(t)$, la cual provee de suficiente información para describir completamente los estados de la economía, al tiempo t. Es decir, los valores actuales de todas las variables económicas se pueden expresar como función de $Z(t)$ y esta variable sigue el proceso estocástico:

$$\mathrm{d}Z\left(t\right)=Z\left(t\right)\left[\mu_{Z}\mathrm{d}t+\sigma_{ZM}\mathrm{d}W_{M}\left(t\right)+\sigma_{Zy}\mathrm{d}W_{y}(t)\right], \tag{3}$$

donde los parámetros μ_Z, σ_{ZM} y σ_{Zy} son constantes.

Asimismo, se supone que el nivel general de precios, $P(t)$, es conducido por choques tanto reales como monetarios y tiene el siguiente proceso estocástico:

$$\mathrm{d}P\left(t\right)=P\left(t\right)\left[\pi\left(t\right)\mathrm{d}t+\sigma_{PM}\mathrm{d}W_{M}\left(t\right)-\sigma_{Py}\mathrm{d}W_{y}(t)\right], \tag{4}$$

donde $\pi(t)$ es la inflación media esperada al tiempo t, $\sigma_{PM}>0$ y $\sigma_{Py}>0$ son sus respectivas volatilidades instantáneas.[3]

Se supone también que existe un bono libre de riesgo (de incumplimiento) de precio $B(t)$ que satisface:

$$\mathrm{d}B\left(t\right)=i\left(t\right)B\left(0\right)\mathrm{d}t \tag{5}$$

donde $i(t)$ es la tasa de interés nominal, la cual se supone determinista y $B(0)=1$ representa su condición inicial.

Debido a que existen dos fuentes de riesgo, $W_y(t)$ y $W_M(t)$, y sólo un activo financiero, los mercados son incompletos (ver Karatzas *et al.* 1991). Se define un subyacente $X(t)$ que involucra las fluctuaciones aleatorias de $y(t)$ y $M(t)$, el cual tiene una dinámica dada por:

$$\mathrm{d}X\left(t\right)=X\left(t\right)\left[u_{X}\mathrm{d}t+\sigma_{Xy}\mathrm{d}W_{y}\left(t\right)+\sigma_{XM}\mathrm{d}W_{M}\left(t\right)\right]$$

donde el parámetro de tendencia, $u_S\in\mathbb{R}$, expresa la tendencia y $\sigma_{SM}>0$ y $\sigma_{Sy}>0$ representan sus respectivas volatilidades. El derivado sobre $X(t)$ tiene precio $(t,X(t))$ y se supone que sigue una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$\mathrm{d}S\left(t\right)=S\left(t\right)\left[u_{S}\mathrm{d}t+\sigma_{Sy}\mathrm{d}W_{y}\left(t\right)+\sigma_{SM}\mathrm{d}W_{M}\left(t\right)\right]. \tag{6}$$

[3] El proceso descrito para la tasa de inflación es como el que se presenta en Bakshi y Chen (1996).

En la sección 4 se definirán las condiciones de frontera (función de pagos) de un derivado (una opción) sobre $X(t)$ y se utilizarán los resultados obtenidos en la sección 3 para su valuación.

Se supone que existe un número finito de individuos idénticos en sus preferencias y dotaciones. Cada individuo obtiene satisfacción por el consumo del bien genérico que se produce en la economía, $c(t)$, así como por la tenencia de saldos monetarios reales, $m(t)$. Esto último debido a los servicios de liquidez que ofrece el acervo nominal de dinero. Todos los individuos coinciden en que las oportunidades de inversión, la oferta monetaria y la tasa de inflación son como se han descrito hasta ahora. La función de utilidad de cada individuo es del tipo Sidrauski (1967) y tiene la siguiente forma:

$$U\left(t, c\left(t\right), m\left(t\right)\right) = e^{-\delta t}\left[\varphi \ln c\left(t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln m\left(t\right)\right], \qquad (7)$$

donde $\delta > 0$ es la tasa subjetiva de descuento y $0 < \varphi < 1$ un parámetro que mide la importancia relativa entre el consumo del bien de consumo y la tenencia de saldos reales.

Se supone que cada individuo puede asignar proporciones de su riqueza a la tenencia de saldos reales θ_m, a la inversión en el activo físico θ_y, al derivado contingente θ_s y al bono $\theta_b = (1-\theta_y-\theta_s-\theta_m)$. Por lo tanto, el problema que enfrenta este individuo es maximizar su utilidad esperada descontada al tiempo, tal y como sigue:

$$\underset{c(t),\theta_y,\theta_s,\theta_m}{\text{Maximizar}}\,\mathrm{E}\left[\int_0^\infty e^{-\delta s}\left[\varphi \ln \mathrm{c}\left(s\right) + \left(1-\varphi\right)\ln m\left(s\right)\right]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_0\right], \qquad (8)$$

donde $\mathcal{F}_\prime$ representa la información disponible al tiempo $t = 0$. Por lo tanto, el problema (8) estará sujeto a que la evolución de la riqueza real, $a(t)$, de cada individuo al tiempo t, satisfaga (véase el apéndice 1):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}a(t) = a(t)\{&[r_b + \theta_y(\beta_y - r_b) + \theta_s(\beta_s - r_b) + i\theta_m - (c(t)/a(t))]\,\mathrm{d}t\\ &+ \left[\sigma_{Py} + \theta_s\left(\sigma_{Sy} - \sigma_{Py}\right) + \theta_y\sigma_y\right]\mathrm{d}W_y\left(t\right) \qquad (9)\\ &+ \left[\theta_s\left(\sigma_{SM} + \sigma_{PM}\right) - \sigma_{PM}\right]\mathrm{d}W_M\left(t\right)t\}\end{aligned}$$

donde

$$\beta_y = u_y - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PM}\sigma_{Py}\rho + \sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py}\sigma_y - \sigma_{PM}\sigma_y\rho,$$

$$\beta_S = u_S - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PM}\sigma_{Py}\rho + \sigma_{Py}^2 - \sigma_{PM}\sigma_{sy}\rho + \sigma_{Sy}\sigma_{Py}$$
$$-\sigma_{PM}\sigma_{SM} + \sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho,$$

y

$$r_b = i - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PM}\sigma_{Py}\rho + \sigma_{Py}^2.$$

