Revista Digital: Matemática, Educación e Internet
ISSN: 1659-0643
revistadigitalmatematica@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica

J. Ugalde, William

Una propuesta para la enseñanza del teorema de la función inversa

Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, vol. 14, núm. 2, marzo-agosto, 2014, pp. 1-30
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago, Costa Rica

Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 14, No 2. Marzo — Agosto 2014. ISSN 1659 -0643

Una propuesta para la enseñanza del teorema de la función inversa

William J. Ugalde
william.ugalde@ucr.ac.cr
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

Recibido: Julio 26, 2013 Aceptado: Enero 16, 2014

Resumen. El objetivo es presentar el teorema de la función inversa y algunos de sus principales corolarios. Este teorema es central en el estudio del cálculo en varias variables, y tradicionalmente su presentación se hace de manera negligente en cursos que tienden a dar poco énfasis al análisis, lo cual puede no ser conveniente para estudiantes de las carreras de enseñanza de las matemáticas, matemática pura y aplicada, y carreras afines.

Palabras clave: Teorema de la función inversa, diferencial, teorema de la función implícita, puntos extremos en la frontera.

Abstract. The goal is to present the inverse function theorem and some of its main corollaries. This theorem is central in the study of calculus in several variables, and traditionally its presentation is neglected in courses that tend to focus little on analysis, which can be inconvenient for students majoring in mathematics teaching, pure and applied mathematics, and related careers.

KeyWords: Inverse function theorem, differential, implicit function theorem, extreme points on the boundary

1.1 Introducción

Para funciones $f : A \subseteq \mathbb{R} \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$ se sabe que f posee una función inversa $f^{-1} : f(A) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si y sólo si f es inyectiva. Una posibilidad para determinar si f es inyectiva en el caso real es a través de su monotonía. En el caso de funciones derivables, la monotonía queda determinada a partir de la derivada de la función. *Si* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es derivable en un punto* x_0 *en el conjunto abierto* [1] A *y* $f'(x_0) \neq 0$, *existe un vecindario abierto* $I \subseteq A$ *alrededor de* x_0 *tal que* f *es (localmente) invertible de* I *a* $f(I)$.

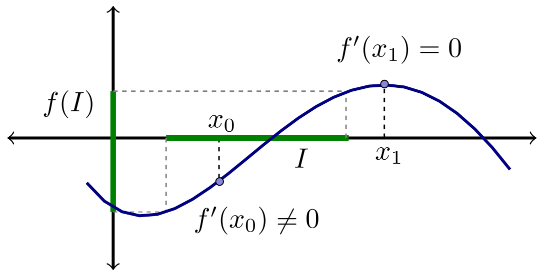

Figura 1.1: Funciones localmente invertibles.

Otro resultado del cálculo en una variable establece que *si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es diferenciable e inyectiva en un vecindario del punto* x_0 *para el cual* $f'(x_0) \neq 0$, *entonces* f^{-1} *es diferenciable en* $y_0 = f(x_0)$ *y*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Se desea en este trabajo extender al caso $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ estos resultados. El objetivo central es presentar una propuesta para la enseñanza del teorema de la función inversa en un primer cursos de cálculo en varias variables, para estudiantes de las carreras de enseñanza de las matemáticas, matemática pura y aplicada, y carreras afines.

Por la ubicación propia del material en el currículo de un estudiante de estas carreras, es necesario asumir algunos rudimentos del álgebra lineal, y algún conocimiento inicial de la topología métrica de $\mathbb{R}^n$.

En la sección 1.2 se describe geométricamente la diferencial de una función y se establecen los requisitos necesarios para el resto del documento. En particular, se demuestra el Lema 1.1 llamado lema de aproximación, necesario en la demostración de los principales resultados. En la sección 1.3 se demuestran el teorema de la función inyectiva y de la función sobreyectiva, pasos iniciales para concluir el teorema de la función inversa. En la sección 1.4 se presenta una de las aplicaciones del teorema de la función inversa, a saber, el estudio de los puntos críticos de una función en la frontera de una región. Posteriormente, en la sección 1.5 se presenta el teorema de la funcióm implícita en cuya demostración se utiliza la segunda versión del teorema de la función inversa. Dado que algunas de las demostraciones requieren estructuras más elaboradas de análisis, o bien requieren argumentos más extensos, las demostraciones de algunos resultados se posponen para la sección 1.6 para que el lector pueda estudiar el documento en forma lineal en una primera lectura. La bibliografía **??** contiene una breve lista de libros que el lector puede consultar para ahondar en estos temas. Para terminar, se presenta un anexo en la sección A con una lista de ejercicios la cual invita al lector a revisar su dominio de los resultados presentados en este documento. Algunos de estos ejercicios muestran aplicaciones del teorema de la función inversa a otras áreas del cálculo y el álgebra lineal.

[1] Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **abierto** si y sólo si para todo $x_0 \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < \varepsilon\} \subseteq A.$$

Intuitivamente, es posible trasladarse a partir del punto y en cualquier dirección, una corta distancia sin abandonar el conjunto.

Este trabajo es el resultado del minicurso "El Teorema de la Función Inversa", dictado por el autor en la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, durante el mes de enero del año 2012 en preparación para la Emalca 2012. La intención principal es proveer reflexión sobre estos resultados sin dejar de lado el rigor matemático. Se busca complementar los libros de textos tradicionales en los cuales, el rigor y las estructuras usadas para presentar las matemáticas, dejan poco espacio para el desarrollo de la intuición.

1.2 Significado geométrico de la diferencial

Para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define la **derivada** mediante

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{1.1}$$

siempre que dicho límite exista. Aquí $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
La derivada permite aproximar la función $f(x)$, para puntos $x = x_0 + h$ cercanos a x_0, mediante una función afín:

$$f(x) \sim f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Nota. Geométricamente, la función f se puede aproximar en forma local por su **recta tangente**.

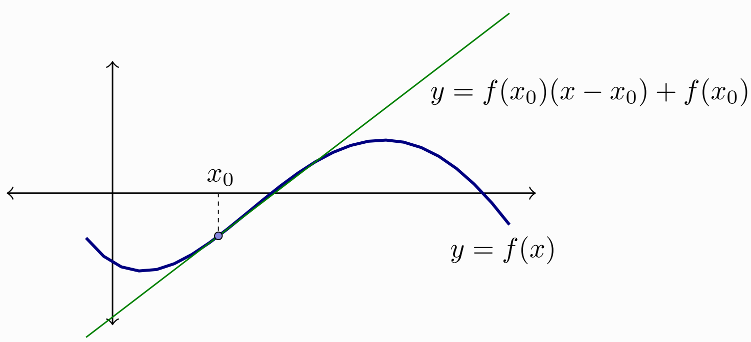

Figura 1.2: Función aproximada por su recta tangente.

A la función lineal

$$df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f'(x_0)x$$

se le llama la **diferencial** de f en x_0.

La relación (1.1) puede escribirse como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \big) = 0. \tag{1.2}$$

Formalmente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(f, \varepsilon, x_0) > 0$ (que depende de la función f, del valor de ε y del punto x_0) tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{implica} \quad \left|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\right| < |x - x_0|\varepsilon. \tag{1.3}$$

La derivada y la diferencial anterior tienen una extensión natural para el caso $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Basta con considerar

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\right) = 0, \tag{1.4}$$

donde $f(x) - f(x_0)$ representa un vector en $\mathbb{R}^n$ paralelo al vector con punto inicial en $f(x_0)$ y punto final en el punto $f(x)$. Aquí $f'(x_0)$, y por ende, $f'(x_0)(x - x_0)$ pertenece al mismo espacio que $f(x) - f(x_0)$.

En este caso, f' es una función que produce para cada x_0 un vector $f'(x_0)$ en $\mathbb{R}^n$ el cual permite aproximar la función $f(x)$ para puntos x cercanos a x_0 mediante una función afín:

$$f(x) \sim (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0).$$

A la función lineal

$$df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n; \quad x \mapsto x f'(x_0)$$

se le llama la **diferencial** de f en x_0. Geométricamente, la curva que representa la función f en $\mathbb{R}^n$, se puede aproximar en forma local por su **recta tangente**.

