Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 14, No 2. Marzo — Agosto 2014.

Artículo de sección
ISSN 1659 -0643

La Influencia de Élie Cartan sobre la Obra de Albert Einstein

Rafael A. Alemañ B.
raalbe.autor@gmail.com
Universidad de Alicante
España

Resumen. Sin Élie Cartan, las matemáticas y la física del siglo XX serían muy distintas de las que conocemos, especialmente en relación con el intento de Einstein de construir una teoría de campo unificado. Cartan introdujo la noción de ""tétrada'" o *vielbein*, que dio cabida al concepto de torsión, vinculado primero con el campo electromagnético y más tarde con el espín cuántico, a partir del cual se desarrolló también la noción de espinor. Einstein mismo se vio seducido durante un tiempo por las ideas geométricas de Cartan, que, –si bien no llegaron a buen puerto en la unificación de las fuerzas fundamentales– constituyen hoy un patrimonio irrenunciable de todos los teóricos.

Palabras clave: Cartan, torsión, tétradas, espinor, geometría diferencial

Abstract. Without Élie Cartan, twentieth century mathematics and physics would have been very different from how we know it, mainly regarding Einstein's attempt to construe a unfied field theory. Cartan introduced the notion of "tetrad" or vielbein, which accommodated the concept of torsion which was at first linked to electromagnetic field and later to quantum spin. From this starting point, Cartan also developed the notion of spinor. Einstein himself was temporarily seduced by Cartan geometrical ideas which-despite not having succeeded in the unfication of the fundamental forces-now constitute an inalienable heritage of all theoretical physicists.

KeyWords: Cartan, torsion, tetrads, spinor, differential geometry

1.1 Introducción

Entre los matemáticos que influyeron decisivamente en los métodos matemáticos que moldearon la física del siglo XX, destaca el francés Élie Cartan (1869-1951), cuyos trabajos dirigidos a extender el alcance de la geometría diferencial riemanniana atrajeron el interés de Einstein. El sabio alemán denominó "teleparalelismo" a la teoría geométrica de Cartan, y trató de utilizarla en su búsqueda de un campo unificado para la física fundamental. En cierto modo, las raíces del teleparalelismo arrancan de la propia introducción de la conexión afín como idea geométrica por Levi-Civita en 1917. La conexión afín, cuya expresión más general poseerá una parte simétrica y otra antisimétrica, se toma simplemente simétrica en la geometría de Riemann. Pero si consideramos que la parte antisimétrica no se anula, y la denominamos ""torsión′" lograremos enriquecer dramáticamente el abanico de nuevas posibilidades geométricas[1]. El teleparelismo surge cuando la curvatura total (combinación de la curvatura métrica, debida a g, y la curvatura afín, proveniente de Γ) es cero. A menudo se habla también de teleparalelismo ante la anulación del tensor de Ricci −una condición menos restrictiva− y no de la curvatura.

Todas estas ideas, si bien no lograron la buscada fusión entre la gravedad y la electrodinámica, abrieron nuevos caminos en la matemática y la física fundamental; caminos que aún hoy día siguen en proceso de exploración. Por ello, a lo largo de este artículo examinaremos el desarrollo de las ideas matemáticas de Élie Cartan –tras una breve exposición de sus rasgos biográficos– que más influyeron en los esfuerzos de Einstein durante su búsqueda de una teoría que unificase las fuerzas físicas fundamentales en un esquema coherente. Y veremos el influjo del gran matemático francés no solo en la obra del propio Einstein, sino también en la de todos cuantos trabajaron como él en busca de una teoría de unificación.

1.2 La vida y obra de Élie Cartan

Cartan forma parte del elenco de ilustres matemáticos que, desde Laplace a Poincaré, dieron lustre y gloria a la ciencia francesa. Nacido en Dolomieu (Savoie), nueve años después de que esa región resultase anexionada a Francia, sus padres fueron Anne Cottaz, ama de casa, y el herrero Joseph Cartan. Era la suya una familia muy modesta, como la mayoría de las de su misma condición social. Y en la Francia del siglo XIX, la escasez de recursos económicos suponía un obstáculo insalvable en el camino de cualquier joven hacia la educación superior.

Pero la suerte sonrió en su niñez al pequeño Élie, cuyas extraordinarias dotes para la matemática impresionaron al entonces joven inspector de educación –y futuro presidente del Senado de la III República– Antonin Dubost. Durante una visita a la escuela primaria de Dolomieu, en el Departamento de los Alpes franceses, Dubost quedó perplejo ante el desbordante talento demostrado por Élie Cartan. Tan magnífica impresión se tradujo en la concesión de un subsidio estatal, de cuya solicitud se ocupó Dubost, destinado a sufragar la educación universitaria de Élie. Esta subvención le permitió acabar su periodo escolar en el Liceo de Lyon, donde se graduó con las mejores calificaciones en matemáticas, y acudir después a la Escuela Normal Superior de París.

En esa institución académica permaneció desde 1888 hasta 1894, cuando obtuvo su doctorado. Fue nombrado entonces profesor de la universidad de Montpellier, donde permaneció los siguientes dos años. Entre 1896 y 1903 enseñó en la universidad de Lyon, tras lo cual se le designó profesor de la universidad de Nancy, aunque en 1909 se trasladó a París como profesor en la Sorbonna. Allí, mientras impartía lecciones de mecánica racional y geometría superior hasta su jubilación en 1940, obtuvo la

[1]Estrictamente hablando, la torsión se identifica con la parte antisimétrica de la conexión únicamente en un sistema de coordenadas que constituya una base de espacio vectorial en la variedad utilizada.

cátedra de Cálculo Diferencial e Integral.