La ecuación (9) es la ecuación diferencial estocástica de acumulación de la riqueza real de cada individuo, en términos de las participaciones de cada activo, así como del consumo. Por conveniencia, esta ecuación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}a\,(t) = a\,(t)\,[u_a\mathrm{d}t + \sigma_{ay}\mathrm{d}W_y\,(t) + \sigma_{aM}\mathrm{d}W_M\,(t)] \tag{10}$$

donde

$$u_a = r_b + \theta_y(\beta_y - r_b) + \theta_s(\beta_s - r_b) + i\theta_m - (c(t)/a(t)) \tag{10.1}$$

$$\sigma_{ay} = \sigma_{Py} + \theta_s\,(\sigma_{Sy} - \sigma_{Py}) + \theta_y\sigma_y \tag{10.2}$$

$$\sigma_{aM} = \theta_s\,(\sigma_{SM} + \sigma_{PM}) - \sigma_{PM} \tag{10.3}$$

3. Caracterización del equilibrio

En esta sección se obtendrá la tasa de inflación de equilibrio. Para ello, se supone primero que para que la economía se encuentre en equilibrio se debe cumplir lo siguiente:

(i) dados los procesos descritos en (1)-(6), tanto el consumo $c^*(t)$ como las proporciones $\theta_y^*, \theta_s^*, \theta_m^*$ son óptimas;

(ii) el mercado de activos financieros se vacía, por lo tanto se cumple que: $a(t)\theta_s^* = 0$ y $a(t)(1 - \theta_s^*, \theta_m^*, \theta_y^*$ y

(iii) la oferta monetaria es igual a la demanda de saldos reales, esto es: $\frac{M(t)}{P(t)} = m\,(t) = a\,(t)\,\theta_m$.

Es importante mencionar que el supuesto de que el mercado de activos derivados contingentes se vacía es una simplificación de: $\sum_{h=1}^{H} a^h(t)\,\theta_S^h = 0$, donde H es el número de individuos en la economía. Si por ejemplo $H = 1$, por lo tanto se cumple que: $a(t)\theta_s^* = 0$. En la siguiente proposición se presentan los valores óptimos tanto de $\theta_y^*, \theta_s^*, \theta_m^*$ como del consumo:

PROPOSICIÓN 1. *En equilibrio el consumo satisface:*

$$c^*(t) = \varphi\delta a(t) \tag{12}$$

La tenencia de saldos reales es:

$$\theta_m^* = \frac{(1-\varphi)\,\delta}{i} \tag{13}$$

La tenencia del derivado contingente es:

$$\theta_s^* = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_{SM}^2\sigma_y}[(u_S - i)\sigma_y - (u_y - i)(\rho\sigma_S M + \sigma_S y)] \tag{14}$$

para $\rho \in (-1, 1)$.

Por la condición de vaciado de los mercados, $\theta_s^* = 0$ *es igual a cero, por lo tanto, en equilibrio se cumple que:*

$$\frac{u_y - i}{\sigma_y} = \frac{u_s - i}{\sigma_{Sy} + \rho\sigma_{SM}} \tag{15}$$

La tenencia en el activo físico es:

$$\theta_y^* = \frac{1}{\left(1-\rho^2\right)\sigma_{SM}^2\sigma_y}\left[\frac{u_y-i}{\sigma_y}\left(\sigma_{Sy}^2 + 2\rho\sigma_{Sy}\sigma_{SM} + \sigma_{SM}^2\right) - \left(u_S - i\right)\left(\sigma_{Sy} + \rho\sigma_{SM}\right)\right] \tag{16}$$

para $\rho \in (-1, 1)$.

La ecuación (12) establece que las decisiones de consumo son independientes de los parámetros financieros y dependientes de la riqueza, de la tasa subjetiva de descuento y del parámetro que mide la importancia relativa entre el consumo y la tenencia de saldos reales. La ecuación (13) expresa que la demanda de saldos reales es función decreciente de la tasa de la tasa de interés nominal; intuitivamente este resultado se puede interpretar de la siguiente forma: un aumento en la tasa de interés nominal incrementa los deseos de los agentes de sustituir dinero por bonos, lo que, a su vez, disminuye la tenencia de saldos monetarios reales.

En la ecuación (14) está representada la tenencia del derivado contingente. Debido a que dicha ecuación está definida para $\rho \in (0,1)$, es decir, no existe una correlación perfecta entre los choques monetarios y reales, el término fuera del corchete es positivo y, por lo tanto, la tenencia del derivado es función creciente de su prima al riesgo $u_S - i$. Ahora, si suponemos que el término $\sigma_{Sy} + \rho\sigma_{SM}$ es interpretado como la volatilidad del derivado contingente, lo cual requiere suponer que $\sigma_{Sy}+\rho\sigma_{SM} > 0$ y, a su vez, que $\rho > -\sigma_{Sy}/\sigma_{SM}$, entonces se cumple que la tenencia del derivado es función decreciente de la prima al riesgo del activo físico. Esto es, si se mantiene lo demás constante, un aumento en $u_y - i$, disminuye la tenencia del activo físico en proporción a

$$-\frac{\sigma_{Sy} + \rho\sigma_{SM}}{\left(1-\rho^2\right)\sigma_{SM}^2\sigma_y}$$

La ecuación (15) indica que tanto el derivado contingente como el activo físico comparten la misma prima al riesgo, (15) será relevante para valuar un derivado suscrito sobre un activo riesgoso en la sección 4.

La ecuación (16) representa la tenencia del activo físico, la cual es función creciente de su prima al riesgo $u_y - i$, y por el supuesto de que la volatilidad del derivado $\sigma_{Sy} + \rho\sigma_{SM}$ es positiva y función decreciente de la prima al riesgo del derivado contingente; lo que se explica porque un aumento en $u_S - i$ hará más atractivo invertir en derivados y menos en el activo físico.