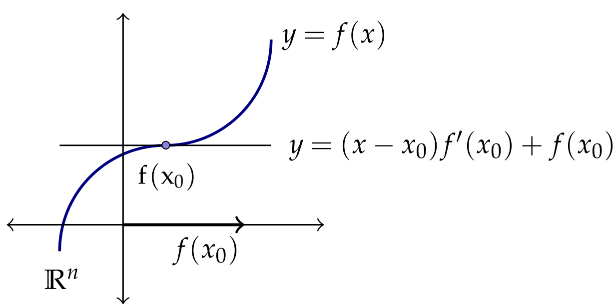

Figura 1.3: Función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ aproximada por su recta tangente.

La gráfica de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se puede aproximar (bajo las hipótesis apropiadas) en $\mathbb{R}^3$ en forma local, por un plano. Analíticamente, lo anterior significa que la función f se puede aproximar alrededor de cada punto x_0 por una función afín $f'(x_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x) \sim f'(x_0)(x) = m \cdot x + b,$$

donde m es un vector $m = (m^1, m^2)$ y b un número real.

En el caso $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (1.2) (o bien (1.4)) deja de tener sentido pues $x - x_0$ es ahora un vector y no se puede considerar el cociente $1/(x - x_0)$.
Se observa sin embargo que se pueden reemplazar valores absolutos por normas en (1.3): para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(f, \varepsilon, x_0) > 0$ tal que

$$0 < ||x - x_0||_{\mathbb{R}^m} < \delta \text{ implica } \big|\big|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big|\big|_{\mathbb{R}^n} < ||x - x_0||_{\mathbb{R}^m}\varepsilon, \tag{1.5}$$

donde $f'(x_0)(x - x_0)$ debe pertenecer al mismo espacio que $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

Así, la diferencial $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f'(x_0)x$, debe reemplazarse por una aplicación (lineal) $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto f'(x_0)(x)$.

Una vez logrado este objetivo, (1.5) puede escribirse como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{||x - x_0||_{\mathbb{R}^m}} \big|\big|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big|\big|_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Definición 1.1

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función con A un conjunto abierto. Se dice que f es **diferenciable** en un punto $x_0 \in A$ si y sólo si existe una transformación lineal $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, para la cual, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de f, ε y x_0) tal que

$$0 < ||x - x_0||_{\mathbb{R}^m} < \delta, x \in A \text{ implican } \big|\big|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)\big|\big|_{\mathbb{R}^n} < ||x - x_0||_{\mathbb{R}^m}\varepsilon. \tag{1.6}$$

Se dice que f es **diferenciable** en A si es diferenciable en todo punto x_0 de A.
A la transformación lineal $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se le llama la **diferencial** de f en el punto x_0.

Nota.

- La definición anterior establece que $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en un punto $x_0 \in A$ si y sólo si
$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{||x - x_0||_{\mathbb{R}^m}} \big|\big|f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)\big|\big|_{\mathbb{R}^n} = 0,$$
para alguna transformación lineal $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

- Obsérvese como df toma puntos en A y produce transformaciones lineales en $\mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. De este modo, cada $df(x_0)$ toma vectores en $\mathbb{R}^m$ y produce vectores en $\mathbb{R}^n$ y cada $df(x_0)$ posee una representación matricial.

Ejemplo 1.1

Es fácil ver que para toda aplicación lineal $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se tiene que $dL(x_0) = L$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^m$. De hecho, esta propiedad se sigue de usar en (1.6) la relación

$$L(x) - L(x_0) - L(x - x_0) = 0,$$

dada por la linealidad de L.

Si bien no es el tema de este documento, el siguiente ejemplo pone de manifiesto que la diferencial está íntitdamente relacionada con las derivadas parciales.

Ejemplo 1.2

Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas. La diferencial de f en cualquier punto $x_0 \in \mathbb{R}^m$ se puede representar como la matriz fila de m entradas, cuyo valor en cada entrada es la respectiva derivada parcial. Esta matriz fila se conoce como el **vector gradiente** de f en el punto x_0, y se denota $(\nabla f)(x_0)$.

$$df(x_0)x = (\nabla f)(x_0) \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1^m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)x_i,$$

donde se representó a $x \in \mathbb{R}^m$ como el vector columna $(x_1, \ldots, x_m)^t$.

Es un resultado usual del cálculo en varias variables que la continuidad de las derivadas parciales en un punto implica la diferenciabilidad de la función en ese punto. Usando este hecho se puede mostrar el siguiente resultado, que será de mucha utilidad en las demostraciones que se estudiarán adelante.
Intuitivamente, este resultado establece que la diferencial en un punto (la cual es una aplicación lineal y por tanto más fácil de manipular que la función original), aproxima la separación que la función produce entre dos puntos originalmente cercanos.

Lema 1.1 (Lema de aproximación).

Para una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto A, para $x_0 \in A$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si x_1 y x_2 son elementos de A tales que $||x_i - x_0||_{\mathbb{R}^m} < \delta$ para $i = 1,2$, entonces

$$||f(x_1) - f(x_2) - df(x_0)(x_1 - x_2)||_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon ||x_1 - x_2||_{\mathbb{R}^m}.$$

Prueba. Como las derivadas parciales de primer orden son continuas en el conjunto abierto A, se sabe que la función f es diferenciable en cada punto del conjunto A. Sean $x_0 \in A$ y $\varepsilon > 0$. Existe una transformación lineal $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y un $\delta > 0$ que satisfacen la Definición 1.1.

Sean ahora x_1 y x_2 elementos de A tales que $||x_i - x_0||_{\mathbb{R}^m} < \delta$ para $i = 1,2$. Al aplicar la desigualdad (1.6) sustituyendo x por x_1 y x_2, se obtiene de la desigualdad triangular y de la linealidad de $df(x_0)$ que

$$\begin{aligned}
&||f(x_1) - f(x_2) - df(x_0)(x_1 - x_0 - x_2 + x_0)||_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq ||f(x_1) - f(x_0) - df(x_0)(x_1 - x_0)||_{\mathbb{R}^n} + ||f(x_2) - f(x_0) - df(x_0)(x_2 - x_0)||_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon||x_1 - x_2||_{\mathbb{R}^m}.
\end{aligned}$$

1.3 Teorema de la función inversa

La invertibilidad de una función depende de su biyectividad, por ende de su inyectividad y de su sobreyectividad. Se verán primero dos resultados parciales, a saber, los teoremas de la función inyectiva y de la función sobreyectiva. Estos resultados son interesantes en la medida que permiten concluir la inyectividad o sobreyectividad local de una función, a partir de la inyectividad y la sobreyectividad de su diferencial, la cual, por ser una transformación lineal es en general más sencilla de estudiar.

Teorema 1.1 (de la función inyectiva).

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto A. Si para $x_0 \in A$ la transformación $df(x_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es inyectiva, entonces existe $\delta > 0$ tal que la restricción de f a la bola abierta $B_\delta(x_0) \subseteq A$,

$$f|_{B_\delta(x_0)} : B_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^m \to f(B_\delta(x_0)) \subseteq \mathbb{R}^n$$

es inyectiva. Más aún, la transformación inversa de dicha restricción

$$(f|_{B_\delta(x_0)})^{-1} : f(B_\delta(x_0)) \subseteq \mathbb{R}^n \to B_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^m$$

es continua.

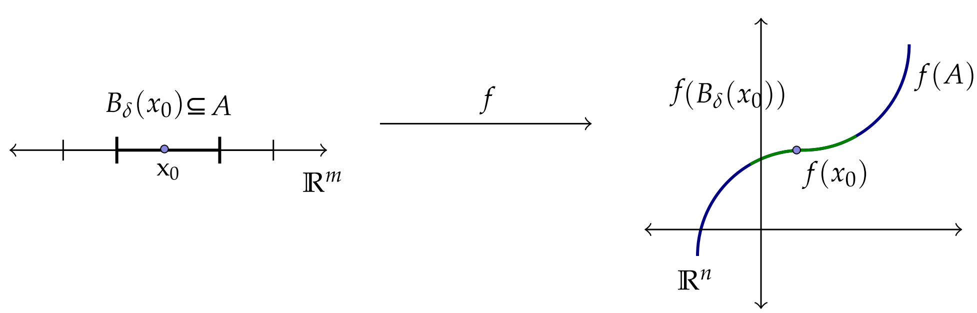

Figura 1.4: Teorema de la función inyectiva.