En 1903 contrajo matrimonio con Marie-Louise Bianconi, fruto del cual nacieron tres hijos y una hija. De los tres varones sólo Henri Cartan –matemático prominente como su padre– tendría una vida prolongada. Los otros dos sufrirían finales trágicos, el dolor de los cuales minaría decisivamente la salud del padre. Jean Cartan, músico y compositor, murió de tuberculosis a los 25 años, mientras su hermano Louis, miembro de la resistencia francesa durante la Segunda Guerra Mundial, fue capturado por los ocupantes germanos. La familia permaneció sin noticias de su suerte hasta que en mayo de 1945, acabado ya en conflicto en Europa, se supo que el joven Louis había sido asesinado por los nazis en diciembre de 1943. Cuando conoció el funesto destino de su hijo Cartan contaba 75 años de edad, y ese nuevo infortunio cayó sobre él con efectos devastadores. El poco más de un lustro que vivió después, fue un suave pero continuo declive en el ánimo y la vitalidad del genial matemático francés.

La lista de los reconocimientos recibidos, aunque a una edad algo tardía, hacen honor al formidable talento y la soberbia brillantez de Élie Cartan. Le fueron concedidos títulos honoríficos por las universidades de Liege en 1934, Harvard en 1936, así como por la Universidad Libre de Berlín, la de Bucarest y la de Lovaina en 1947. El uno de mayo de ese mismo año ingresó como miembro de pleno derecho en la *Royal Society*de Londres, y al año siguiente obtuvo un doctorado *honoris causa* por la Universidad de Pisa. Cartan ya era vocal de la Academia Francesa de las Ciencias desde 1931, si bien fue en 1945 cuando alcanzo la vice-presidencia y en 1946 la presidencia.

Tal como él mismo dejo escrito, sus principales líneas de trabajo versaron sobre los grupos de Lie, así como sobre la reformulación de los sistemas de Pfaff (ecuaciones diferenciales de primer orden) mediante la noción de ""forma diferencial". Cartan definió el concepto general de forma diferencial antisimétrica tal como hoy día se usa, y su formalización de la derivada externa como una operación puramente geométrica e independiente de las coordenadas condujo de modo natural a la idea de las formas diferenciales de grado p, las p-formas. También se debe a Cartan la difusión de la teoría de grupos algebraicos — de tan extenso uso en las matemáticas modernas y la física teórica — cuyo desarrollo más completo no se alcanzó hasta la década de 1950.

Pero quizás fuesen sus trabajos sobre formas diferenciales los que mayor impacto tuvieron sobre la comunidad científica. Tras extender el álgebra de Grassmann a su teoría de las formas diferenciales externas –desarrollada entre 1894 y 1904– Cartan aplicó sus métodos a una gran variedad de problemas en geometría diferencial, dinámica y relatividad. Hacia 1904 sus intereses se concentraron en la solución de ecuaciones diferenciales, área en la que también obtuvo resultados descollantes. Su técnica consistía en poner de manifiesto los aspectos invariantes de los problemas formulados, de modo que no dependiesen de las variables empleadas ni de funciones desconocidas.

Asimismo, la teoría de los espinores fue propuesta por Cartan en 1913. Desde un punto de vista meramente matemático, los espinores pueden concebirse como vectores complejos capaces de proporcionar representaciones bidimensionales de rotaciones tridimensionales. Su importancia en el posterior desarrollo de la teoría cuántica es difícil de exagerar.

Sin embargo, para nuestros propósitos ocupan una posición crucial sus trabajos sobre la ampliación de la geometría diferencial, considerando aquellos espacios sobre los que actúa un grupo de Lie de transformaciones arbitrarias. Por ese camino llegó Cartan a la noción de ""referenciales móviles" (*moving* *frames*) que generaliza la teoría cinemática de Darboux[2]. El curso de estos desarrollos también situó a Cartan ante el concepto de ""haces fibrados’" aun cuando el matemático francés jamás llegó a ofrecer una definición explícita de esta idea en sus escritos.

1.3 Un nuevo método: los *Vierbein*

La teoría de referenciales móviles contiene un ingrediente cuya potencia formal quedó pronto de relieve. Se trata de las "tétradas" o vierbeins en alemán[3], los cuales surgieron en la mente de Cartan bajo la influencia, sin duda, de los descubrimientos einsteinianos sobre las repercusiones físicas de las geometrías de Riemann. Un intelecto despierto y poderoso como el de Cartan no podía permanecer ajeno a la marea que anegaba la comunidad científica a comienzos del siglo XX por obra y gracia de la Relatividad de Einstein.

El procedimiento de Cartan consiste en partir de una variedad diferencial riemanniana cualquiera M (que por simplicidad supondremos con la misma dimensionalidad en todos sus puntos), y un referencial definido en un punto P de la misma, entendido como una base de espacio vectorial del espacio tangente a M en P. Esto significa que tenemos n vectores (si la dimensión de M es n), $t_1,...,t_n$, linealmente independientes que son tangentes a M en P. Entonces, tendremos un referencial móvil si en un entorno E de P disponemos además de un conjunto de n campos vectoriales, $T_1,...,T_n$, que son funciones continuas de los puntos de E. Ahora es obvio que los campos T marcan, por así decirlo, la senda por la que nuestro referencial t se desplaza de un punto a otro; naturalmente, para diferentes desplazamientos necesitaremos distintos campos T.