En equilibrio la tenencia del activo físico es función de la volatilidad del derivado contingente. Como se verá más adelante, este último resultado es relevante para comprobar el impacto de los derivados en los objetivos de política monetaria, por lo que a continuación se realizará un análisis de estática comparativa. Al respecto, un cambio en $\sigma_{Sy} + \rho\sigma_{SM}$ impactará a θ_y^* de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \theta_y^*}{\partial \sigma_{Sy}} = \frac{1}{(1-\rho^2)\,\sigma_{Sy}^2 \sigma_y} \left(\frac{u_y - i}{\sigma_y} - \tfrac{1}{2} \frac{u_S - i}{\rho_{Sy}\sigma_{SM} + \sigma_{Sy}} \right) > 0 \qquad (17)$$

y

$$\frac{\partial \theta_y^*}{\partial \sigma_{SM}} = \frac{1}{(1-\rho^2)\,\sigma_{SM}^2 \sigma_y} \left(\frac{u_y - i}{\sigma_y} - \tfrac{1}{2} \frac{(u_S - i)\rho}{\rho_{Sy} + \sigma_{SM}} \right) \qquad (18)$$

El hecho de que (17) sea mayor que cero se debe a (15). Una interpretación de (17) es la siguiente: si se mantiene lo demás constante, un aumento en la volatilidad del derivado contingente provocado por choques reales, es decir, un aumento en σ_{Sy} incrementa la tenencia del activo físico; esto se puede explicar porque un aumento en la volatilidad del derivado contingente, provocado por choques reales, incidirá en que, ante tal riesgo, los agentes cambiarán derivados por otros activos, entre ellos el activo físico.

El impacto de la tenencia del activo físico que es provocado por choques monetarios, cambio en σ_{SM}, es ambiguo y estará en función del signo del término entre corchetes de (18), por ejemplo, si se cumple que:

$$\frac{\rho}{\rho^2 - 2} > \frac{\sigma_{SM}}{\sigma_{Sy}}$$

entonces un incremento en σ_{SM} aumentará la tenencia del activo físico.

Ahora se determinará la tasa de inflación de equilibrio.

PROPOSICIÓN 2. *La inflación media esperada de equilibrio es:*

$$\hat{\pi}\,(t) = \frac{i}{(i-\bar{\omega})^2} \Big[u_M(\bar{\omega} - i) + \theta_y^*(u_y(i - \bar{\omega}) + \xi_1) \qquad (19.1)$$

$$+\ \theta_y^{2*}\ \sigma_y^2\ \bar{\omega}\ +\xi_2 \Big]$$

donde

$$\bar{\omega} = \delta\,(1-\varphi) > 0,$$

$$\xi_1 = i\,(\bar{\omega} - \sigma_y\ \sigma_M\ \varphi) - i^2 - \sigma_y\ \sigma_M\ \varphi\ \bar{\omega},$$

$$\xi_2 = i^2 + i\left(\sigma_M^2 - \varphi\delta - \bar{\omega}\right) + \varphi\ \delta\ \bar{\omega} + \bar{\omega}\,(\bar{\omega} - i)$$

y las respectivas volatilidades son:

$$\sigma_{Py} = \frac{\theta_y i \sigma_y}{\bar{\omega} - i} \tag{19.2}$$

$$\sigma_{PM} = \frac{i \sigma_M}{\bar{\omega} - i} \tag{19.3}$$

Como se puede observar en (19.1), la tasa de inflación depende de factores tanto reales como monetarios. Para el caso en que: $\bar{\omega} > i$, la tasa de inflación es función creciente de la tasa de crecimiento media esperada de la oferta monetaria, u_M, en cuyo caso sería consistente con la intuición y evidencia empírica que establece que, un choque que afecte de manera positiva la oferta monetaria, conducirá a un incremento en el nivel de precios, de tamaño: $i/\bar{\omega} - i$. En este modelo dicha relación puede ser negativa si se cumple que $\bar{\omega} < i$, lo cual sería teóricamente posible.

Se observa también que la tasa de inflación es función de la tenencia del activo físico, la que, a su vez, es función de la prima al riesgo del derivado contingente, así como de sus respectivas volatilidades. Este resultado es consistente con la literatura que documenta que la volatilidad de los mercados financieros tiene importantes implicaciones sobre la inflación, como Wagner y Berger (2005) y Beltratti y Morana (2006). El efecto de estos parámetros sobre la tasa de inflación es ambiguo y estará en función de los signos de (17), (18) y de $u_y(i - \bar{\omega}) + \xi_1 + 2\ \theta_y^*\ \sigma_y^2\ \bar{\omega}$. Por ejemplo, un aumento en la volatilidad del derivado contingente provocado por choques reales, es decir, un aumento en σ_{Sy} impactará la inflación media esperada en:

$$\frac{\partial \hat{\pi}\,(t)}{\partial \theta_y^*(\sigma_{Sy})} = \frac{i}{(i - \bar{\omega})^2} \frac{\mathrm{d}\theta_y^*}{\mathrm{d}\sigma_{Sy}} \left[(u_y\,(i - \bar{\omega}) + \xi_1) + 2\sigma_y^2 \bar{\omega} \theta_y^*\right] \tag{19.4}$$

Debido a (17), a partir de (19.4) se concluye que, si se mantiene lo demás constante, un aumento en σ_{Sy} disminuirá la tasa de inflación si se cumple que $u_y(i-\bar{\omega})+\xi_1+2\ \theta_y^*\ \sigma_y^2\ \bar{\omega}<0$. Al respecto, autores como Tytell y Wei (2004) y Spiegel (2008) encuentran que existen una relación inversa entre la volatilidad de los mercados financieros y la tasa de inflación. Es importante notar que en este trabajo se ha supuesto una economía donde existe un solo derivado contingente. Sin embargo, ante un aumento en el número de derivados disponibles en la economía, el impacto reflejado en (19.4) será mayor. Lo anterior se puede ver en el siguiente ejemplo: supóngase que existe un número N de derivados contingentes en la economía, que hasta ahora se ha supuesto con probabilidad uno igual a uno, de tal forma que la volatilidad del derivado contingente provocada por choques reales sea $\sigma_{Sy}=\sum_{n=1}^{N}\sigma_{Sy}^n$, entonces un aumento en el número de derivados disponibles amentará σ_{Sy}, con su respectivo efecto en (19.4).

4. Valuación de derivados de equilibrio

En esta sección se obtendrá el precio de equilibrio de un derivado contingente de precio: $S(t,X(t))$, cuyo proceso estocástico es como el descrito en (6), el cual está suscrito sobre un activo riesgoso de precio, $X(t)$, y su proceso estocástico es:

$$\mathrm{d}X\left(t\right)=X\left(t\right)\left[u_X\mathrm{d}t+\sigma_{Xy}\mathrm{d}W_y\left(t\right)+\sigma_{XM}\mathrm{d}W_M\left(t\right)\right] \qquad (20)$$

Para lo cual, en el problema (8) y (9) suponemos que el individuo representativo tiene acceso tanto al activo riesgo como al derivado. La proporción de la riqueza que se destina a los activos riesgosos se define como θ_x y la proporción de la riqueza destinada al derivados sigue siendo θ_s.