Prueba. Como $df(x_0)$ es una aplicación lineal, es continua y como $\{u \in \mathbb{R}^m : ||u|| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^m$ es cerrado y acotado, existe

$$m = \inf\{||df(x_0)(u)|| : ||u|| = 1\}.$$

Si $m = 0$ existiría un $u \in \mathbb{R}^m$ con $||u|| = 1$, para el cual $df(x_0)(u) = 0$, lo cual contradice la inyectividad de $df(x_0)$. Por lo tanto $m > 0$ y

$$0 < m||u|| \leq ||df(x_0)(u)||, \qquad \text{para todo } u \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Con $\varepsilon = m/2$ en el Lema 1.1, existe $\delta > 0$ para el cual, si $||x_i - x_0|| < \delta$ para $i = 1,2$, entonces

$$\begin{aligned} ||df(x_0)(x_1 - x_2)|| &\leq ||f(x_1) - f(x_2) - df(x_0)(x_1 - x_2)|| + ||f(x_1) - f(x_2)|| \\ &\leq \tfrac{m}{2}||x_1 - x_2|| + ||f(x_1) - f(x_2)||, \end{aligned}$$

donde se usó la desigualdad triangular. Con $u = x_1 - x_2$ se concluye que

$$\frac{m}{2}||x_1 - x_2|| \leq ||f(x_1) - f(x_2)||,$$

para x_1 y x_2 en $B_\delta(x_0)$. En particular $f|_{B_\delta(x_0)}$ es una función inyectiva con inversa continua:

$$||(f|_{B_\delta(x_0)})^{-1}(y_1) - (f|_{B_\delta(x_0)})^{-1}(y_2)|| \leq \frac{2}{m}||y_1 - y_2||,$$

al poner $y_i = f(x_i)$ para $i = 1,2$.

Nota.

- El recíproco no es cierto en general. La función $f(t) = t^3$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ es inyectiva con derivada continua. Sin embargo, su diferencial $df(t) : x \mapsto 3t^2x$, no es inyectiva para $t = 0$, de hecho es idénticamente cero.
- Como $df(x_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es inyectiva, su núcleo es cero dimensional y el teorema del rango implica que $m \leq n$. [a]
- En los casos en que $m < n$, $f(x_0)$ no es un punto interior de $f(B_\delta(x_0))$ (el cual no es en general un conjunto abierto) y no se puede estudiar la diferenciabilidad de la función inversa alrededor de $f(x_0)$.

[a] El **teorema del rango** de álgebra lineal establece que para una transformación lineal, $L \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$, se tiene $m = \dim \ker L + \dim L(\mathbb{R}^m)$.

Teorema 1.2 (de la función sobreyectiva).

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto A. Si para $x_0 \in A$ la transformación $df(x_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ es sobreyectiva, existen $\rho > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $y \in \mathbb{R}^n$ con $||y - f(x_0)||_{\mathbb{R}^n} \leq \rho$, existe $x \in A$ con $||x - x_0||_{\mathbb{R}^m} \leq \delta$ y $f(x) = y$. Es decir, la restricción a las bolas cerradas

$$f|_{\overline{B}_\delta(x_0)} : \overline{B}_\delta(x_0) \to \overline{B}_\rho(f(x_0)),$$

es sobreyectiva.

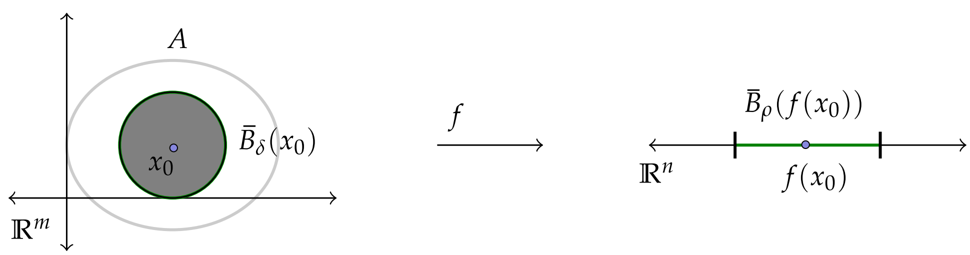

Figura 1.5: Teorema de la función sobreyectiva.

Prueba. Como $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal sobreyectiva, para cada elemento e_i de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ existe $v_i \in \mathbb{R}^m$ tal que $df(x_0)(v_i) = e_i$. Defínase la transformación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$L\left(\sum_{j=1}^{n} a^j e_j\right) := \sum_{j=1}^{n} a^j v_j.$$

Obsérvese que

$$df(x_0) \circ L\left(\sum_{j=1}^{n} a^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a^j df(x_0)(v_j) = \sum_{j=1}^{n} a^j e_j,$$

por lo cual $df(x_0) \circ L$ es la transformación identidad sobre $\mathbb{R}^n$.

Como $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal no nula, existe una constante $C > 0$ para la cual $||L(y)|| \leq C||y||$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Tómese $\varepsilon = 1/2C > 0$. De nuevo por el Lema 1.1 existe $\delta > 0$ tal que si $||x_i - x_0||_{\mathbb{R}^m} < \delta$ para $i = 1,2$, entonces x_1 y x_2 son elementos de A y

$$||f(x_1) - f(x_2) - df(x_0)(x_1 - x_2)||_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon ||x_1 - x_2||_{\mathbb{R}^m}.$$

Con $\rho = \delta\varepsilon$, el resto de la prueba consiste en mostrar que

$$f : \overline{B}_\delta(x_0) \to \overline{B}_\rho(f(x_0))$$

es sobreyectiva.

Sea $y \in \overline{B}_{\delta\varepsilon}(f(x_0))$. Se va a definir una sucesión en $B_\delta(x_0)$ la cual converge a un valor x con $f(x) = y$. Defínanse $x_1 := x_0 + L(y - f(x_0))$ y

$$x_{k+1} := x_k - L\big(f(x_k) - f(x_{k-1}) - df(x_0)(x_k - x_{k-1})\big).$$

De este modo

$$||x_1 - x_0|| = ||L(y - f(x_0))|| \leq C||y - f(x_0)|| \leq C\delta\varepsilon = \delta/2.$$

Y en general, por inducción se tiene que

$$\begin{aligned} ||x_{k+1} - x_k|| &= \big|\big|L\big(f(x_k) - f(x_{k-1}) - df(x_0)(x_k - x_{k-1})\big)\big|\big| \\ &\leq C||f(x_k) - f(x_{k-1}) - df(x_0)(x_k - x_{k-1})|| \\ &\leq C\varepsilon||x_k - x_{k-1}|| = \frac{1}{2}||x_k - x_{k-1}|| \leq \frac{\delta}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Para $l \geq k$ se tiene que

$$\begin{aligned} ||x_l - x_k|| &\leq ||x_l - x_{l-1}|| + \cdots + ||x_{k+1} - x_k|| \\ &\leq \frac{\delta}{2^l} + \cdots + \frac{\delta}{2^{k+1}} = \delta\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^l}\right). \end{aligned}$$

Por ser $\{x_k\}_k$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^m$, es convergente a un límite $x \in \mathbb{R}^m$. Obsérvese que con $k = 0$, se concluye que $||x_l - x_0|| \leq \delta$. Por ser $\overline{B}_\delta(x_0)$ cerrado y $\{x_k\}_k \subseteq \overline{B}_\delta(x_0)$, $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$. Por continuidad de la función f se tiene que $f(x_k)$ converge a $f(x)$.

Por último, por inducción se muestra que

$$\begin{aligned} df(x_0)(x_{k+1} - x_k) &= -df(x_0)\big(L\big(f(x_k) - f(x_{k-1}) - df(x_0)(x_k - x_{k-1})\big)\big) \\ &= df(x_0)(x_k - x_{k-1}) - \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \\ &= df(x_0)(x_{k-1} - x_{k-2}) - \big(f(x_k) - f(x_{k-2})\big) \\ &= \cdots \\ &= df(x_0)(x_1 - x_0) - \big(f(x_k) - f(x_0)\big) \\ &= df(x_0) \circ L(y - f(x_0)) - f(x_k) + f(x_0) \\ &= y - f(x_k). \end{aligned}$$

Al tomar el límite se concluye que $y = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$, lo cual completa el resultado.

