Revista Digital: Matemática, Educación e Internet
ISSN: 1659-0643
revistadigitalmatematica@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica

Vrancken, Silvia; Engler, Adriana; Giampieri, Maria L.; Müller, Daniela

Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades

Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, vol. 15, núm. 1, agosto-febrero, 2015, pp. 1-20
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago, Costa Rica

Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 15, No 1. Agosto − Febrero 2015. ISSN 1659 -0643

Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades

Silvia Vrancken
svrancke@fca.unl.edu.ar
Facultad de Ciencias Agrarias
Universidad Nacional del Litoral - Argentina

Adriana Engler
aengler@fca.unl.edu.ar
Facultad de Ciencias Agrarias
Universidad Nacional del Litoral - Argentina

Maria L. Giampieri
mluciana_giampieri@hotmail.com
Facultad de Ciencias Agrarias
Universidad Nacional del Litoral - Argentina

Daniela Müller
dmuller@fca.unl.edu.ar
Facultad de Ciencias Agrarias
Universidad Nacional del Litoral - Argentina

Recibido: 2 Diciembre, 2013 Aceptado: 28 Julio, 2014

Resumen. El presente artículo incorpora algunos resultados obtenidos al investigar cómo favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de primer año de Ingeniería Agronómica. Se presenta una secuencia de actividades para analizar aspectos variacionales del concepto de función y los resultados de su implementación. Se centra la atención en la forma en que el estudio de procesos de variación permite construir acercamientos significativos para la comprensión y el uso de las funciones como modelos de situaciones de cambio. A pesar de las dificultades, se observa que su desarrollo favoreció el surgimiento de argumentos variacionales, partiendo de los conocimientos que los alumnos manejan desde sus experiencias previas.

Palabras clave: Pensamiento y lenguaje variacional, funciones, representaciones, enseñanza, aprendizaje.

Abstract. This article shows some of the research results obtained from the improvement of the development of variational thinking and language in first year students of Agronomic Engineering. A sequence of activities to allow the analysis of variational aspects of the concept of function, and the results of their implementation are shown. Attention is focused on the way the study of the processes of variation allows the creation of significant approaches to the understanding and the usage of functions as models of situations of change. Despite some difficulties, its implementation showed an improved development of variational arguments using the background knowledge posessed by the students.

KeyWords: Variational thinking and language, functions, representations, teaching, learning.

1.1 Introducción

En numerosos fenómenos de la naturaleza y la sociedad aparecen manifestaciones de la variación y el cambio. El aumento o disminución de la temperatura a lo largo del día, el crecimiento de una planta a medida que transcurre el tiempo, el ciclo de las mareas, las fluctuaciones de una población de animales según la disponibilidad de alimentos, el interés acumulado por cierto capital depositado, son muestras de esto.

Las distintas magnitudes que caracterizan estos fenómenos están íntimamente relacionadas de modo que algunas de ellas quedan completamente determinadas por los valores de las demás. Dolores (2000) expresa que, históricamente, estas relaciones tuvieron fundamental importancia en la búsqueda de las leyes generales que rigen el cambio. Este tipo de relación dio origen a la noción de función.

Sin embargo, con el paso del tiempo, este concepto ha adquirido un alto nivel de abstracción. El desarrollo del análisis y la teoría de conjuntos llevaron al tratamiento de las funciones como correspondencias muy generales dando lugar a una definición en términos conjuntistas.

Es común que en el aula universitaria se trabajen definiciones como la que presentan Larson, Hostetler y Edwards (2010, p. 9): "Sean X y Y conjuntos de números reales, una función real f de una variable real x de X a Y es una correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y".

Así, las variables y funciones pasaron de ser modelos matemáticos que reflejan la variación concreta y las relaciones entre las variables, a conceptos matemáticos abstractos distantes de los fenómenos del movimiento que les dieron origen. Refiriéndose a la actual definición de función, Freudenthal (1983, en Del Castillo y Montiel, 2007) señala:

> "...aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático".

Esta formalización se ha trasladado a la enseñanza, provocando que la comprensión del concepto de función dependa del entendimiento de nociones abstractas como conjunto, par ordenado y correspondencia, las cuales no permiten captar las ideas de variación y cambio que subyacen a este concepto, dificultando las conexiones con otras ciencias. López y Sosa (2008, p. 309) manifiestan:

> "La forma en que usualmente se suele transmitir el concepto en la escuela deja de lado el proceso de construcción del concepto de función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes."

Reconociendo que el concepto de función ha estado ligado en la historia a la modelación de procesos de variación, diversos investigadores como Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003), Villa (2008), Dolores y Salgado (2009) y Tall (2009), han centrado su atención en la forma en que la variación puede convertirse en un eje fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de este concepto.

Asimismo, los autores del Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM) apoyan la idea de que los estudiantes deben desarrollar una ¿comprensión profunda de las formas en que pueden representarse matemáticamente los cambios en las cantidades? (NCTM, 2000, p. 309), recomendando el análisis de patrones de cambio en varios contextos, y generando la posibilidad de interpretar enunciados tales como "disminuye la tasa de inflación".