Bajo este nuevo planteamiento, y tal como en la prueba de la proposición 1, se obtienen θ_x^* y θ_s^*. Si aplicamos ahora la condición de equilibrio (11.2) se tiene que:

$$\frac{u_X-i}{\rho\sigma_{XM}+\sigma_{Xy}}=\frac{u_S-i}{\rho\sigma_{SM}+\sigma_{Sy}} \qquad (21)$$

El resultado obtenido en (21) implica que tanto los activos riesgosos como los derivados comparten la misma prima al riesgo. A partir de este resultado, la aplicación del de lema de Itô a $S(t, X(t))$ y al manipular algebraicamente se obtiene lo siguiente:

PROPOSICIÓN 3. *Dada una condición de frontera final (por ejemplo, una opción europea de compra):* $S(t, X(t)) = \max(X(t) - K, 0)$ *donde* K *es el precio de ejercicio,* t *la fecha de inicio del contrato y* T *la fecha de vencimiento. El precio de equilibrio de una opción europea de compra cuando la condición final es el valor intrínseco del instrumento es:*

$$S(X(t), t, K, T, i) = X(t)\,\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\,e^{-i(T-t)} \tag{22}$$

donde

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}{}^{2}} \mathrm{d} = 1 - \Phi(-d)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{X}{K}\right) + \left(i + \frac{1}{2}\left(\sigma_{Xy}^2 + 2\sigma_{Xy}\sigma_{XM}\rho + \sigma_{XM}^2\right)\right)(T-t)}{\sqrt{\left(\sigma_{Xy}^2 + 2\sigma_{Xy}\sigma_{XM}\rho + \sigma_{XM}^2\right)}\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\left(\sigma_{Xy}^2 + 2\sigma_{Xy}\sigma_{XM}\rho + \sigma_{XM}^2\right)}\sqrt{T-t}$$

Este resultado es similar al encontrado por Lioui y Poncet (2005) cuando el parámetro $\rho = 0$, salvo por que en ese artículo se utiliza una medida martingala equivalente para obtener la solución. Otros productos derivados, como *forwards*, bonos llamables, etc., pueden también valuarse, basta cambiar la condición de frontera. Así mismo, lo anterior complementa el resultado expuesto en Venegas (2008), en cuanto a que el resultado se cumple tanto en un modelo de equilibrio parcial como en uno de equilibrio general. Una diferencia importante respecto de lo encontrado en Venegas (2008) es que, en esta investigación, las volatilidades del activo subyacente separan el efecto de las variables que afectan la economía.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un modelo estocástico de equilibrio general de una economía monetaria, el cual ha sido utilizado para analizar el impacto del incremento en el uso de derivados sobre los objetivos establecidos en los criterios de política monetaria. Uno de los resultados principales fue la obtención de una solución analítica para la tasa de inflación de equilibrio, como función de los parámetros de tendencia y volatilidad de derivados. El resultado sustenta, dentro de un marco de equilibrio general, la hipótesis de que en mercados financieros donde el incremento en el uso de derivados es marginal, el efecto sobre el nivel de precios es poco significativo, mientras que, en mercados financieros en desarrollo, el efecto es mayor.

De manera particular, se ha encontrado que tanto la tendencia como la volatilidad del mercado de instrumentos derivados afecta a la tasa de inflación. Al respecto se encontró también que, bajo ciertas condiciones, un cambio en la tendencia y/o volatilidad de los mercados financieros tiene un efecto benéfico para los objetivos de política monetaria de los bancos centrales. Los resultados sustentan lo propuesto por Semmler y Zhang (2007), en cuanto a que las acciones de política monetaria no deben ignorar el comportamiento de los activos financieros. Por último, con base en las condiciones de equilibrio general, se obtuvo una ecuación diferencial que satisface el precio de un derivado suscrito sobre un activo riesgoso.

Referencias

Bakshi, G.S. y Z. Chen. 1996. Inflation, Asset Prices, and the Term Structure of Interest Rate in Monetary Economies, *The Review of Financial Studies*, 9(1): 241-275.

Bank for International Settlements. 1994. *Macroeconomic and Monetary Policy Issues Raised by the Growth of Derivatives Markets (Hannoun Report)*, Suiza, CGFS Publications, núm. 4, November.

Beltratti, A. y C. Morana. 2006. Breaks and Persistency: Macroeconomic Causes of Stock Market Volatility, *Journal of Econometrics*, 131(1-2): 151-177.

Black, F. y M. Scholes. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy*, 81(3): 637-654.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross. 1985. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, *Econometrica*, 53(2): 363-384.

Fender, I. 2000a. Corporative Heding: The Impact of Financial Derivatives on the Broad Credit Chanel of Monetary Policy, BIS Working Paper, núm. 94.

——. 2000b. The Impact of Corporate Risk Management on Monetary Policy Transmission: Some Empirical Evidence, BIS Working Paper, núm. 95.

Gomez, E., D. Vasquez y C. Zea. 2005. Derivative Markets Impact on Colombian Monetary Policy, *Borradores de Economía*, Banco de la República, Colombia.

Hunter, W.C. y S.D. Smith. 2002. Risk Management in the Global Economy: A Review Essay, *Journal of Banking and Finance*, 26(2): 205-221.

Karatzas, I., J.P. Lehoczky, S. Shreves y G.L. Xu. 1991. Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(3): 702-730.

Lioui, A. y P. Poncet. 2004. General equilibrium real and nominal interest rate, *Journal of Banking and Finance*, 28(7): 1569-1595.

——. 2005. General Equilibrium Pricing of CPI Derivatives, *Journal of Banking and Finance*, 29(5): 1265-1294.

Mies, V., F. Morandé y M. Tapia. 2002. Política monetaria y mecanismos de transmisión: nuevos elementos para una vieja discusión, Banco Central de Chile, Working Papers, núm. 181.

Morales, A. 2001. Monetary Implications of Cross-Border Derivatives for Emerging Economies, IMF Working Papers, núm. 01/58.

Savona, P., A. Maccario y C. Oldani. 2002. On Monetary Analysis of Derivatives, *Open Economies Review*, Special Issue, 11(1): 149-176.

Semmler, W. y W. Zhang. 2007. Asset Price Volatility and Monetary Policy Rules: A Dynamic Model and Empirical Evidence, *Economic Modelling*, 24(3): 411-430.