Como en el caso más habitual operamos con $n = 4$, es comprensible denominar tétradas a nuestro sistema de ejes móviles. Alternativamente cabe imaginar, no que las tétradas t se desplazan de un punto a otro siguiendo los campos T, sino que lo han hecho previamente y tenemos ya una tétrada en cada punto del espacio. Por ello es también habitual hablar de "campo tetrádico"(tetradic field) para expresar en el fondo el mismo significado físico y matemático que antes. En cierto modo las tétradas actúan como "puentes"que se asientan por una parte sobre el espacio−tiempo curvo pseudo–riemanniano, y por otra sobre el espacio tangente en cada punto del mismo[4].

A continuación podemos introducir una conexión afín, que llamaremos "conexión de Cartan", de tal modo que el transporte paralelo que define es el determinado por las tétradas. Dicho de otro modo, la derivada covariante de las tétradas según la conexión de Cartan, se anula. Pero esto no es todo, pues también podemos introducir una métrica que defina las tétradas como cuartetos de vectores ortonormales. Ahora, la existencia de un tensor métrico permite deducir unívocamente una segunda conexión afín compatible con ella –la afinidad usual de Levi-Civita– cuya torsión se anula aunque su curvatura en general no. A los físicos de hoy, habituados a los espacios tangentes, fibrados y a todo el arsenal matemático al uso, puede parecerles una auténtica trivialidad el nacimiento de las tétradas y los de-

[2]Gaston Darboux (1842-1917) analizó mediante la geometría diferencial las configuraciones geométricas creadas por puntos y líneas de una cierta superficie cuando ésta se desplaza rodando sobre otra superficie.
[3]Por costumbre la voz alemana vierbein, literalmente "cuatro patas" o "tetrápodo", se reemplaza por vielbein ("multípodo") en el caso de que la dimensión de nuestra variedad sea superior a cuatro
[4]La presencia de tétradas locales es siempre posible en una variedad analíticamente suave. En cambio, los campos tetrádicos globales sobre una variedad requieren condiciones topológicas igualmente globales que permitan su existencia.

sarrollos que condujeron a Cartan hacia esa idea. Haríamos bien, no obstante, en situarnos en la época de los autores de tales descubrimientos para mejor comprender que hubo un tiempo en el que nada existía de lo que ahora nos es familiar y se nos antoja imprescindible.

Mediante las tétradas, la torsión adquiere su expresión más simple como magnitud geométrica, y además nos brinda un camino natural para incorporar al espacio-tiempo el momento angular intrínseco ("espín") de las partículas elementales. En una geometría como la de Cartan, los vectores que se desplazan a lo largo de las líneas de los campos vectoriales que definen las tétradas, quedan a salvo de cualquier rotación. Por ello se dice que en el teleparalelismo no hay curvatura, a diferencia de los espacios riemannianos donde los vectores sí experimentan cambios de orientación en los desplazamientos paralelos. Sin embargo, si dos vectores iguales en un punto se separan, permaneciendo uno de ellos inmóvil mientras el otro describe una trayectoria cerrada, ambos quedarán finalmente paralelos pero situados en puntos separados. Esa separación es el fenómeno computable a través del tensor de torsión.

Figura 1.1: Élie Cartan

Cartan sugirió una modificación de la Relatividad General de modo que se permitiese la existencia de torsión en el espacio-tiempo, además de la curvatura usual, probablemente influenciado por los trabajos de los hermanos Cosserat [1], quienes estudiaron los medios continuos generalizados considerando un tensor asimétrico de esfuerzos y un tensor de momentos también. Como el tensor de torsión es antisimétrico, podemos construir la conexión afín mediante el tensor métrico y el de torsión para obtener así una afinidad también asimétrica. Así ocurre que cuando un vector describe una trayectoria cerrada (infinitesimal, estrictamente hablando), si proyectamos ese camino recorrido sobre el espacio plano tangente la presencia de torsión se manifiesta en la transformación del contorno cerrado en uno abierto. Las variedades espacio-temporales –y por ello con cuatro dimensiones, una de ellas temporal– dotadas de torsión, se denominan genéricamente U_4.

1.4 La interpretación física de la torsión

Einstein dijo haber redescubierto por sí mismo la geometría de Cartan bajo el nombre de "teleparalelismo"(fernparalelismus), aunque también es conocida como "paralelismo a distancia"o "paralelismo absoluto"[5]. En el fernparalelismus de Einstein, las variables geométricas básicas son los sistemas de n ejes mutuamente ortogonales, definidos sobre los espacios tangentes en cada punto de la variedad 4-dimensional de base, que ya conocemos como tétradas. Gracias a este procedimiento, es posible comparar la dirección de vectores tangentes en diferentes puntos de la variedad, y de ahí el nombre de paralelismo a distancia.

Al acogerse a este método Einstein comprendió que la especificación en cada punto de los cuatro vectores de las tétradas, obligaba a determinar dieciséis componentes en lugar de las diez componentes del tensor métrico habitual en la geometría de Riemann. Su intención, entonces, era aprovechar los nuevos grados de libertad suministrados por estas componentes adicionales para insertar en ellos el campo electromagnético.