Corolario 1.1

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto A. Si para $x_0 \in A$ la transformación $df(x_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es sobreyectiva, existen $\rho > 0$ y $\delta > 0$ tales que la restricción a las bolas abiertas

$$f|_{B_\delta(x_0)} : B_\delta(x_0) \to B_\rho(f(x_0)),$$

es sobreyectiva.

Prueba. Por ser A abierto, es evidente que se puede tomar el δ del resultado anterior lo suficientemente pequeño para tener $B_\delta(x_0) \subseteq A$. Como f es una continua, también lo es su restricción

$$f|_{B_\delta(x_0)} : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^n.$$

Si $y \in \overline{B}_\rho(f(x_0))$ con $||y - f(x_0)||_{\mathbb{R}^n} < \rho$ y $y = f(x)$ para $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$, existe un abierto U alrededor de y todo contenido en el interior de $\overline{B}_\rho(f(x_0))$.

Por la continuidad de la restricción $f|_{B_\delta(x_0)}$, la imagen inversa de U bajo esta restricción es un abierto en $B_\delta(x_0)$. De este modo, x es un punto interior de $B_\delta^-(x_0)$, y así $x \in B_\delta(x_0)$, lo cual completa el resultado.

Corolario 1.2 (Teorema de la transformación abierta).

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto A. Si para cada $x \in A$ la transformación $df(x) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es sobreyectiva y si $U \subseteq A$ es abierto, entonces $f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Prueba. Sea $y_0 = f(x_0)$ un elemento en $f(U)$ con x_0 en U. Por el Corolario 1.3, existen $\rho > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $y \in \mathbb{R}^n$ con $||y - f(x_0)||_{\mathbb{R}^n} \leq \rho$, existe $x \in A$ con $||x - x_0||_{\mathbb{R}^m} \leq \delta$ y $f(x) = y$. Como U es abierto, se puede tomar δ suficientemente pequeño para tener $B_\delta(x_0) \subseteq U$. De este modo, $B_\rho(y_0) \subseteq f(U)$ y se obtiene el resultado

Nota.

- Evidentemente, es posible combinar los resultados anteriores para obtener una inversa local. Se dará un paso más para concluir la diferenciabilidad de la inversa local.
- Si $df(x_0)$ es una transformación lineal biyectiva entre $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, del teorema del rango se concluye que necesariamente $m = n$.

Teorema 1.3 (Primera versión del teorema de la función inversa).

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto A. Si para $x_0 \in A$ la transformación $df(x_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ es biyectiva, entonces existen $\rho > 0$ y $\delta > 0$ tales que la restricción a las bolas abiertas

$$f|_{B_\delta(x_0)} : B_\delta(x_0) \to B_\rho(f(x_0))$$

es biyectiva con inversa continua.

Prueba. Por el Teorema 1.1, existe $\delta_1 > 0$ tal que la restricción de f a la bola abierta $B_{\delta_1}(x_0)$ es inyectiva, y la función inversa de dicha restricción

$$f|_{B_{\delta_1}(x_0)} : B_{\delta_1}(x_0) \to f\big(B_{\delta_1}(x_0)\big),$$

es continua. Si se aplica el Corolario 1.3 a la función

$$f|_{B_{\delta_1}(x_0)} : B_{\delta_1}(x_0) \to f(B_{\delta_1}(x_0)),$$

existen $\rho > 0$ y $\delta > 0$ con $B_\delta(x_0) \subseteq B_{\delta_1}(x_0)$ tales que la restricción a las bolas abiertas

$$f|_{B_\delta(x_0)} : B_\delta(x_0) \to B_\rho(f(x_0)),$$

es además sobreyectiva. Obsérvese también que la inversa de esta función es la restricción de la función inversa de $f|_{B_{\delta_1}(x_0)}$ y por lo tanto también es continua.

Ejemplo 1.3

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es biyectiva y posee derivada de primer orden continua en todo $\mathbb{R}$, pero $df(0)$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva al ser la transformación nula. La inversa de f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $g(x) = \sqrt[3]{x}$, pero no posee derivada de primer orden en $x = 0$.

Teorema 1.4 (Segunda versión del teorema la función inversa).

Con las hipótesis del teorema anterior, se puede tomar $\rho > 0$ y $\delta > 0$ tales que la función inversa

$$(f|_{B_\delta(x_0)})^{-1} : B_\rho(f(x_0)) \to B_\delta(x_0),$$

de la restricción a las bolas abiertas

$$f|_{B_\delta(x_0)} : B_\delta(x_0) \to B_\rho(f(x_0))$$

es diferenciable y

$$d(f|_{B_\delta(x_0)})^{-1}(y_0) = \left(df\left((f|_{B_\delta(x_0)})^{-1}(y_0)\right)\right)^{-1}.$$

Los detalles de la prueba se pueden leer en la Sección 1.6.

Nota. Las aplicaciones del teorema de la función inversa son variadas. Entre las que destacan se encuentran el teorema de la transformación abierta, el teorema de la función implícita, y aplicaciones a la teoría de máximos y mínimos con restricciones.

1.4 Extremos en puntos frontera

Se estudia ahora una aplicación del teorema de la función inversa a la teoría correspondiente a puntos críticos en la frontera de una región.

Definición 1.2

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, funciones definidas en el abierto A. Se dice que f alcanza un **mínimo** (respectivamente **máximo**) **local** en $x_0 \in A$ **sujeto a la restricción** $g(x) = 0$ si y sólo si $g(x_0) = 0$ y existe un abierto V alrededor de x_0, tal que $f(x_0) \leq f(x)$ (respectivamente $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in V$ con $g(x) = 0$.

Teorema 1.5 (Primera versión del teorema de los multiplicadores de Lagrange).

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funciones con derivadas de primer orden continuas en el abierto A tales que f alcanza un extremo local en $x_0 \in A$, sujeto a la restricción $g(x) = c$. Si $dg(x_0) \neq 0$, entonces existe λ en $\mathbb{R}$ tal que

$$df(x_0) = \lambda dg(x_0).$$

A la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ se le llama **multiplicador de Lagrange**.

Nota.

- Como $df(x_0)(x) = \nabla f(x_0) \cdot x$ (véase el Ejemplo 1.2), el resultado anterior se escribe $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$.
- Si $dg(x_0) \neq 0$, existe $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ tal que $dg(x_0)(x) \neq 0$ y así, $dg(x_0)$ es sobreyectiva, pues para todo $t \in \mathbb{R}$,
$$t = dg(x_0)\left(\frac{tx}{dg(x_0)(x)}\right).$$
La hipótesis $dg(x_0) \neq 0$ es equivalente a pedir que $dg(x_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ sea sobreyectivo.

Prueba. Considérese la función

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2; \qquad F(x) = (f(x), g(x)).$$

Como las derivadas parciales de F son las derivadas parciales de f y de g, se tiene que F posee primeras derivadas parciales continuas y

$$dF(x_0)(x) = \big(df(x_0)(x), dg(x_0)(x)\big),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$. De este modo, como $df(x_0)$ y $dg(x_0)$ son sobreyectivos,

$$1 \leq \dim dF(x_0)(\mathbb{R}^m) \leq 2.$$

Si $dF(x_0)$ es sobreyectiva, F debe de ser sobreyectiva de una bola abierta alrededor de x_0 hacia una bola abierta alrededor de $F(x_0)$ gracias al Corolario 1.3. Al asumir sin perdida de generalidad que $x_0 \in A$ es un mínimo local para f sujeto a la restricción $g(x) = c$, como $F(x) = (f(x), g(x))$, se tiene que cualquier punto de la forma (a, c) con $a < f(x_0)$ no posee preimagen (cerca de x_0) bajo F, lo cual es una contradicción.

Así, $\dim dF(x_0)(\mathbb{R}^m) = 1$ y existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ con $\lambda\mu \neq 0$ (pues ambos $df(x_0)$ y $dg(x_0)$ son sobreyectivos) tal que $dF(x_0)(\mathbb{R}^m) = \{t(\lambda, \mu) : t \in \mathbb{R}\}$. Sin perder generalidad se puede tomar $\mu = 1$. Por lo tanto, si $dF(x_0)(x) \neq 0$ se tiene que para algún $t \neq 0$,

$$(df(x_0)(x), dg(x_0)(x)) = dF(x_0)(x) = t(\lambda, 1)$$

de modo que

$$df(x_0)(x) = t\lambda = \lambda dg(x_0)(x).$$

El resultado queda demostrado.