Sidrauski, M. 1967. Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy, *American Economic Review*, 57(2): 534544.

Spiegel, M. 2008. Financial Globalization and Monetary Policy Discipline, Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Paper Series, núm. 2008-10.

Tytell, I. y S. Wei. 2004. Does Financial Globalization Induce Better Macroeconomic Policies, IMF Working Papers, núm. 04/84.

Upper, C. 2006. Derivatives Activity and Monetary Policy, *BIS Quarterly Review*, September: 65-76.

Venegas-Martínez, F. 2006. Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks, *Economic Modelling*, 23(1): 157-173.

——. 2008. *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, 2a. ed., México, Cengage Learning (antes Thomson Learning).

——. 2009. Un modelo estocástico de equilibrio macroeconómico: acumulación de capital, inflación y política fiscal, *Investigación Económica*, 68(268): 69-114.

Vickery, J. 2008. How and Why do Small Firms Manage Interest Rate Risk? *Journal of Financial Economics*, 87(1): 446470.

Vrolijk, C. 1997. Derivatives Effect on Monetary Policy Transmission, IMF Working Papers, núm. 97/121.

Wagner, H. y W. Berger. 2005. Globalization, Financial Volatility and Monetary Policy, *Empirica*, 31(2-3): 163-184.

Apéndice A1

En este apéndice se determina la ecuación diferencial estocástica de acumulación de la riqueza real del individuo. Para ello, se supone que su riqueza en términos reales, $a(t)$, está dada por:

$$a\left(t\right) = \frac{y(t)}{P(t)} + s\left(t\right) + m\left(t\right) + b\left(t\right) - c\left(t\right) \tag{A1.1}$$

donde $y(t)/P(t)$ es la ganancia por la inversión en el activo físico, con el índice general de precios como numerario, $s\left(t\right) = S(t)/P(t)$ y $b\left(t\right) = B(t)/P(t)$ son los precios reales del derivado contingente y el bono y $m\left(t\right) = M(t)/P(t)$ es la demanda de saldos reales. Así mismo, la evolución de la acumulación de la riqueza real es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a(t) = a(t)\big[&\theta_y \mathrm{d}R_y + \theta_s \mathrm{d}R_s + \theta_m \mathrm{d}R_m \\ &+(1-\theta_y-\theta_s-\theta_m)\mathrm{d}R_b\big] - c(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{A1.2}$$

donde $\theta_j = j/a(t)$ es la proporción de la riqueza real destinada al activo j, $j = y\left(t\right), m\left(t\right), s\left(t\right)$. Se ha denotado a $\mathrm{d}R_S$ como la tasa de rendimiento real sobre el activo $S(t)$, para lo cual se ha aplicado el lema de Itô de tal forma que:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R_S = \frac{\mathrm{d}(S(t)/P(t))}{S(t)/P(t)} &= (u_S - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PM}\sigma_{Py}\rho + \sigma_{Py}^2 \\ &-\sigma_{PM}\sigma_{Sy}\rho + \sigma_{Sy}\sigma_{Py} - \sigma_{PM}\sigma_{SM} + \sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho)\mathrm{d}t \\ &+(\sigma_{Sy} - \sigma_{Py})\mathrm{d}W_y + (\sigma_{PM} + \sigma_{SM})\mathrm{d}W_M \end{aligned} \tag{A1.3}$$

De igual forma, el rendimiento estocástico por la tenencia de saldos reales, $\mathrm{d}R_m$, se obtiene de la aplicación del lema de Itô al cambio porcentual del inverso del nivel de precios:

$$\mathrm{d}R_m = \frac{\mathrm{d}\left(M(t)/P(t)\right)}{M(t)/P(t)} = (u_m - \pi + \sigma_{PM}^2 + \sigma_{Py}^2 \tag{A1.4}$$

$$-2\sigma_{PM}\sigma_{Py}\rho+\sigma_{Py}^2)\mathrm{d}t+\sigma_{Py}\mathrm{d}W_y-\sigma_{PM}\mathrm{d}W_M$$

$$\mathrm{d}R_y=\frac{\mathrm{d}\left(y(t)/P(t)\right)}{y(t)/P(t)}=\big(u_y-\pi+\sigma_{PM}^2 \qquad (A1.5)$$

$$-2\sigma_{PM}\sigma_{Py}\ \rho+\sigma_{Py}^2+\sigma_{Py}\sigma_y-\sigma_{PM}\ \sigma_y\rho\big)\mathrm{d}t$$

$$+\left(\sigma_{Py}+\sigma_y\right)dW_y-\sigma_{PM}dW_M$$

y

$$\mathrm{d}R_b=\frac{\mathrm{d}\left(B(t)/P(t)\right)}{B(t)/P(t)}=i-\pi+\sigma_{PM}^2-2\sigma_{PM}\sigma_{Py}\rho+\sigma_{Py}^2 \qquad (A1.6)$$

Después de sustituir (A1.3) - (A1.6) en (A1.2) y al reagrupar términos se obtiene (9).

Apéndice 2

Prueba de la PROPOSICIÓN 1

Con el propósito de caracterizar la solución óptima del problema expuesto en (8) y (10), es conveniente definir a la función de utilidad indirecta al tiempo t:

$$J(t,a(t),P(t)) = \max_{c(t),\theta_y,\theta_s,\theta_m} \mathrm{E}\Bigg[\int_0^\infty e^{-\delta s}\big[\varphi \ln \mathrm{c}(s) + (1-\varphi)\ln m(s)\big]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_0\Bigg] \qquad (A2.1)$$

La expresión (A2.1) conduce a la siguiente relación de recursividad temporal sobre la funcional $J(t,a,P)$:

$$J(t,a(t),P(t)) = \max_{c(t),\theta_y,\theta_s,\theta_m} \mathrm{E}\Bigg\{\int_t^{t+\mathrm{d}t} e^{-\delta s}\big[\varphi \ln \mathrm{c(s)} + (1-\varphi)\ln m(s)\big]\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^\infty e^{-\delta s}\big[\varphi \ln \mathrm{c(s)} + (1-\varphi)\ln m(s)\big]\mathrm{d}s|\mathcal{F}_0\Bigg\} \qquad (A2.2)$$

