Revista Digital: Matemática, Educación e Internet
ISSN: 1659-0643
revistadigitalmatematica@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica

Arguedas, Vernor
La reina Dido de Cartago y el primer problema isoperimétrico conocido.
Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, vol. 13, núm. 2, marzo-agosto, 2013, pp. 1-5
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago, Costa Rica

Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 13, No 2. Marzo − Agosto 2014. ISSN 1659 -0643

Artículo de sección

La reina Dido de Cartago y el primer problema isoperimétrico conocido.

Vernor Arguedas
vernor.arguedas@ucr.ac.cr
Esscuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Resumen. Se presenta el problema original de la Reina Dido y se hace un recuento de los intentos de solución del problema isoperimétrico a lo largo de muchos siglos.

Palabras clave: La reina Dido, el problema isoperimétrico, cálculo de variaciones

Abstract. The Queen's Dido original problem is discussed. It is shown some of the solutions attemps to the isoperimetric problem through many centuries.

KeyWords: Queen Dido, the isoperimetric problem , calculus of variations

1.1 Introducción

El origen de las leyendas sobre Dido o Elisa hay que buscarlo en la migración fenicia y su establecimiento en el norte de África. Al morir Muto, rey de Tiro, el trono pasó a su hijo Pigmalión, hermano de Dido o Elisa, que se había casado con Sicarbas o Siqueo, tío suyo y sacerdote del templo del dios Melqart. Pigmalión deseaba los tesoros de este templo, por lo que decidió dar muerte a Siqueo. Dido tuvo tiempo de reunir a un grupo de tirios hostiles al rey y escapar con ellos, llevándose en las naves las riquezas de su esposo asesinado, e incluso las de su hermano. Estos acontecimientos ocurrieron probablemente alrededor del siglo XIII A.C.

Al llegar a Chipre, los compañeros de Dido secuestraron a ochenta jóvenes del templo de Afrodita, y las hicieron sus esposas. Abandonaron la isla y se dirigieron al norte de África. Fundaron la ciudad de Cartago, y Dido se hizo su reina. Sobre la fundación de Cartago, Virgilio cuenta un episodio que se relaciona con un cuento popular en la Eneida.

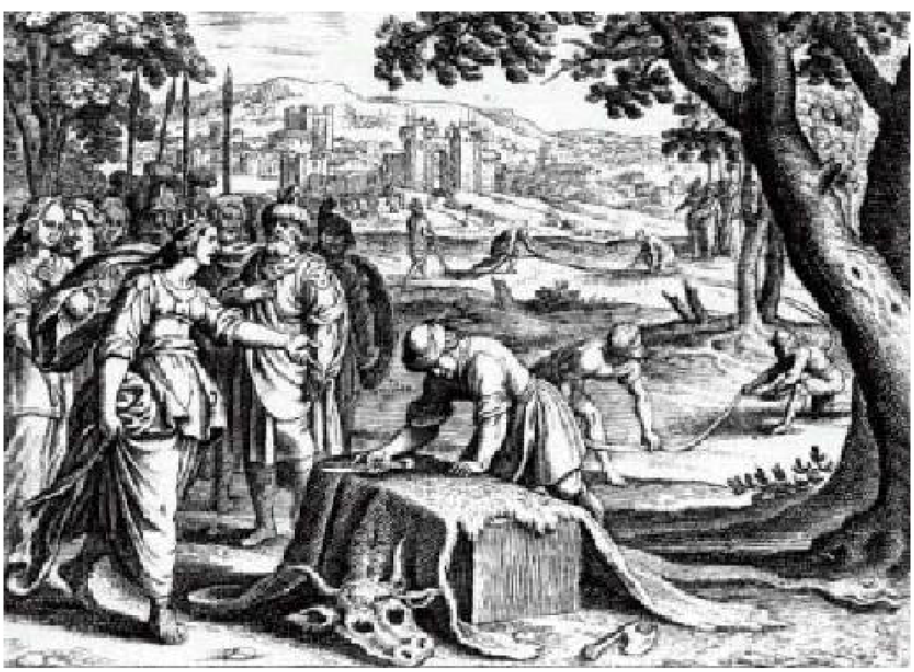
Elisa llegó a las costas de África, donde vivían los gétulos una tribu de libios cuyo rey era Jarbas. Pidió hospitalidad y un trozo de tierra para instalarse en ella con su séquito. Jarbas le expuso que le daría tanta tierra como ella pudiera abarcar con una piel de buey. Elisa, a fin de que la piel abarcara la máxima tierra posible, la hizo cortar finas tiras y así consiguió circunscribir un extenso perímetro. Tras esto hizo erigir una fortaleza llamada Birsa, que más tarde se convirtió en la ciudad de Cartago o Qart-Hadašh (que en fenicio significaba "Ciudad Nueva"), sobre un promontorio existente entre el lago de Túnez y la laguna Sebkah er-Riana, que desembocaba en mar abierto. Instaurada como soberana de la ciudadela, recibió de los habitantes el nombre de Dido. Dido es sin duda una mujer excepcional.