Ejemplo 1.4

El recíproco del resultado anterior no es necesariamente cierto. Considérese la función $f(x,y) = x - y$ sujeta a la restricción $g(x,y) = x^3 + x - y = 0$.

Aquí la relación $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$ implica $1 = \lambda(3x_0^2 + 1)$ y $-1 = -\lambda$, por lo cual el punto candidato a extremo es $f(0,0)$. Pero en el punto $(0,0)$ la función $f(x,y) = x - y$ sujeta a la restricción $x^3 + x - y = 0$ no posee un extremo local pues es equivalente a la expresión $f(x,x^3 - x) = x^3$, la cual toma en un vecindario arbitrario del 0 valores positivos y negativos.

En la Sección 1.6 se puede ver una generalización de este resultado a múltiples restricciones.

1.5 Teorema de la función implícita

Considérese el siguiente problema. Sea $F : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ y sea

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n} : F(x,y) = 0\}$$

una **curva de nivel**. ¿Existe una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ para la cual la anterior curva de nivel coincida con la gráfica de f? Es decir,

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad y = f(x).$$

En caso de existir, se dice que F define a f en forma **implícita**.
Por ejemplo sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. En este caso la curva de nivel cero es precisamente el círculo de radio 1, $x^2 + y^2 = 1$. Si se desea resolver para y en términos de x se tiene

$$y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Para cualquier valor de x_0 con $0 \leq |x_0| < 1$, se tienen dos opciones a elegir para definir alrededor de x_0 una función $y = f(x)$. Evidentemente alrededor de $x_0 = \pm 1$, lo anterior no define una función de la variable x. Por último, para $|x_0| > 1$ no tiene sentido tratar de definir y en términos de x alrededor de x_0, pues no se satisface la relación original.
Más aún, es posible considerar

$$y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [-1,1], \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [-1,1], \end{cases}$$

lo cual define una función no continua f de la variable x, que satisface $F(x, f(x)) = 0$.
Por lo anterior cabe preguntarse ¿bajo qué condiciones existe la función f? , y ¿qué propiedades de la función F se reflejan en la función f?

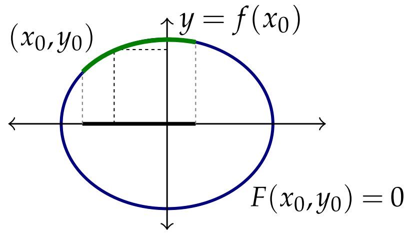

Figura 1.6: Teorema de la función implícita.

En esta sección se presenta la siguiente respuesta parcial a dicha pregunta.

Teorema 1.6 (de la función implícita).

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ una función con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto A. Sea $(x_0,y_0) \in A$ tal que $F(x_0,y_0) = 0$ y $dF(x_0,y_0)(0,y)$ es una biyección de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Entonces

(a) existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ con $x_0 \in U$ y una única función $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto U, tal que $y_0 = f(x_0)$ y $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in U$;

(b) existe un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ con $(x_0,y_0) \in V$ tal que $F(x,y) = 0$ para $(x,y) \in V$ si y sólo si $y = f(x)$ y $x \in U$.

Se ilustra el resultado en el caso $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Como $F(x_0,y_0) = 0$, el punto (x_0,y_0) pertenece a la curva de nivel de altura 0, la cual se representa como una curva en el plano OXY. Ahora bien

$$dF(x_0,y_0)(0,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)y,$$

la cual es una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si y sólo si $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Los puntos en los que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ representan puntos de tangencia vertical.

Prueba. **Idea de la demostración**. La idea es considerar la función $G : A \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$ dada por $G(x,y) = (x, F(x,y))$ de modo que

$$dG(x_0,y_0)(x,y) = (x, dF(x_0,y_0)(x,y)),$$

para todo $(x_0,y_0) \in A$ y todo $(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}$. Luego se verifica que $dG(x_0,y_0)$ es una biyección de $\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$.
Por el Teorema 1.4, existen $\rho > 0$ y $\delta > 0$ tales que la función inversa

$$(G|_{B_\delta(x_0,y_0)})^{-1} : B_\rho(x_0,0) \to B_\delta(x_0,y_0),$$

de la restricción a las bolas abiertas

$$G|_{B_\delta(x_0,y_0)} : B_\delta(x_0,y_0) \to B_\rho(x_0,0)$$

es diferenciable con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto $B_\rho(x_0,0)$. Al denotar $(G|_{B_\delta(x_0,y_0)})^{-1}(z,w) = (g_1(z,w), g_2(z,w))$ donde

$$g_1 : B_\rho(x_0,0) \to \mathbb{R}^m, \qquad g_2 : B_\rho(x_0,0) \to \mathbb{R}^n,$$

y $(z,w) \in B_\rho(x_0,0) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, se verifica que

$$g_1(z,w) = z \qquad \text{y} \qquad F(z, g_2(z,w)) = w,$$

para todo $(z,w) \in B_\rho(x_0,0)$. Además, $g_2(x, F(x,y)) = y$, para todo $(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)$.

Con $U \subseteq \mathbb{R}^m$ el conjunto abierto tal que si $x \in U$, entonces $(x,0) \in B_\rho(x_0,0)$ se define $f : U \to \mathbb{R}^n$ mediante $f(x) = g_2(x,0)$.

Por último, para ver (b) tómese $(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)$ con $F(x,y) = 0$. Se sabe que

$$G(x,y) = (x, F(x,y)) = (x,0) \in B_\rho(x_0,0).$$

De este modo, $x \in U$ y

$$(x,y) = (G|_{B_\delta(x_0,y_0)})^{-1}(x,0) = (x, g_2(x,0)) = (x, f(x)).$$

El resultado se obtiene al tomar $V = B_\delta(x_0,y_0)$.

Ejemplo 1.5

Mostrar que la relación $\ln x + \ln y + xy - 1 = 0$ define a y como una función f de x en forma local alrededor de $x_0 = 1$ con $F(1,1) = 0$. Además, tratar de obtener una forma explícita para $f(x)$. En su defecto, calcular el valor en el punto en cuestión. Con $F(x,y) = \ln x + \ln y + xy - 1$ se tiene que

$$dF(1,1)(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = 2y,$$

lo cual es una biyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Así existe una función local $y = f(x)$ definida alrededor de $x_0 = 1$ tal que $\ln x + \ln f(x) + xf(x) - 1 = 0$.

Obsérvese que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{f'(x)}{f(x)} + f(x) + xf'(x) = 0$, o bien $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{1}{x}$, de donde $f(x) = 1/x$.

Ejemplo 1.6

Considérese la función $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = x - y^2$. Evidentemente F posee derivadas parciales de primer orden continuas en todo $\mathbb{R}^2$, $F(0,0) = 0$, pero $dF(x_0,y_0)(0,y) = 0$.

Supóngase que existe un intervalo abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in U$, y una función $f:U \to \mathbb{R}$ tal que

$$x - f^2(x) = F(x, f(x)) = 0$$

para todo $x \in U$. Lo anterior es imposible si $x < 0$.

Ejemplo 1.7

Considérese la función $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = x + y + e^{x+y} - 1$. Evidentemente F posee derivadas parciales de primer orden continuas en todo $\mathbb{R}^2$, $F(0,0) = 0$ y $dF(0,0)(0,y) = 2y$, la cual es una biyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Por el Teorema 1.6, existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in U$ y una única función $f:U \to \mathbb{R}$, con derivada continua en el conjunto abierto U, tal que $0 = f(0)$ y $x + f(x) + e^{x+f(x)} - 1 = 0$ para todo $x \in U$.

Ahora bien, al derivar, $0 = (1 + f'(x))(1 + e^{x+f(x)})$, para todo $x \in U$. Por lo cual $f(x) = -x$, para todo $x \in U$.

Ejemplo 1.8

Sea $F: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$. Encontrar los valores y para los cuales la relación $F(x,y) = 0$ define a x como una función de y en forma local.
Como

$$dF(x_0,y_0)(x,0) = \begin{pmatrix} 3x_0^2 - 6y_0 & 3y_0^2 - 6x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 3x(x_0^2 - 2y_0),$$

es una biyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ si y sólo si $x_0^2 \neq 2y_0$. El Teorema 1.6 garantiza que para esos puntos, la relación $F(x,y) = 0$ define a x como una función de y en forma local.