Así mismo,

$$J(t,a(t),P(t)) = \max_{c(t),\theta_y,\theta_s,\theta_m} \mathrm{E}\Bigg\{\int_t^{t+\mathrm{d}t} e^{-\delta s}\big[\varphi \ln \mathrm{c(s)} + (1-\varphi)\ln m(s)\big]\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^\infty J(t+\mathrm{d}t, a+\mathrm{d}a, P+\mathrm{d}P)\mathrm{d}s|\mathcal{F}_0\Bigg\} \qquad (A2.3)$$

Si en esta ultima expresión se aplica el teorema del valor medio para integrales en el primer término y se expande en serie de Taylor el segundo término se obtiene:

$$J(t,a(t),P(t)) = \max_{c(t),\theta_y,\theta_s,\theta_m} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} e^{-\delta s}\left[\varphi \ln \mathrm{c(s)} \right.\right. \tag{A2.4}$$

$$\left.\left. +(1-\varphi)\ln m(s)\right]\mathrm{d}s + o(dt) + J(t,a,P) + dJ(t,a,P)|\mathcal{F}_0 \right\}$$

De manera equivalente:

$$J(t,a(t),P(t)) = \max_{c(t),\theta_y,\theta_s,\theta_m} \mathrm{E}\left\{ e^{-\delta t}\left[\varphi \ln \mathrm{c(t)} \right.\right. \tag{A2.5}$$

$$\left.\left. +(1-\varphi)\ln m(t)\right] + o(dt) + \mathrm{d}J(t,a,P)|\mathcal{F}_0 \right\}$$

Si se aplica el lema de Itô a $J(t,a,P)$, la ecuación anterior se puede escribir:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{c,\theta_y,\theta_s,\theta_m} \mathrm{E}\Big\{ & e^{-\delta t}\left[\varphi \ln \mathrm{c(t)} + (1-\varphi)\ln m(t)\right] + o(\mathrm{d}t) \\ & + \big[J_t + J_a u_a a + J_P \pi P + J_{aa} a^2\left(a^2\sigma_{ay}^2 + 2\sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho + \sigma_{aM}^2\right) \\ & + \tfrac{1}{2} J_{PP} P^2\left(\sigma_{PM}^2 + \sigma_{Py}^2 - 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho\right) \\ & + J_{aP} a P\left(\sigma_{ay}\sigma_{PM}\rho - \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho + \sigma_{PM}\sigma_{aM} - \sigma_{Py}\sigma_{ay}\right)\big]\mathrm{d}t \\ & + \left(J_a\sigma_{ay}a - J_P\sigma_{Py}P\right)\mathrm{d}W_y + \left(J_a\sigma_{aM}a + J_P\sigma_{PM}P\right)\mathrm{d}W_M|\mathcal{F}_0 \Big\}. \end{aligned} \tag{A2.6}$$

Si ahora se divide la expresión anterior entre dt, se usa la propiedad de que $o\,(\mathrm{d}t)\,/\mathrm{d}t \to 0$ cuando $\mathrm{d}t \to 0$ y se toma valor esperado de los dos lados de la expresión, se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c,\theta_y,\theta_s,\theta_m} \mathrm{E}\Big\{ & e^{-\delta t}\big[\varphi \ln \mathrm{c(t)} + \big(1-\varphi\big)\ln m(t)\big] \qquad (A2.7)\\
& + \Big[J_t \; + J_a u_a a + J_P \pi P + \tfrac{1}{2} J_{aa} a^2 \left(\sigma_{ay}^2 + 2\sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho + \sigma_{aM}^2\right)\\
& + \tfrac{1}{2} J_{PP} P^2 \left(\sigma_{PM}^2 + \sigma_{Py}^2 - 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho\right)\\
& + J_{aP} a P\big(\sigma_{ay}\sigma_{PM}\rho - \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho + \sigma_{PM}\sigma_{aM} - \sigma_{Py}\sigma_{ay}\big)\Big]\Big\},
\end{aligned}
$$

donde J_i es la derivada parcial de $J(t, a, P)$ con respecto del argumento i.

La (A2.7) es una ecuación diferencial parcial en $J(t, a(t),\, P(t))$. Para encontrar su solución se propone un candidato en variables separables:

$$
J\left(t, a(t), P(t)\right) = F\left(a\left(t\right), P\left(t\right)\right) e^{-\delta t} \qquad (A2.8)
$$

Si se sustituye (A2.8) en la ecuación (A2.7) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c,\theta_y,\theta_s,\theta_m} \Big\{ & \varphi \ln \mathrm{c}\big(\mathrm{t}\big) + \big(1-\varphi\big)\ln m\big(t\big) - \delta F\big(a(t), P(t)\big) \qquad (A2.9)\\
& + F_a u_a a(t) F_P \pi(t) P(t) + \frac{1}{2} F_{aa} a\big(t\big)^2 \big(\sigma_{aY}^2 + 2\sigma_{aY}\sigma_{aM}\rho + \sigma_{aM}^2\big)\\
& + \frac{1}{2} F_{PP} P(t)^2 \big(\sigma_{PM}^2 + \sigma_{PY}^2 - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho\big)\\
& + F_{aP} a(t) P(t) \Big[\left(\sigma_{aY}\sigma_{PM} - \sigma_{PY}\sigma_{aM}\right)\rho + \sigma_{PM}\sigma_{aM} - \sigma_{PY}\sigma_{aY}\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

Se propone ahora la siguiente forma funcional para $F(a(t), P(t))$

$$
F\left(a(t), P(t)\right) = \gamma_0 + \gamma_1 \left[\ln a(t) + \ln P(t)\right] + H\left(P(t)\right) \qquad (A2.10)
$$

Si ahora se sustituye la expresión (A2.10) en (A2.9) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c,\theta_y,\theta_s,\theta_m} \Bigg\{ & \varphi \ln \mathrm{c}\,(\mathrm{t}) + (1-\varphi) \ln m\,(t) \qquad (A2.11) \\
& -\delta \Bigg[\gamma_0 + \gamma_1 \left[\ln a(t) + \ln P(t) \right] + H\left(P(t)\right) \Bigg] + \gamma_1 u_a \\
& + \left(\frac{\gamma_1}{P\,(t)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P\,(t)} H\left(P\,(t)\right) \right) (t)\, P\,(t) \\
& - \frac{1}{2} \gamma_1 \big(\sigma_{aY}^2 + 2\sigma_{aY}\sigma_{aM}\rho + \sigma_{aM}^2 \big) \\
+ \frac{1}{2} P(t)^2 & \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}P^2} H\left(P\,(t)\right) - \frac{\gamma_1}{P^2\,(t)} \right) \big(\sigma_{PM}^2 + \sigma_{PY}^2 - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho \big) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Con el fin de determinar $H(P(t))$ a partir de la ecuación (A2.11) se resuelve la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$
\begin{aligned}
0 = & -\delta \left[\gamma_1 \ln P(t) + H(P(t)) \right] \qquad (A2.12) \\
& + \left(\frac{\gamma_1}{P\,(t)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P} H\left(P\,(t)\right) \right) \pi\,(t)\, P\,(t)) \\
+ \frac{1}{2} P(t)^2 & \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}P(t)^2} H\left(P(t)\right) - \frac{\gamma_1}{P(t)^2} \right) \big(\sigma_{PM}^2 + \sigma_{PY}^2 - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho \big)
\end{aligned}
$$