El caso es que al construir el tensor de curvatura mediante las componentes de la conexión afín (la afinidad habitual de Levi-Civitá) y las de la torsión, ambas contribuciones se compensan mutuamente y la curvatura total se anula. Gracias a ello tiene sentido hablar del desplazamiento paralelo de las tétradas[6] mientras sus ejes mantienen las mismas orientaciones en todo lugar [2]. Y al igual que en el mundo euclídeo, la geometría de Cartan recupera un cierto número de características, digamos, absolutas en abierto contraste con los primeros intentos de unificación debidos a Weyl, quien trató de relajar la rigidez, en su opinión excesiva, de las reglas geométricas de Riemann. También a Schouten se debe una interpretación geométrica del vector de torsión en una geometría con conexión semisimétrica [3].

Einstein publicó sus primeros escritos al respecto [4, 5] en 1928, ignorando, según parece, los desarrollos previos del matemático francés [6, 7, 8] y de Roland Weitzenboeck (1885-1955) sobre el mismo tema entre 1922 y 1923 [9]. Cartan escribió a Einstein [10] recordándole que mientras éste ofrecía conferencias en el Collège de France, él mismo le había hablado del teleparalelismo[7] "tomando una esfera y tratando como paralelos dos vectores que formasen el mismo ángulo con los meridianos que pasasen por sus dos orígenes: las geodésicas correspondientes eran las líneas de sus rumbos o trayectorias".
Se dan, no obstante, serios inconvenientes al utilizar la superficie de una esfera (una di-esfera, S^2, hablando algebraicamente) como ejemplificación del paralelismo absoluto1. Siguiendo a Cartan en su imagen de la superficie terrestre como un caso de S^2 , es el campo magnético dipolar de nuestro planeta –con su acción sobre las agujas imantadas de las brújulas obligándolas a apuntar hacia el norte geográfico– lo que realmente suministra aquí la noción de teleparalelismo. Muy bien podría haber sido este mismo hecho el que sugirió a Cartan la posibilidad de emplear la torsión para describir geométricamente el electromagnetismo.

El asunto quedó todavía más oscurecido por el hecho de que Cartan nunca utilizó explícitamente el concepto de conexión afín, pese a haberlo desarrollado en buena medida él mismo en la geometría. Y hubiese ayudado mucho, pues dado que la curvatura y la torsión son conceptos referidos a la conexión afín, la persecución de una geometría simultáneamente con curvatura y torsión se traduce en la búsqueda de una relación entre dos conexiones afines sobre una misma variedad de base[8] [11]. Por

[5]En realidad, las direcciones tangentes sobre esta di-esfera no forman un grupo de Lie.
[6]El concepto de "campos vectoriales paralelos" había sido introducido ya en libros de texto avanzados por Eisenhart entre 1925 y 1927, prescindiendo de la idea de métrica. En concreto, la anulación del tensor de curvatura afín se presentaba como la condición necesaria y suficiente para la existencia de N campos linealmente independientes en un espacio afín $N-$dimensional.
[7]Recogido en una carta de Cartan a Einstein el 8 de mayo de 1929.
[8]Puede demostrarse (véase referencia 11) que los únicos espacios que admiten teleparalelismo en el sentido de Cartan, son aquellos que constituyen grupos de Lie, con la notable excepción de la hepta-esfera S^7.

ello en los diversos artículos publicados por Cartan en el lustro que media de 1923 a 1927, aparecen numerosos ejemplos de espacios que poseen ambos tipos de conexión. Es cierto, sin embargo, que como Einstein pretendió combinar una afinidad sin curvatura con una métrica no trivial[9], el resultado fue obtener de hecho dos conexiones afines para el mismo espacio-tiempo.

La ambigüedad inherente en la interpretación física de ambas afinidades, fue uno de los factores determinantes a la hora de inclinar a Einstein hacia el abandono final del teleparalelismo.

Dado que no se planteó en aquel momento aplicación física alguna para el teleparalelismo [12, 13], tampoco es tan extraño que Einstein no recordase específicamente los comentarios de Cartan, aun cuando hubiesen podido jugar algún papel subconsciente en la elaboración de sus ideas. En una investigación concerniente a los espacios con grupos continuos simplemente transitivos realizada en 1925, Eisenhart había hallado la conexión para una variedad con teleparalelismo que Einstein redescubrió tres años después [14]. En 1926 firmó un artículo conjuntamente con Cartan sobre "Geometrías riemannianas que admiten paralelismo absoluto"[15]. Sea como fuere, en su correspondencia mutua Einstein admitió posteriormente la prioridad de Cartan[10]. El asunto se resolvió con un envío conjunto de dos artículos sobre el tema –uno de Einstein y otro de Cartan– a la revista Mathematische Annalen. Es de señalar que en ese trabajo Cartan se permite interpretar el significado físico de las propiedades geométricas típicas del teleparalelismo [16]:

> "Digamos sencillamente que los fenómenos mecánicos son de naturaleza puramente afín, mientras que los fenómenos electromagnéticos son esencialmente métricos; por lo tanto, es muy natural tratar de representar el potencial electromagnético mediante un vector que no sea puramente afín".

Einstein, por su parte, parecía experimentar sentimientos encontrados acerca de esta teoría [17]: "Podría mostrar que las ecuaciones de campo, en primera aproximación, conducen a ecuaciones correspondientes a la teoría gravitatoria de Newton-Poisson y a la teoría de Maxwell. No obstante, todavía estoy lejos de sentirme capaz de afirmar que las ecuaciones deducidas poseen un significado físico. La razón es que no pude deducir ecuaciones del movimiento para partículas."Quizás en esta observación se vislumbre la razón de que tras la publicación de nueve artículos al respecto entre 1928 y 1930, Einstein abandonase finalmente el camino del teleparalelismo.