Corolario 1.3

Con las hipótesis del Teorema 1.6, la diferencial de f en el punto x_0 está dada por la relación

$$df(x_0) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}^{-1}_{(x_0,f(x_0))} \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}_{(x_0,f(x_0))}.$$

Prueba. Considérese la función $H : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ dada por $H(x) = (x, f(x))$.
Así $F \circ H(x) = F(x, f(x)) = 0$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} 0 &= D(F \circ H)(x) = DF(H(x)) \circ DH(x) = DF(x, f(x)) \circ (I \quad df(x)) \\ &= DF(x, f(x)) \circ (I \quad 0) + DF(x, f(x)) \circ (0 \quad df(x)) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}_{(x,f(x))} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}_{(x,f(x))} \circ df(x), \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene el resultado.

Ejemplo 1.9

Mostrar que la relación

$$F(x,y,z,v,w) = (xw + yv + z + v^2, xyz + v + w + 1) = (0,0)$$

define a (v,w) como una función f de (x,y,z) en forma local alrededor de $(2,1,0)$ con $F(2,1,0,-1,0) = (0,0)$. Calcular $df(2,1,0)$.
Primero

$$dF(2,1,0,-1,0)(0,0,0,v,w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Por lo cual existe una función f que define a (v,w) como una función de (x,y,z), en forma local alrededor de $(2,1,0)$.

Ahora bien, por el Corolario 1.3

$$
\begin{aligned}
df(2,1,0) &= -\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Si bien se ha presentado el teorema de la función implícita como una consecuencia del primer teorema de la función inversa, lo cierto es que ambos resultados son equivalentes. Este hecho queda demostrado en cierta medida al completar el siguiente resultado.

Lema 1.2

El Teorema 1.3 es una consecuencia del Teorema 1.6.

Prueba. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto A, tal que para algún $x_0 \in A$, la transformación $df(x_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ es biyectiva.

La función $F : A \subseteq \mathbb{R}^{m+m} \to \mathbb{R}^m$ dada por $F(x,y) = y - f(x)$, posee derivadas parciales continuas en A. Como $F(x_0, f(x_0)) = 0$ y

$$
dF(x_0,y_0)(0,y) = \begin{pmatrix} -df(x_0,f(x_0)) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = -df(x_0,f(x_0))x,
$$

la cual es una biyección $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^m$ por hipótesis. Por el Teorema 1.6, existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ con $f(x_0) \in U$ y una única función $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto U, $y = f(g(y))$ para todo $y \in U$. Además, existe un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^{m+m}$ con $(x_0, f(x_0)) \in V$ tal que $y = f(x)$ para $(x,y) \in V$ si y sólo si $x = g(y)$ y $y \in U$.

De este modo, f posee una inversa local continua, lo cual es suficiente para concluir el resultado.

1.6 Demostraciones de algunos resultados

En esta sección se presentan las demostraciones de aquellos resultados que por su extensión o requisitos técnicos, representan una obstrucción a una lectura lineal e inicial del documento.

Antes de demostrar la segunda versión del teorema la función inversa es necesario establecer un resultado preliminar. Este resultado es interesante por sí solo pues establece que si la diferencial de una función en un punto es una (transformación lineal) invertible (biyectiva), entonces existe todo un vecindario abierto alrededor de ese puto para el cual la diferencial de la función es una transformación lineal invertible, para todo punto de dicho vecindario.

Lema 1.3

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto A. Si para $x_0 \in A$ la transformación $df(x_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ es biyectiva, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $||x - x_0|| < \varepsilon$ y $x \in A$ se tiene que $df(x) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ es biyectiva.

Prueba. Se usará la continuidad de las derivadas parciales y la continuidad del determinante aplicado a la matriz jacobiana:

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Como $df(x_0)$ es biyectivo, su matriz jacobiana es invertible, por lo cual $\det(df(x_0)) \neq 0$. Como el determinante es una función continua, existe todo un intervalo abierto I alrededor de $\det(df(x_0))$, que no contiene al 0 y tal que $(\det(df))^{-1}(I)$ es abierto. Obsérvese que $det(df) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función continua por ser composición de funciones continuas.
Por lo tanto, para todo $x \in (\det(df))^{-1}(I)$, se tiene que $det(df(x))$ es diferente de 0 y así, $df(x)$ es invertible.

Prueba (De la segunda versión del teorema la función inversa).
De la primera versión del teorema de la función inversa se sabe que existen $\rho > 0$ y $\delta > 0$ para los cuales $f|_{B_\delta(x_0)} : B_\delta(x_0) \to B_\rho(f(x_0))$ es biyectiva, con inversa continua.

Por el Lema 1.3 existe un abierto U alrededor de x_0 tal que $df(x) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ es biyectivo para todo $x \in U$. Tómese δ lo suficientemente pequeño para tener $B_\delta(x_0) \subseteq U$. Para simplificar la notación escríbase $g = (f|_{B_\delta(x_0)})^{-1} : B_\rho(f(x_0)) \to B_\delta(x_0)$. Obsérvese que g es diferenciable.
Sea $y_1 \in B_\rho(f(x_0))$ con $y_1 = f(x_1)$ para $x_1 \in B_\delta(x_0)$ y sea $\varepsilon > 0$. Denótese con L la transformación inversa de $df(x_1)$, la cual existe pues como $x_1 \in U$, $df(x_1)$ es biyectivo. Se desea encontrar $\delta' > 0$ para el cual, $||y - y_1|| < \delta'$ implica

$$||g(y) - g(y_1) - L(y - y_1)|| < ||y - y_1||\varepsilon.$$

De la prueba del Teorema 1.1, con $m = \inf\{||df(x_1)(u)|| : ||u|| = 1\}$, se sabe que existe $\delta(m/2) > 0$ para el cual $||x - x_1|| < \delta(m/2)$ implica

$$\frac{m}{2}||x - x_1|| \leq ||f(x) - f(x_1)||.$$

Como f es diferenciable en x_1 existe $\delta_1 > 0$ (el cual se puede tomar de modo que $B_{\delta_1}(x) \subseteq B_\delta(x_0)$) tal que si $||x - x_1|| < \delta_1$ se obtiene

$$||f(x) - f(x_1) - df(x_1)(x - x_1)|| < \frac{m\varepsilon}{2||L||}||x - x_1||.$$

Obsérvese que por ser L biyectivo, $||L|| := \sup\{||L(w)|| : ||w|| \leq 1\} > 0$.

Como g es continua, $g^{-1}(B_{\text{mín}\{\delta_1,\delta(m/2)\}}(x_1))$ es un conjunto abierto en $B_\rho(f(x_0))$, por lo cual existe $\delta' > 0$ tal que si $||y - y_1|| < \delta'$, entonces $||g(y) - x_1|| < \text{mín}\{\delta_1, \delta(m/2)\}$.

Por sobreyectividad se sabe que para todo $y \in B_\rho(f(x_0))$ existe $x \in B_\delta(x_0)$ con $y = f(x)$. Así si $||y - y_1|| < \delta'$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&||g(y) - g(y_1) - L(y - y_1)|| = ||x - x_1 - L(f(x) - f(x_1))|| \\
&= ||L\big(df(x_1)(x - x_1) - f(x) - f(x_1)\big)|| \\
&\leq ||L||||f(x) - f(x_1) - df(x_1)(x - x_1)|| \\
&< \frac{m\varepsilon}{2}||x - x_1|| \leq \varepsilon||f(x) - f(x_1)|| = \varepsilon||y - y_1||.
\end{aligned}$$

Se concluye que g es diferenciable con [2]

$$dg(y_1) = \big(df\big(g(y_1)\big)\big)^{-1}.$$

Teorema 1.7 (Segunda versión del teorema de los multiplicadores de Lagrange).

Sean $f, g_i : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n < m$, funciones con derivadas de primer orden continuas en el abierto A tales que f alcanza un extremo local en $x_0 \in A$, sujeto a las restricciones $g_i(x) = c_i$. Si $dg_i(x_0) \neq 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces existen λ_j en $\mathbb{R}$ con $j = 0, \ldots, n$ tales que

$$\lambda_0 df(x_0) = \lambda_1 dg_1(x_0) + \cdots + \lambda_n dg_n(x_0).$$

Más aún, si el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} d_{e_1}g_1(x_0) & \cdots & d_{e_1}g_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{e_m}g_1(x_0) & \cdots & d_{e_m}g_n(x_0) \end{pmatrix}$$

es n, entonces se puede tomar $\lambda_0 = 1$.