Se puede demostrar que la función $H(P(t))$ (por sustitución directa) que resuelve (A2.12) está dada por:

$$
\begin{aligned}
H\left(P(t)\right) = & P(t)^{\left\{ \frac{1}{2\eta_1} \left[\eta_1 - 2\pi + \sqrt{\eta_2} \right] \right\}} \gamma_2 \qquad (A2.13) \\
& + P(t)^{\left\{ \frac{1}{2\eta_1} \left[\eta_1 - 2\pi - \sqrt{\eta_2} \right] \right\}} \gamma_3 - \gamma_1 \ln P\,(t)
\end{aligned}
$$

donde

$$\eta_1 = \sigma^2_{PM} + \sigma^2_{PY} - 2\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho$$

y

$$\eta_2 = \sigma^4_{PM} - 4\sigma^3_{PM}\sigma_{PY}\rho + \left[\left(2+4\rho^2\right)\sigma^2_{PY} - 4\pi(t) + 8\delta\right]\sigma^2_{PM}$$

$$+8\sigma_{PY}\sigma_{PM}\rho\left(\pi(t) - 2\delta - \frac{1}{2}\sigma^2_{PY}\right) + \sigma^4_{PY} + \sigma^2_{PY}\left(8\delta - 4\pi\left(t\right)\right) + 4\pi(t)^2$$

En la ecuación (A2.13) γ_1 es un coeficiente que será determinado más adelante. Por su parte, γ_2 y γ_3 son coeficientes que se determinan de tal manera que $H(P(0)) = 0$ y $H'(P(0)) = 0$. A continuación veremos que la dependencia de estos coeficientes se elimina. Si se sustituye la función $H(p(t))$ dada en (A2.13), así como los valores de u_a, σ_{ay} y σ_{aM} en (A2.11), se obtiene:

$$\psi \equiv \max_{c,\theta_y,\theta_s,\theta_m}\left\{\varphi\ln c\left(t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln m\left(t\right) + \gamma_1\left\{i\theta_b - \frac{c\left(t\right)}{a\left(t\right)}\right.\right. \quad (A2.14)$$

$$-\ \delta\ln a\left(t\right) - \pi\left(t\right) - \frac{1}{2}\theta^2_s\left(\sigma^2_{SM} + 2\sigma_{Sy}\sigma_{SM}\rho + \sigma^2_{Sy}\right)$$

$$+\ \theta_s\left[u_s - \theta_y\sigma_y\left(\sigma_{Sy} + \sigma_{SM}\rho\right)\right] + \ \frac{1}{2}\left(\sigma^2_{PM} + {\theta_y}^2\sigma^2_y + \sigma^2_{Py}\right)$$

$$\left.\left. -\ \sigma_{PM}\sigma_{Py}\rho + \theta_y u_y\right\} - \gamma_0\delta\right\} = 0$$

Ahora se determinarán las condiciones necesarias y suficientes para la maximización de (A2.14), de tal manera que dichas condiciones sean funciones de: c_t, θ_y, θ_s y θ_m, de la siguiente forma:

$$\psi_c = \frac{\varphi a(t) - \gamma_1 c(t)}{c\left(t\right)a(t)} \leq 0 \qquad (A2.15.1)$$

$$\psi_c c(t) = 0 \qquad (A2.15.2)$$

$$\psi_{\theta_y} = \gamma_1 \left\{ u_y - i - \theta_y {\sigma_Y}^2 - \theta_s \sigma_Y \left(\sigma_{SM} \rho + \sigma_{SY} \right) \right\} \leq 0 \qquad (A2.15.3)$$

$$\psi_{\theta_y} \theta_y = 0 \qquad (A2.15.4)$$

$$\psi_{\theta_m} = \frac{1-\varphi}{\theta_m} - \gamma_1 i \leq 0 \qquad (A2.15.5)$$

$$\psi_{\theta_m} \theta_m = 0 \qquad (A2.15.6)$$

$$\psi_{\theta_s} = \gamma_1 \Bigg\{ u_S - i \left(\sigma_{SM}^2 + 2\sigma_{Sy}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{Sy}^2 \right) \theta_s \qquad (A2.15.7)$$
$$- \left(\sigma_{Sy} + \sigma_{SM}\rho \right) \sigma_y \theta_Y \Bigg\} \leq 0$$

$$\psi_{\theta_s} \theta_s = 0 \qquad (A2.15.8)$$

A partir de (A2.15.1) a (A2.15.8) se obtienen los resultados descritos de (12) a (16).

Los valores de γ_1 y γ_0 se obtienen como sigue: el consumo óptimo es: $c^*(t) = \varphi a(t)/\gamma_1$. Este resultado, junto con los valores óptimos θ_y^*, θ_s^* y θ_m^* y a partir del hecho de que $m\,(t) = a_t \theta_m^*$ conduce a:

$$\varphi \ln\left(\varphi a/\beta_1\right) + (1-\varphi) \ln\left(a_t \theta_m^*\right) - \delta\gamma_1 \ln a(t) - \varphi - \beta_0 \delta \qquad (A2.16)$$
$$+ \frac{\gamma_1}{2} \Bigg\{ -2i\theta_b^* - (\sigma_{SM}^2 + 2\sigma_{Sy}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SY}^2)\theta_s^{*2}$$
$$+ 2\theta_s^* \big[u_S - \theta_y^* (\sigma_y \sigma_{Sy} + \sigma_y \sigma_{SM} \rho) \big] - \theta_y^{*2} \sigma_y^2 - 2\pi$$
$$+ \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PM}\sigma_{Py}\rho + \sigma_{Py}^2 + 2\theta_y^* u_y \Bigg\} = 0$$