1.5 En la estela de Cartan

En su primer escrito sobre el paralelismo absoluto, Einstein no menciona aspecto dinámico alguno y se concentra en las bases geométricas de la idea, introduciendo un campo $n-$ádico (tetrádico en el caso 4-dimensional) h^a_μ en cada punto de una variedad diferenciable[11]. En este marco, el teleparalelismo significa que si las componentes referidas a la tétrada local de un cierto vector en un punto p_A, $A^a = h^a_\mu A^\mu$, son las mismas que las de un vector B^a en un punto diferente p_B, $A^a = B^a$, decimos

[9]Una cierta distribución de las tétradas (campo tetrádico) en cada punto de la variedad determina unívocamente la métrica. La afirmación inversa no se cumple ya que, como hemos dicho la simetría de g deja diez componentes por especificar, mientras las tétradas tienen dieciséis componentes libres.
[10]Ref. 10, p. 10.
[11]La notación original de Einstein no distingue entre los vectores de las tétradas y los covectores duales canónicos; es decir, no usa superíndices para las tétradas.

entonces que ambos vectores son paralelos en el sentido de Einstein-Cartan.

Einstein destaca que el empleo de las tétradas caracteriza simultáneamente tanto la métrica como el teleparalelismo[12]: "Mediante la introducción del campo $n-$ádico se expresan tanto la métrica de Riemann como del paralelismo distante". Los índices coordenados suben y bajan –digámoslo así– gracias al tensor $g_{uv} = h^a_\mu h^a_v$, mientras los índices de las tétradas cambian de posición utilizando δ_{ab}.

El artículo se cierra con la comparación entre el nuevo planteamiento einsteiniano y las geometrías de Riemann y Weyl. En el caso de Riemann podemos comparar a distancia las longitudes de dos vectores, pero no sus direcciones. La geometría de Weyl, en cambio, excluye la comparación a distancia de direcciones y de longitudes. Finalmente, el teleparalelismo permite comparar a distancia tanto direcciones como longitudes.

Merece la pena reseñar que en esas fechas Einstein se encontraba aquejado de serios problemas cardiacos, hasta el punto de sufrir un colapso en marzo durante su estancia en Suiza. Le fue diagnosticada una hipertrofia cardiaca y, ya de vuelta en Berlín, hubo de guardar estricto reposo, seguir una dieta sin sal y tratamiento con diuréticos. Parece ser que aprovechó sus días de convalecencia para reflexionar a fondo sobre la utilidad del teleparalelismo en el camino de la unificación. Y como la debilidad de su salud le impedía asistir a las sesiones de la Academia de Berlín, su primer artículo al respecto fue presentado por Planck.

Un interesante trabajo posterior de Einstein es un artículo –presentado como una introducción adecuada para los conocedores de la Relatividad General– que precede al de Cartan en la gaceta Mathematische Annalen[13]. En él vuelve a presentar un nuevo conjunto de ecuaciones de campo no deducidas de un principio variacional. Cartan[14], por otro lado, subrayaba en su artículo que el teleparalelismo expresa la conservación de la torsión bajo transporte paralelo[15]:

> "De hecho, en la nueva teoría del sr. Einstein, es natural llamar homogéneo al universo si los vectores de torsión asociados a dos elementos de superficie paralelos son paralelos ellos mismos; esto significa que el transporte paralelo conserva la torsión."

Tras la partida de sus ayudantes Jacob Gromer (1879-1933) y Hermann Müntz (1884-1956), Einstein se encontraba necesitado de nuevos colaboradores. Richard Von Mises le recomendó al profesor Walter Mayer (1887-1948), quien a la sazón enseñaba matemáticas en Viena tras doctorarse en teoría de invariantes y geometría diferencial. Junto con su nuevo ayudante, Einstein comenzó un estudio sistemático –y técnicamente engorroso– de la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones en la geometría del teleparalelismo [18]. En el curso de estos trabajos se añadieron nuevas restricciones a las ecuaciones consideradas aceptables, como fueron: (1) que contuviesen las derivadas primeras de las variables de campo, h^a_μ, solo cuadráticamente; (2) que las identidades aplicables a los miembros izquierdos de las ecuaciones de campo fuesen lineales en el tensor de Einstein, $G^{\mu v}$, y contuviesen únicamente sus primeras derivadas; y (3) que la torsión tan solo participase linealmente en $G^{\mu v}$.

A consecuencia de todo ello surgían ocho nuevas constantes a determinar en las ecuaciones. Tras prolijos cálculos, ambos investigadores trataron de reducir el problema a la determinación de diez cons-

[12]Ref. 4, p. 218.
[13]Ref. 17.
[14]ntre diciembre de 1929 y febrero de 1930, Einstein y Cartan se intercambiaron alrededor de una docena de cartas, que a menudo contenía largos cálculos matemáticos. Véase ref. 10.
[15]Ref. 16, p. 703.

tantes mediante veinte ecuaciones algebraicas, lo que condujo finalmente a distinguir cuatro familias de ecuaciones de campo compatibles en la teoría del teleparalelismo. Usando un diagrama de árbol, los autores clasificaron los posibles tipos de soluciones que trataron de asociar con casos ya conocidos. Los ecos del escaso éxito conseguido se perciben en el párrafo final de este artículo:

> "El resultado final de toda la investigación es el siguiente: En un espacio con métrica de Riemann y Teleparalelismo (...) hay en total cuatro tipos (no triviales) diferentes de ecuaciones (compatibles) de campo. Dos de estas son generalizaciones (no triviales) de las ecuaciones de campo originales de la gravitación, una de las cuales es ya conocida como resultado de un principio Hamiltoniano."