[2] Es posible mostrar que g posee derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto $B_\rho(f(x_0))$, dado que las derivadas parciales de primer orden de g son precisamente las entradas de la representación matricial de $dg(y_1)$, las cuales son funciones continuas de las entradas de la representación matricial de $df(g(y_1))$.

Nota. Una vez más, como se sabe que $df(x_0)(x) = \nabla f(x_0) \cdot x$, el resultado anterior es usualmente expresado en la forma

$$\lambda_0 \nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \cdots + \lambda_n \nabla g_n(x_0).$$

Prueba. Considérese la función

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+1}; \qquad F(x) = (f(x), g_1(x), \ldots, g_n(x)).$$

Como las derivadas parciales de F son las derivadas parciales de f y de las g_i, se sabe que F posee primeras derivadas parciales continuas y

$$dF(x_0)(x) = \big(df(x_0)(x), dg_1(x_0)(x), \ldots, dg_n(x_0)(x)\big),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$. De este modo, como $df(x_0)$ y $dg_i(x_0)$ son sobreyectivos,

$$1 \leq \dim dF(x_0)(\mathbb{R}^m) \leq n+1 \leq m.$$

Si $\dim dF(x_0)(\mathbb{R}^m) = n+1$, se tendría una vez más por el Teorema 1.2 que F es localmente sobreyectiva alrededor de x_0, lo cual es una contradicción con el hecho que $(a, c_1, \cdots, c_n)$ no poseen preimagen alrededor de x_0 si a es menor que $f(x_0)$ en el caso de un mínimo o $a > f(x_0)$ en el caso de un máximo.

De este modo $\dim dF(x_0)(\mathbb{R}^m) = k \leq n$, y existen $v_1, \ldots, v_k$ vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^{n+1}$, con cada $v_j = (v_j^1, \ldots, v_j^{n+1})$, tales que $dF(x_0)(\mathbb{R}^m)$ es el generado por los v_j, $j = 1, \ldots, k$.

Para $i = 1, \ldots, n+1$, considérense ahora los $n+1$ vectores $(v_1^i, \ldots, v_k^i) \in \mathbb{R}^k$ con $k < n+1$. Estos vectores son necesariamente linealmente dependientes, por lo cual existen números reales $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$\lambda_0(v_1^1, \ldots, v_k^1) + \cdots + \lambda_n(v_1^{n+1}, \ldots, v_k^{n+1}) = 0.$$

Es decir, $\lambda_0 v_j^1 + \cdots + \lambda_n v_j^{n+1} = 0$, para todo $j = 1, \ldots, k$.

Ahora bien, para cada elemento e_i, $i = 1, \ldots, m$, de la base estándar de $\mathbb{R}^m$, existe una combinación lineal de la forma

$$dF(x_0)(e_i) = \nu_i^1 v_1 + \cdots + \nu_i^k v_k.$$

O bien, para todo $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ se deduce que

$$\begin{aligned}
df(x_0)(x) &= \sum_{i=1}^{m} x^i \sum_{j=1}^{k} \nu_i^j v_j^1, \\
dg_1(x_0)(x) &= \sum_{i=1}^{m} x^i \sum_{j=1}^{k} \nu_i^j v_j^2, \\
&\vdots \\
dg_n(x_0)(x) &= \sum_{i=1}^{m} x^i \sum_{j=1}^{k} \nu_i^j v_j^{n+1},
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}&\lambda_0 df(x_0)(x)+\lambda_1 dg_1(x_0)(x)+\cdots+\lambda_n dg_n(x_0)(x)\\&=\sum_{l=1}^{n+1}\lambda_{l-1}\sum_{i=1}^{m}x^i\sum_{j=1}^{k}v_i^j v_j^l=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}x^i v_i^j\sum_{l=1}^{n+1}\lambda_{l-1}v_j^l=0.\end{aligned}$$

Por último, si $\lambda_0=0$ se tendría para cada elemento e_i de la base canónica de $\mathbb{R}^m$, una combinación lineal de la forma

$$\begin{aligned}0&=\lambda_1 dg_1(x_0)(e_i)+\cdots+\lambda_n dg_n(x_0)(e_i)\\&=\lambda_1 d_{e_i}g_1(x_0)+\cdots+\lambda_n d_{e_i}g_n(x_0),\end{aligned}$$

$i=1,\ldots,m$. Si el rango de la matriz de derivadas parciales es n se tendría que $\lambda_j=0$ para todo $j=1,\ldots,n$, lo cual es una contradicción.

Prueba (Demostración de la parte (a) **del teorema 1.6).**
Considérese la función $G:A\subseteq\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^{m+n}$ dada por $G(x,y)=(x,F(x,y))$. Las derivadas parciales de primer orden de G son precisamente las derivadas parciales de $(x,y)\mapsto x$ y F, por lo cual son continuas en A y así, G es diferenciable en A con

$$\begin{aligned}dG(x_0,y_0)(x,y)&=(x,dF(x_0,y_0)(x,y))\\&=(x,dF(x_0,y_0)(0,y))+(0,dF(x_0,y_0)(x,0)),\end{aligned}$$

para todo $(x_0,y_0)\in A$ y todo $(x,y)\in\mathbb{R}^{m+n}$, veáse el Ejercicio A.4.

Si $(x,y)\in\mathbb{R}^{m+n}$, por ser $\cdot\mapsto dF(x_0,y_0)(0,\cdot)$ sobreyectivo, existe $z\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$dF(x_0,y_0)(0,z)=y-dF(x_0,y_0)(x,0),$$

por lo cual,

$$dG(x_0,y_0)(x,z)=(x,dF(x_0,y_0)(0,z)+dF(x_0,y_0)(x,0))=(x,y).$$

Es decir, $dG(x_0,y_0)$ es sobreyectivo.

Si $dG(x_0,y_0)(x,y)=(0,0)$, entonces $0=x$ y $0=dF(x_0,y_0)(0,y)$. De nuevo, por ser $\cdot\mapsto dF(x_0,y_0)(0,\cdot)$ inyectivo, se sabe que $y=0$ y que $dG(x_0,y_0)$ es una biyección de $\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^{m+n}$.
Por el Teorema 1.4, existen $\rho>0$ y $\delta>0$ tales que la función inversa

$$(G|_{B_\delta(x_0,y_0)})^{-1}:B_\rho(x_0,0)\to B_\delta(x_0,y_0),$$

de la restricción a las bolas abiertas

$$G|_{B_\delta(x_0,y_0)}:B_\delta(x_0,y_0)\to B_\rho(x_0,0)$$

es diferenciable con derivadas parciales de primer orden continuas en el conjunto abierto $B_\rho(x_0,0)$.

Denótese $(G|_{B_\delta(x_0,y_0)})^{-1}(z,w) = (g_1(z,w), g_2(z,w))$ donde

$$g_1 : B_\rho(x_0,0) \to \mathbb{R}^m, \qquad g_2 : B_\rho(x_0,0) \to \mathbb{R}^n,$$

y $(z,w) \in B_\rho(x_0,0) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Como

$$\begin{aligned}(z,w) &= G|_{B_\delta(x_0,y_0)} \circ (G|_{B_\delta(x_0,y_0)})^{-1}(z,w)\\ &= G|_{B_\delta(x_0,y_0)}(g_1(z,w), g_2(z,w))\\ &= (g_1(z,w), F(g_1(z,w), g_2(z,w)),\end{aligned}$$

se sabe que

$$g_1(z,w) = z \qquad \text{y} \qquad F(z, g_2(z,w)) = w,$$

para todo $(z,w) \in B_\rho(x_0,0)$. Además,

$$\begin{aligned}(x,y) &= (G|_{B_\delta(x_0,y_0)})^{-1} \circ G|_{B_\delta(x_0,y_0)}(x,y)\\ &= (G|_{B_\delta(x_0,y_0)})^{-1}(x, F(x,y)) = (x, g_2(x, F(x,y))),\end{aligned}$$

por lo cual $g_2(x, F(x,y)) = y$, para todo $(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)$.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ el conjunto abierto tal que si $x \in U$, entonces $(x,0) \in B_\rho(x_0,0)$. Tómese $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = g_2(x,0)$. Se tiene que $f(x_0) = g_2(x_0, F(x_0,y_0)) = y_0$ y $F(x, f(x)) = F(x, g_2(x,0)) = 0$, para todo $x \in U$.