En las excavaciones arqueológicas se ve la forma semicircular de Cartago original, en La Eneida de Virgilio se lee el famoso texto:

> Se van por el mar
> las riquezas del avaro Pigmalión; una mujer dirige la empresa.
> Llegaron a estos lugares, donde ahora de enormes murallas
> y nace el alcázar de una joven Cartago,
> y compraron el suelo, que por esto llamaron Birsa,
> cuanto pudieron rodear con una piel de toro.

En la imagen siguiente se aprecia la forma de la ciudad originaria

En este grabado se aprecia el corte de la piel del toro en trazos muy angostos para hacer una especie de hilo de cuero



Dido dedujo correctamente que entre todas las figuras con un perímetro dado el círculo encerraba la mayor área, de esta manera aparece el primer problema isoperimétrico conocido. ¿Cómo sabía Dido la solución a este problema? Posiblemente de manera empírica, pues pasaron muchos siglos antes de tener una demostración plausible.

1.2 Problema Isoperimétrico

Isoperimétrico significa con el mismo perímetro. Desde el punto de vista matemático, encontramos en los Elementos de Euclides (alrededor del 300 AC) la demostración que entre todos los rectángulos del mismo perímetro el que encierra la mayor área es el cuadrado. También, varios autores desde la antigüedad especularon sobre las propiedades optimales de los paneles de abeja. En dos dimensiones, Carl F. Gauss demostró que la manera de disponer círculos idénticos de modo que tengan la mayor densidad corresponde a un ordenamiento hexagonal, en el cual los círculos son tangentes entre sí, y sus centros se ubican en los vértices de una red hexagonal (panal de abejas).

Hay matemáticos griegos de la antigüedad que se ocuparon de estos problemas de la isoperimetría citemos algunos de ellos:

Zenodoro quien vivió entre el 200 ac y el 400 ac en Atenas, se refirió al tema en un ensayo, ahora perdido: Sobre las figuras isoperimétricas, Ptolomeo (cerca 90DC, 168 DC) cita este trabajo, esto lo conocemos por Theon deAlejandría (c. 335DC- 405 DC), quien escribió un comentario sobre el trabajo de Ptolomeo, en el cual se hace referencia a Zenodoro. Theon es el padre de Hipatia a quien analicé brevemente en el artículo: "Seis mujeres matemáticas del siglo V AC al siglo XVIII"

http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/HistoriaMatematica/HistoriaMv3n1002/pag1.htm

De Zenodoro podemos rescatar algunos resultados muy interesantes, que se pueden resolver con geometría elemental:

1. Dados dos polígonos regulares con el mismo perímetro, el que tiene más ángulos tiene el área mayor.

2. El círculo tiene un área mayor que cualquier polígono regular con el mismo perímetro.

3. Entre los polígonos con el mismo número de lados e igual perímetro el polígono regular tiene el área mayor.

4. Dados dos triángulos con la misma base y el mismo perímetro, el triángulo isósceles tiene el área mayor.

Al-Kindi, un matemático árabe, escribió en el siglo IX un tratado: "De figuras isoperimétricas y de isopifanías, es decir de sólidos de superficie lateral igual."

Existe también un tratado perdido de Al-Hasan ibn al Haytham (965DC- 1039 DC).

Abu Ja'far al-Khazin, comentando sobre el Almagesto de Ptolomeo en el siglo X, el cual generalizó los trabajos anteriores.

Johannes de Sacrobosco (Johann of Holywood, c. 1195DC- 1256 DC), un académico y astrónomo inglés, escribió el Tractatus de Sphaera.

Un comentario sobre este trabajo de Sacrobosco, relacionado especialmente con la isoperimetría, se puede encontrar en la monografía "Dos nuevas ciencias" de Galileo Galilei publicado en 1638 por Luis Elzevir, última obra del Maestro publicada, en la que resume su pensamiento científico. Para algunos estudiosos de Galileo es su trabajo más importante.

> El círculo es media proporcional entre dos polígonos regulares cualesquiera, semejantes entre sí, uno de los cuales le esté circunscrito y el otro le sea isoperímetro. Además, siendo (el área del círculo) menor que todos los circunscritos, aquellos que tienen más ángulos son menores que los que tienen menos , inversamente, de todos los isoperímetros, los que tienen más ángulos son los mayores.

Observemos que el problema de la isoperimetría es un problema de máximos y mínimos que requiere para su planteamiento y solución un lenguaje más sofisticado y preciso, ahora es el capítulo primero de lo que llamamos Cálculo de Variaciones.