Si ahora se elimina la dependencia en $a(t)$ en (A2.16), se obtiene que $\gamma_1 = \frac{1}{\delta}$. Al sustituir γ_1 en (A2.16) y resolver para γ_0 se obtiene:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\delta}\Bigg\{\varphi \ln(\varphi\delta) + \ln(a_t\theta_m^*)(1-\varphi) + \frac{1}{2\delta} \qquad (A2.17)$$

$$\Bigg\{-2i\theta_b^* - \left(\sigma_{SM}^2 + 2\sigma_{Sy}\sigma_{SM}\rho + \sigma_{SY}^2\right)\theta_s^{*\,2}$$

$$+2\theta_s^*\left[u_S - \theta_y^*(\sigma_y\sigma_{Sy} + \sigma_y\sigma_{SM}\rho)\right] - \theta_y^{*2}\sigma_y^2$$

$$-2\pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{PM}\sigma_{Py}\rho + \sigma_{Py}^2 + 2\theta_y^* u_y\Bigg\} - \varphi\Bigg\}$$

Apéndice 3

Prueba de la PROPOSICIÓN 2

Al utilizar la condición de equilibrio (11.3) y resolver para el nivel de precios tenemos:

$$P\left(t\right)=\frac{M\left(t\right)}{a\left(t\right)\theta_{m}} \qquad (A3.1)$$

Si se aplica el lema de Itô a (A3.1) de tal forma que:

$$\mathrm{d}P(t)=\mathrm{d}\left(\frac{M}{a}\right)\frac{1}{\theta_{m}} \qquad (A3.2)$$

Se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}\left(M/a\right)}{M/a}=\big(u_{m}-u_{a}+\sigma_{ay}^{2}+2\sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho+\sigma_{aM}^{2}-\sigma_{ay}\sigma_{M}\rho \qquad (A3.3)$$

$$-\sigma_{aM}\sigma_{M}\big)\mathrm{d}t+\left(\sigma_{M}-\sigma_{aM}\right)\mathrm{d}W_{M}-\sigma_{ay}\mathrm{d}W_{y}$$

A partir de la definición en (4) el proceso descrito para la tasa de inflación, con el empleo de las condiciones de equilibrio (11.1) y (11.2), se tiene que la tasa de inflación está compuesta por su inflación media esperada (tendencia):

$$\pi(t)=\big(u_{m}-u_{a}+\sigma_{ay}^{2}-2\sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho+\sigma_{aM}^{2} \qquad (A3.4.1)$$

$$-\sigma_{ay}\sigma_{M}\rho-\sigma_{aM}\sigma_{M}\big)\frac{1}{\theta_{m}^{*}}$$

así como sus respectivas volatilidades:

$$\sigma_{PM} = \frac{\sigma_M - \sigma_{aM}}{\theta_m^*} \qquad (A3.4.2)$$

y

$$\sigma_{Py} = \frac{\sigma_{ay}}{\theta_m^*} \qquad (A3.4.3)$$

De igual forma, el crecimiento medio esperado de la riqueza real satisface:

$$u_a = i - \pi + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho + \sigma_{Py}^2 \qquad (A3.5.1)$$

$$+ \theta_y^* \left(u_y - \sigma_y \sigma_{PM}\rho + \sigma_y \sigma_{Py} - i\right)) - \theta_m^* i - (c^*/a)$$

Las volatilidades de la riqueza real son:

$$\sigma_{aM} = -\sigma_{PM} \qquad (A3.5.2)$$

y

$$\sigma_{ay} = \sigma_{Py} + \theta_y^* \sigma_y \qquad (A3.5.3)$$

Se resuelve el sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, $\pi(t), u_a, \sigma_{PM}, \sigma_{Py}, \sigma_{aM}$ y σ_{ay}, de tal forma que se obtiene (19).

Apéndice 4

Prueba de la PROPOSICIÓN 3

Se aplica el lema de Itô a $S(t, X(t))$ y se obtiene:

$$\mathrm{d}S(t,X) = \left[\frac{\partial S(t,X)}{\partial t} + \frac{\partial S(t,X)}{\partial X} u_X X \right. \tag{A4.1}$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(t,X)}{\partial X^2} X^2 \left(\sigma_{Xy}^2 + 2\sigma_{Xy}\sigma_{XM}\rho + \sigma_{XM}^2\right)\right] dt$$

$$+ \frac{\partial S(t,X)}{\partial X} X \sigma_{Xy} dW_y + \frac{\partial S(t,X)}{\partial X} X \sigma_{XM} dW_M$$

Igual que en Venegas-Martínez (2008) se define ahora:

$$u_S = \frac{1}{S(t,X)} \left[\frac{\partial S(t,X)}{\partial t} + \frac{\partial S(t,X)}{\partial X} u_X X \right. \tag{A4.2.1}$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(t,X)}{\partial X^2} X^2 \left(\sigma_{Xy}^2 + 2\sigma_{Xy}\sigma_{XM}\rho + \sigma_{XM}^2\right)\right]$$

$$\sigma_{Sy} = \frac{1}{S\left(t,X\right)} \frac{\partial S(t,X)}{\partial X} X \sigma_{Xy} \tag{A4.2.2}$$

y

$$\sigma_{SM} = \frac{1}{S\left(t,X\right)} \frac{\partial S(t,X)}{\partial X} X \sigma_{XM.} \tag{A4.2.3}$$

Al sustituir (A4.2) en (21) se obtiene:

$$\frac{\partial S(t,X)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,X)}{\partial X}iX \qquad (A4.3)$$
$$+\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 S(t,X)}{\partial X^2}X^2\left(\sigma_{Xy}^2+2\sigma_{Xy}\sigma_{XM}\rho+\sigma_{XM}^2\right)-iS=0$$

Se define ahora $\sqrt{\sigma_{Xy}^2+2\sigma_{Xy}\sigma_{XM}\rho+\sigma_{XM}^2}$ de tal forma que (A4.3) se convierte en:

$$\frac{\partial S(t,X)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,X)}{\partial X}iX+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S(t,X)}{\partial X^2}X^2\sigma_S^2-iS(t,X)=0 \quad (A4.4)$$

Como se puede apreciar, la expresión (A4.4) coincide con la ecuación diferencial parcial (de segundo orden y lineal) de Black-Scholes (1973), cuya solución es (22).