1.6 La geometría de Cartan y la búsqueda de la unificación

En su conjunto, los diversos artículos sobre la unificación y el teleparalelismo no fue recibida con gran entusiasmo por la comunidad de físicos profesionales. Reichenbach, conocido por su defensa de las posiciones einstenianas, hizo pública su disconformidad con tales planteamientos [19]. Eddington, ofreció en febrero de 1929 una revisión de los tres primeros trabajos de Einstein sobre el tema [20] para la revista Nature, explicando los puntos básicos de la teoría con obvias reticencias a reconocerla superior a la suya propia. Weyl tampoco respaldó la propuesta del paralelismo absoluto, al considerarla diametralmente opuesta al espíritu de su geometría gauge [21]:

> "(...) mi aproximación es radicalmente distinta, porque rechazo el paralelismo distante y mantengo la relatividad general de Einstein. (...). Varias razones me impiden creer en el paralelismo a distancia. Primero, mi intuición matemática previa se resiste a aceptar tan artificial geometría; me cuesta comprender lo que ha congelado en una rígida conjunción los sistemas de referencia locales de diferentes sucesos en sus posiciones giradas. (...) solamente por esta relajación [del vínculo entre referenciales locales] la invariancia gauge existente se hace inteligible. Segundo, la posibilidad de rotar independientemente los sistemas de referencia en diferentes sucesos, (...) es equivalente a la simetría del tensor impulso-energía, o a la validez de la ley de conservación del momento angular."

El matemático húngaro Cornelius Lanczos (1893-1974), como colaborador de Einstein, escribió un artículo de revisión del paralelismo distante titulado La nueva teoría del campo de Einstein, en el cual el propio Lanczos deslizaba sus reservas sobre el teleparalelismo [22].

En octubre de 1929, De Donder sugirió generalizar el teleparalelismo usando dos tensores métricos (uno espacio-temporal, $g_{\mu\nu}$, y otro para las tétradas, $*g_{\mu\nu}$), así como una nueva conexión afín. Eugen Wigner, en Berlín, había demostrado el año anterior [23] que la aplicación de las tétradas en la geometría del teleparalelismo, permitía formular de modo covariante general la ecuación de Dirac para el electrón con espín. En su artículo, Wigner mencionaba un trabajo previo de Tetrode [24], quien, una semana antes de la publicación del primer artículo de Einstein sobre teleparalelismo, había ofrecido ya dicha versión relativista general de la ecuación de Dirac.

Wigner rebatió la propuesta de Tetrode porque en sus desarrollos se había admitido implícitamente que la representación bidimensional del grupo de Lorentz (bi-espinores) podía ampliarse hasta incluir también el grupo afín. Para solventar estos errores, argüía Wigner, bastaba con usar el teleparalelismo. Sin embargo, en ninguna parte se afirmaba que la ecuación de Dirac únicamente podía formularse de manera covariante general por medio de la nueva teoría de Einstein.

Hacia finales de 1928, medio año después de las primeras publicaciones de Einstein sobre teleparalelismo, el profesor Zaycoff, del Instituto de Física de la Universidad de Sofia, dio a conocer el primero de una serie de cuatro artículos sobre el tema [25, 26, 27]. En ellos partía de una lagrangiana más general que la de Einstein, y utilizaba tanto conexiones afines de Levi-Civitá como conexiones del teleparalelismo. También se servia del principio de Hamilton para deducir por sí mismo las ecuaciones de Einstein y las condiciones de compatibilidad de las mismas.

Levi-Civitá fue otro de los grandes matemáticos de comienzos del siglo XX que se interesó por el teleparalelismo, hasta el punto de remitir a Einstein un artículo sobre la cuestión que se publicó en las actas de la Academia de Berlín [28]. En dicho artículo Levi-Civita utilizaba los coeficientes de rotación de Ricci, en los que se mezclan, como siempre, unos subíndices referidos a las tétradas y otros a las coordenadas. Sus ecuaciones de campo eran las ecuaciones de Einstein-Maxwell proyectadas sobre una rígida malla reticular espacio-temporal formada por tétradas fijas [29].

Hubo otros autores que se ocuparon de diversos aspectos particulares del teleparalelismo en física. G.C McVittie, por ejemplo, escribió un artículo sobre las soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein en este nuevo marco geométrico [30]. Tamm y Leontowich [31], por otra parte, al estudiar las ecuaciones de campo en el cuarto artículo de Einstein sobre teleparalelismo, hallaron que carecían de soluciones esféricamente simétricas correspondientes a una carga eléctrica puntual en reposo.
En Italia, Bortolotti [32, 33, 34] y Palatini [35] llevaron a cabo sendas investigaciones a fin de profundizar en el significado físico del teleparalelismo. En Princeton, entre 1930 y 1931, T.Y. Thomas publicó una serie de seis trabajos [36, 37, 38, 39, 40, 41] sobre paralelismo distante y teorías de unificación. El primero de ellos contenía una descripción de sus propósitos:

> "En numerosos artículos (...), Einstein ha tratado de desarrollar una teoría unificada de los campos gravitatorio y electromagnético introduciendo en el esquema de la geometría de Riemann la posibilidad del paralelismo distante. (...) nos vemos conducidos a la construcción de un sistema de ecuaciones de onda como las ecuaciones de los campos gravitacional y eléctrico combinados. Tal sistema se compone de 16 ecuaciones (...) y es estrechamente análogo al sistema de diez ecuaciones (...) en la teoría original de la gravitación [de Einstein]."