Las derivadas parciales de primer orden de f son continuas en U, pues las derivadas parciales de $(G|_{B_\delta(x_0,y_0)})^{-1}$ son continuas en $B_\rho(x_0,0)$ (en el Ejercicio A.4 se pide mostrar que $df(x)(z) = dg_2(x,0)(z,0)$ para todo $x \in U$ y $z \in \mathbb{R}^m$).

Si $f_1 : U \to \mathbb{R}^n$ es otra función con estas mismas características, entonces

$$G(x, f(x)) = (x, F(x, f(x))) = (x,0) = (x, F(x, f_1(x))) = G(x, f_1(x)),$$

para todo $x \in U$. Como G es biyectiva se concluye que $f = f_1$, lo cual completa la prueba de (a)

Acerca de la bibliografía. Como es común en las áreas centrales de las matemáticas, la literatura disponible para estudiar cálculo en varias variables y elementos de análisis real es más que abundante. La siguiente lista pretende invitar al lector a revisar tantas referencias como le sean posible, para así ampliar su formación general como matemático; y hacerle ver los diferentes niveles y enfoques que un tema como este podría tomar.

Bibliografía

[1] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*. AdissonWesley, Reading, Massachusetts, 1967.

[2] R.G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*. John Wiley, New York, 1976.

[3] R. C. Buck, *Advanced Calculus*. Third Edition, McGraw-Hill, Inc. New York, 1978.

[4] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk, *Multidimensional Real Analysis*. Vol. I. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] W. R Wade, *An Introduction to Analysis*. Third edition,

Apéndice A

Ejercicios

En matemática es fundamental al estudiar cada concepto, hacer una buena dosis de ejercicios y problemas que ayuden a clarificar diferentes puntos y situaciones. La siguiente lista de ejercicios invita al lector a verificar su nivel de comprensión y dominio de los resultados expuestos en este documento.

EJERCICIOS

A.1 ¿Para qué puntos (x, y), las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, poseen diferencial invertible?

$f(x,y) = (x, xy)$; $g(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$;

$h(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$; $i(x,y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$;

$j(x,y) = (ax + by, cx + dy)$ con a, b, c, d parámetros reales.

A.2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

a) Mostrar que f es diferenciable en $]-1,1[$ con $f'(0) = 1$.

b) Mostrar que no existe un subconjunto abierto de $f(]-1,1[)$ sobre el cual f^{-1} exista. Sugerencia: verificar que para $k \in \mathbb{N}$,

$$f\left(\frac{2}{(4k-1)\pi}\right) \leq f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) \leq f\left(\frac{2}{(4k-3)\pi}\right),$$

*

y concluir que f no es inyectiva en ningún conjunto abierto que contenga al 0.

A.3 Considérese la función

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Mostrar que si (x_0,y_0) es un extremo de esta función sujeta a la restricción $x^2+y^2=1$, entonces

$$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, el vector (x_0,y_0) es un vector propio para la matriz simétrica A con valor propio λ. Generalizar este resultado de la siguiente manera. Sea A una matriz simétrica de orden $n \times n$ y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = Ax \cdot x$. Mostrar que si esta función f sujeta a la restricción $||x|| = 1$ posee un extremo local en el punto x_0, entonces x_0 es un vector propio para la matriz A (cuyo valor propio es precisamente el multiplicador de Lagrange). Comparar el valor del multiplicador de Lagrange con el valor de dicho extremo local.

A.4 Usar la matriz jacobiana para verificar la fórmula para dG en la demostración del Teorema 1.6. Verificar además que $df(x)(z) = dg_2(x,0)(z,0)$ para todo $x \in U$ y $z \in \mathbb{R}^m$. Dar una fórmula explícita para df en términos de dF (o las derivadas parciales de F).

A.5 Sea $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$. Encontrar los valores x para los cuales la relación $F(x,y) = 0$ define a y como una función de x en forma local.

A.6 En cada caso mostrar que la relación $F(x,y) = 0$ define a y como una función f de x en forma local alrededor de x_0 con $F(x_0,y_0) = 0$. Además, tratar de obtener una forma explícita para $f(x)$. En su defecto, calcular el valor en el punto en cuestión.

a) $F(x,y) = x^2 - y - y^3$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;

b) $F(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3} - 2$, $(x_0,y_0) = (1,1)$;

c) $F(x,y) = 2\operatorname{sen} x + \cos y - 3$, $(x_0,y_0) = (\pi/2,0)$.

A.7 En cada caso mostrar que la relación $F(x,y,z) = 0$ define a z como una función f de (x,y) en forma local alrededor de (x_0,y_0) con $F(x_0,y_0,z_0) = 0$. Además, tratar de obtener una forma explícita para las derivadas parciales de primer orden de f. En su defecto, calcular el valor en el punto en cuestión.

a) $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,2)$;

b) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - e^z$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,0,0)$;

c) $F(x,y,z) = x + y - z - \cos(xyz)$, $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,-1)$.

A.8 Mostrar que la relación

$$F(x,y,z) = (x+y+z, x-y-2xz) = (0,0)$$

define a y y a z como funciones f^1 y f^2 de x en forma local alrededor de 0 con $F(0,0,0) = (0,0)$. Obtener una forma explícita para f^1 y f^2 y sus derivadas.

A.9 Mostrar que la relación

$$F(x,y,z,v,w) = (2e^x + yv - 4w, y\cos x - 6x - 2v + 3w) = (0,0)$$

define a (x,y) como una función f de (z,v,w) en forma local alrededor de $(3,2,1)$ con $F(0,1,3,2,1) = (0,0)$. Calcular $df(3,2,1)$.

A.10 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con primera derivada continua tal que $f(0) \neq 0$. Considérese la relación

$$xf(y) = \int_0^y f(xt)\,dt.$$

Mostrar que existen abiertos U, V alrededor de 0 en $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in U$ existe una función $y = y(x) \in V$. Además mostrar que $y(x)$ posee primera derivada continua en U y $y'(0) = 1$.

A.11 ¿Bajo qué condiciones para f y g es posible resolver el sistema

$$f(x,y,z) = 0 = g(x,y,z),$$

para y y z en términos de x?

A.12 ¿Bajo qué condiciones para f, g y h es posible resolver el sistema

$$f(x,y,z,w) = g(x,y,z,w) = h(x,y,z,w) = 0,$$

para x, y y z en términos de w?

A.13 Si $f(1) = 0$, ¿bajo qué condiciones es posible resolver la ecuación

a) $2f(xy) = f(x) + f(y)$;

b) $f(xy) = f(x) + f(y)$;

para y en términos de x alrededor de $(1,1)$?

A.14 Si $f(1) = 0 = g(1)$, ¿bajo qué condiciones es posible resolver el sistema

$$f(xy) + g(yz) = 0 = g(xy) + f(yz),$$

para y y z en términos de x alrededor de $(1,1,1)$?

A.15 Si $F(0,0) = 0$, ¿bajo qué condiciones para F es posible resolver la ecuación

$$F(F(x,y),y) = 0,$$

para y en términos de x alrededor de $(0,0)$?

A.16 Discutir la solución de la ecuación

$$x^2 + y + \operatorname{sen}(xy) = 0,$$

para una de las variables en términos de la otra, alrededor del punto $(0,0)$.

A.17 Discutir la solución del sistema

$$x^2 - yz = 0 = xy + zv,$$

para z y v en términos de x y y.

A.18 Discutir la solución del sistema dado, para dos de las variables en términos de la tercera:

a) $xy + 2yz - 3xz = 0 = xyz + x - y$, alrededor de $(1,1,1)$;

b) $x^2 + y^2 - 4 = 0 = 2x^2 + y^2 - 8z^2 - 8$, alrededor de $(2,0,0)$.

A.19 Discutir la solución de la ecuación

$$xy - z \ln y + e^{xz} = 1,$$

para una de las variables en términos de las otras dos, alrededor del punto $(0,1,1)$.

A.20 Calcular las derivadas parciales de z con respecto a x y a y, si la relación $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y + 0$ define a z implícitamente en términos de x y y.