Con la aparición del cálculo integral y diferencial surgen intentos demostrar formalmente el problema así tenemos nombres muy conocidos:

Los hermanos Bernoulli Jakob y Johann se disputaban la solución acusándose de que el otro estaba equivocado. ¡ Ah el amor fraterno!, ambos hicieron aportes importantes., una referencia a esta ilustrísima familia se encuentra en mi artículo http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/HistoriaMatematica/HistoriaV4n3/LosBernoulli.htm.

En el siglo XIX el geómetra suizo Jakob Steiner (1796-1863) da una supuesta solución completa al problema de Dido, de hecho presenta cinco. Steiner murió convencido de que sus demostraciones eran correctas. Estaba equivocado.

Jakob Steiner atacó el problema isoperimétrico clásico usando herramientas geométricas directas, las cuales fueron muy sugerentes e instructivas, y condujeron a muchos desarrollos posteriores. Su error fundamental consistió en asumir la existencia de la solución al problema La conferencia del distinguido profesor Richard Tapia muestra en las páginas 20 – 22 el trabajo y errores de Steiner, al final de la página 22 indica un medio para lograr una demostración correcta.

http://www.caam.rice.edu/~rat/cv/tapia_euler.pdf

El profesor Luis Alías de la Universidad Murcia, España, tiene un trabajo muy interesante en que de manera explícita clarifica los problemas al asumir la existencia de soluciones, se puede leer en

http://edu.jccm.es/ies/4hellin/Matematicas/ProyectoForMate/ProyectoForMate0607/LuisJAlias2007.pdf

Alrededor del último tercio del siglo XIX , Karl Weierstrass se dio cuenta que podían presentarse problemas, con el método de Steiner al no contar siempre con funciones extremales. De hecho Weierstrass mantenía una polémica con Steiner, pues este no le daba mucho valor al análisis matemático ni a los analistas matemáticos. En 1879 en una de sus conferencias sobre cálculo de variaciones presenta una solución completa al problema de Dido. Al respecto Weierstrass manifiesta lo siguiente:

> Es conveniente una discusión detallada de este problema, dado que Steiner es de la opinión que los métodos del cálculo variacional no son suficientes para dar una demostración total del problema , pero el cálculo de variaciones si está en condiciones de ofrecer una demostración completa , como lo mostraré más adelante. Incluso presentaré la existencia de máximos cosa que no puede hacer Steiner

En 1902 Hurwitz discípulo de Weierstrass, da una solución muy sencilla usando series de Fouier.
En 1910 Caratheodory da una demostración completa del problema de Dido usando los métodos de Steiner usando una modificación de lo que llamamos procesos de simetrización de Steiner.

No podemos dejar de mencionar que Newton estudió por primera en los tiempos recientes un problema de esta naturaleza, de máximos y mínimos: Newton trató de determinar la forma más aerodinámica posible de una superficie de revolución es decir la que presente menor resistencia al movimiento.

Un problema elemental isoperimétrico es el siguiente: Demostrar que en la familia de todos los triángulos con el mismo perímetro el equilátero es el que tiene el área mayor.

En http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/download/497/243 se presenta una demostración rigurosa sin usar el cálculo de variaciones, se recurre a la fórmula de Heron y a la llamada desigualdad isoperimétrica. Sus autores son los matemáticos Carlos Escudero, Yuri Poveda y Edgar Valencia todos de la Universidad de Pereira, Colombia.

El distinguido matemático Srinivasan Kesavan en sus notas sobre Análisis de Fourier presenta la demostración clásica del problema isoperimétrico usando series de Fourier, en la liga.

http://www.math.iitb.ac.in/atm/afs106/kesavan.pdf

se puede leer la demostración.

Los nombres de casi todos los matemáticos y matemáticas distinguidos de los últimos 300 años están ligados a algún problema que se refiere a temas de máximos y mínimos, en ocasiones en contextos muy generales.

Esta mujer extraordinaria Dido abrió unas puertas que están muy lejos de cerrarse, iluminó con su luz el hermoso edificio de las matemáticas.

El cálculo de variaciones se ha desarrollado muchísimo y ha sido un factor importante en la evolución de la geometría diferencial moderna y múltiples tópicos en Análisis Funcional. Es una herramienta fundamental en matemática aplicada.

Bibliografía

[1] http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/HistoriaMatematica/HistoriaMv3n1002/pag1.htm

[2] http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/HistoriaMatematica/HistoriaV4n3/LosBernoulli.htm

[3] http://www.caam.rice.edu/~rat/cv/tapia_euler.pdf

[4] http://edu.jccm.es/ies/4hellin/Matematicas/ProyectoForMate/ProyectoForMate0607/LuisJAlias2007.pdf

[5] http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/download/497/243

[6] http://www.math.iitb.ac.in/atm/afs106/kesavan.pdf