Y a continuación subrayaba el hecho de que las componentes covariantes de las tétradas, consideradas como potenciales vectores electromagnéticos, satisfacían en un sistema local de coordenadas las leyes de Maxwell para el campo electromagnético en el espacio vacío.

1.7 Consideraciones finales

El teleparalelismo pervivió en las postrimerías del siglo XX como un caso particular dentro del marco general de las teorías afín-métricas de la gravitación gauge [42, 43]. A finales de la década de 1950 la teoría gravitatoria con torsión fue redescubierta por Kibble y Sciama, quienes iniciaron la reivindicación histórica del papel de Cartan en las extensiones de la Relatividad General [44, 45]. Veinte años después comenzó a indagarse la posibilidad de incorporar estas teorías a la supergravedad [16], entonces tan en boga, y se comprobó que el problema de Cauchy para el sistema acoplado de las ecuaciones de Einstein-Cartan y las de Dirac estaba bien planteado[17]. Roger Penrose demostró algunos años más tarde que la torsión aparece de modo natural cuando se permite un cambio de escala en los espinores mediante un factor conforme complejo [46]. E incluso se ha previsto la posible aparición de nuevos fenómenos debidos a dilataciones y cizalladuras en el tejido espacio-temporal[18] Bastantes años antes de todos estos logros, ya Cartan con cierta perspicacia le advirtió a Einstein sobre su búsqueda de ecuaciones de campo libres de singularidades, capaces de explicar tanto la existencia de partículas materiales como las fuerzas fundamentales entre ellas[19]

> "Con respecto a las soluciones libres de singularidades, a mi parecer, la cuestión es extremadamente difícil. (...) Es muy posible que la existencia de soluciones sin singularidades imponga condiciones puramente topológicas sobre el continuo. (...) El espacio en el cual existe el grupo, depende por tanto, desde el punto de vista topológico, de las constantes A^k_{ij} (el tensor de torsión), y toda elección de las constantes proporciona un espacio (o una familia de espacios) que queda topológicamente definido. En suma, toda solución libre de singularidades (...) crea desde el punto de vista topológico el continuo en el cual ella misma existe."

Einstein no pareció sentirse muy afectado por los comentarios de Cartan [47, 48] acerca de las implicaciones topológicas de las geometrías con torsión no nula[20]: "Nada puedo decir sobre las propiedades de conectividad del espacio, pero me parece ineludible exigir soluciones libres de singularidades..."

La geometría espacio-temporal de Einstein-Cartan demostró ser en cierto modo una teoría viable de la gravitación que difiere muy escasamente de la Relatividad General pura, pues los efectos del espín y la torsión sólo llegan a ser significativos a densidades muy elevadas de materia o radiación. No obstante, como esas densidades son todavía superiores al límite de Planck, donde se supone que los fenómenos cuánticos se hacen ineludibles en el tratamiento de la gravedad[21] cabe esperar que el planteamiento de Einstein-Cartan se alce por encima de las teorías sin torsión como el límite clásico más adecuado de una futura teoría cuántica gravitatoria.

[16] Parece que las versiones más simples de la supergravedad equivalen a una teoría de Einstein-Cartan cuya fuente es un campo de Rarita-Schwinger anticonmutativo y de masa propia nula.

[17] Recordemos que el problema de Cauchy consiste en la posibilidad de calcular la evolución espacio-temporal de un sistema dado a partir de unas condiciones iniciales bien especificadas.

[18] Véase ref. 43.

[19] Ref. 10.

[20] Ibid. Véanse también las ref. 47 y 48.

[21] Es interesante notar que el límite de baja energía de algunas teorías de cuerdas incluye un campo cuántico de espín 2 y masa propia nula, cuya intensidad juega el papel de la torsión.

Bibliografía

[1] E. Cosserat, F. Cosserat,*Theorie des corpsdeformable.* Paris: Hermann 1909.

[2] L.P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, vol. VIII de la American Mathematical Society Colloquium Publications. Providence (U.S.A.): American Mathematical Society 1927.

[3] J.A. Schouten, "Sur la signification géométrique de la propriété semi-symmétrique d'une connexion intégrale, qui laisse invariant le tenseur fondamental" *C. R. Acad. Sci.*, **188** (1929), 1135–1136.

[4] A. Einstein, "Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffs des Fernparallelismus" *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **18** (1928*a*), 217–221.

[5] A. Einstein, "Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität" *Sitzungsber. Preuss. Akad.Wiss.*, **18** (1928*b*), 224–227.

[6] E. Cartan, "Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité" *C. R. Acad. Sci.*, **174** (1922*a*), 734–737.

[7] E. Cartan, "Sur les variétés ä connexion affine courbure de Riemann et les espaces ä torsion" *C. R. Acad. Sci.*, **174** (1922*b*), 593–595.

[8] E. Cartan, "Sur les variétés a connexion affine et la théorie de la relativité généralisée" *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **40** (1923), 325–412.

[9] C. Goldstein, J. Ritter, "The varieties of unity: sounding unified theories 1920 – 1930" en A. Ashtekar, R.S. Cohen, D. Howard, J. Renn, S. Sarkar y A. Shimony (eds.), *Revisiting the foundations of relativistic physics: festschrift in honor of John Stachel*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 93 – 134.

[10] R. Debever (ed.), *Elie Cartan-Albert Einstein: Lettres sur le parallelisme absolu 1929-1932*. Bruxelles: Academie Royale de Belgique 1979.

[11] J.A. Wolf, "On the geometry and classification of absolute parallelisms" vol. I-II, *J. Diff. Geom.*, **6** (1971/72).

[12] E. Cartan, "La Géométrie des groupes de transformations" *J. Math. Pures Appl.*, **6** (1927), 1–119.

[13] E. Cartan, J.A. Schouten, "On the Geometry of the Group-manifold of Simple and Semi-simple Groups" *Proc. K. Akad. Wetensch.*, **29** (1926), 803–815.

[14] L.P. Eisenhart, "Linear connections of a space which are determined by simply transitive continuous groups" *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **11** (1925), 246–249.

[15] E. Cartan, L.P. Eisenhart, "On Riemaniann geometries admitting an absolute parallelism", *Proc. K. Akad. Wetensch.*, **29** (1926), 933–946.

[16] E. Cartan, "Notice historique sur la notion de parallélisme absolu" *Math. Ann.*, **102** (1930), 698–706.

[17] A. Einstein, "Auf die Riemann-Metrik und den Fernparallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie" *Math. Ann.*, **102** (1930), 685–697.

[18] A. Einstein, W. Mayer, 'Systematische Untersuchung über kompatible Feldgleichungen, welche in einem Riemannschen Raume mit Fernparallelismus gesetzt werden können' *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **13** (1931), 257–265.

[19] H. Reichenbach, *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*. Berlin: De Gruyter 1928.

[20] A. Einstein, "Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip" *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **10** (1929), 156–159.

[21] H. Weyl, "Elektron und Gravitation I" *Z. Phys.*, **56** (1929), 330–352.

[22] C. Lanczos, "Die neue Feldtheorie Einsteins" *Ergeb. Exakten Naturwiss.*, **10** (1931), 97–132.

[23] E. Wigner, "Eine Bemerkung zu Einsteins neuer Formulierung des allgemeinen Relativitatsprinzips", *Z. Phys.*, 53 (1929), 592–596.

[24] N. Straumann, "Zum Ursprung der Eichtheorien bei Hermann Weyl", *Phys. Blaetter*, **43** (1987), 414–421.

[25] R. Zaycoff, "Zur Begrundung einer neuen Feldtheorie von A. Einstein", Z. Phys., **53** (1929*a*), 719–728.

[26] R. Zaycoff, "Zur Begrundung einer neuen Feldtheorie von A. Einstein. II" Z. Phys., **54** (1929*b*), 590–593,.

[27] R. Zaycoff, "Zur Begründung einer neuen Feldtheorie von A. Einstein. III', Z. Phys., **54** (1929*c*), 738–740,.

[28] T. Levi-Civita, "A proposed modification of Einstein's field theory" *Nature*, **123** (1929*a*), 678–679.

[29] T. Levi-Civita, "Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen" *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **9** (1929*b*), 137–153.

[30] G.C. McVittie, "Solution with axial symmetry of Einstein's equations of teleparallelism" *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **2** (1931), 140.

[31] I. Tamm, M. Leontowitch, "Bemerkungen zur Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie', *Z. Phys.*, **57** (1929), 354–366.

[32] E. Bortolotti, "On metric connections with absolute parallelism", *Proc. K. Akad. Wetensch.*, **30** (1927), 216–218.

[33] E. Bortolotti, "Parallelismo assoluto nella varietá a connessione affine e nuove veduti sulla relativitá" *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna*, Cl. Sci. Fis., **6** (1928), 45–58.

[34] E. Bortolotti, "Stelle di congruenze e parallelisme assoluto: basi geometriche di una recente teoria di Einstein" *Rend. Lincei*, **9**, 530–538, (1929). 168, 248

[35] A. Palatini, "Intorno alla nuova teoria di Einstein" *Rend. Lincei*, **9** (1929), 633–639.

[36] T.Y. Thomas, "On the unified field theory" *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **16** (1930*a*), 761–776.

[37] T.Y. Thomas, "On the unified field theory. II" *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **16** (1930*b*), 830–835.

[38] T.Y. Thomas, "On the unified field theory. III" *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **17** (1931*a*), 48–58.

[39] T.Y. Thomas, "On the unified field theory. IV" *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **17** (1931*b*), 111–119.

[40] T.Y. Thomas, "On the unified field theory. V" *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **17** (1931*c*), 199–210.

[41] T.Y. Thomas, "On the unified field theory.VI" *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **17** (1931*d*), 325–329.

[42] F. W. Hehl, P. Von Der Heyde, G. D. Kerlick, J. M. Nester, "General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects'. *Rev. Mod. Phys.*, **48** (1976), 393–416.

[43] F.W Hehl, J.D. McCrea, E.W. Mielke, Y. Ne'eman, "Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance" *Phys. Reports*, **258** (1995), 1–171.

[44] T.W.B. Kibble, "Lorentz invariance and the gravitational field" *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 212–221.

[45] D.W. Sciama, "On the analogy between charge and spin in general relativity" *Recent Developments in General Relativity* (volumen dedicado a L. Infeld, pp 415–439), Oxford: Pergamon Press & Warszawa 1962.

[46] R. Penrose, "Spinors and torsion in general relativity" *Found. of Phys.*, **13** (1982), 325–339.

[47] J. Vargas, "On the geometrization of electrodynamics" *Foundations of Physics*, **21** (4), 1991, 379–401.

[48] J. Vargas, D. Torr, "Finslerian structures: The Cartan-Clifton method of the moving frame" *Journal of Mathematical Physics*, **34**(10), 1993, 4898–4913.

-