El estudio de las funciones desde una perspectiva variacional está relacionado con los procesos de experimentación, reflexión, construcción de significados y formas de expresar la generalidad como resultado de los procesos de modelación matemática. El contexto se convierte en herramienta que permite el análisis y modelación de diversos fenómenos de variación provenientes de la matemática misma, de la vida cotidiana o de las ciencias naturales y experimentales.

De esta manera, los procesos de variación y cambio constituyen un aspecto de gran riqueza en el contexto escolar. La incorporación y el otorgamiento de significado a los distintos elementos relacionados a la variación favorecen el estudio de las funciones. No se trata de dejar de lado la definición formal de función, sino de introducir la noción resaltando su aspecto fundamental, el de variación, de manera de favorecer la comprensión del concepto como una relación entre variables.

En un sentido más amplio, todo esto puede influir positivamente en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos y también de su lenguaje variacional, en tanto sean capaces de comunicar sus ideas.

A partir de lo planteado, surge la necesidad de estudiar cómo favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de estudiantes argentinos de primer año de Ingeniería Agronómica.

1.2 Elementos del pensamiento y lenguaje variacional

Como parte del pensamiento matemático, el pensamiento y lenguaje variacional se relacionan con el estudio de las estrategias y acciones que los estudiantes utilizan cuando se enfrentan a situaciones que requieren el análisis del cambio. Cantoral y Farfán (2003, p. 185) expresan que:

> "El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales."

Por otro lado, en los estándares básicos de competencias desarrollados en Colombia por el Ministerio de Educación Nacional (2006, p. 66) se señala:

> "[...] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción,

> modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos."

En el mismo documento se manifiesta que uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir, desde la educación primaria, distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, más adelante, del cálculo diferencial e integral. Este tipo de pensamiento tiene un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y la matemática misma.

El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional es un proceso lento. Construir de manera significativa la noción de cambio requiere el dominio e integración de diferentes conceptos, algunos elementales, otros más avanzados e incluyendo procesos del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación y razonamiento. Implica, por un lado, el manejo de los números (naturales, enteros, racionales, reales y complejos) y las magnitudes; y por otro lado, las representaciones gráficas para magnitudes continuas. Supone además la comprensión de procesos complejos como las nociones de variación, de variable y el paso al límite.

Interesa, entonces, identificar las características del pensamiento y lenguaje variacional y la forma en que se desarrolla. Cabrera (2009, p. 55) expresa que este tipo de pensamiento se caracteriza por ?proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, a partir de las intuiciones y concepciones de los estudiantes, las cuales se trabajan y hacen evolucionar a través de situaciones problemas?. De esta manera las nociones de variación y cambio son fundamentales en el pensamiento y lenguaje variacional, centrándose en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando lo que cambia, cuantificando ese cambio y analizando cómo se dan esos cambios.

Para favorecer su desarrollo se debe procurar el planteo de situaciones variacionales, entendiéndolas como el conjunto de problemas que requieren de un tratamiento variacional tanto desde el punto de vista de las funciones cognitivas de quienes las aborden como desde la perspectiva matemática y epistemológica. Su resolución implica el análisis de distintos estados del cambio y la utilización de argumentos y estrategias variacionales, los cuales permiten el entendimiento y la explicación de los procesos de variación involucrados en los fenómenos de cambio. Una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias variacionales cuando "hace uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando" (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005, p. 464).

En relación a los procesos cognitivos implicados, las situaciones deben ser tales que los alumnos no necesiten sólo recurrir a la memoria para responderlas, sino que los conduzcan a que validen, modifiquen o construyan argumentos. El tratamiento y conversión entre distintas representaciones será de fundamental importancia para el entendimiento de las situaciones de variación. Al respecto, Posada y Obando (2006, p. 16) manifiestan:

> "El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación ?gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales ? para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen

> del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión."

El análisis del comportamiento de las funciones es uno de los rasgos esenciales que caracteriza al pensamiento variacional. Vasco (2003) señala que este estudio implica la apreciación del cambio en una o varias variables dependiendo del cambio de otras y da la posibilidad de expresar dicha variación a través de un modelo funcional. De esta manera las nociones de variable y función constituyen la base de la matemática de la variación y el cambio.

Teniendo en cuenta lo expuesto, se sostiene que el planteo en el aula de situaciones que requieran el desarrollo de argumentos y estrategias variacionales puede favorecer la comprensión significativa del concepto de función y colaborar al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes. Para comenzar a investigar sobre este supuesto se diseñó una secuencia de actividades que permite iniciar el estudio de las funciones desde esta perspectiva. En el apartado siguiente se presentan algunos aspectos relacionados a la preparación y la implementación de la misma.

1.3 El diseño e implementación de la secuencia

Con el propósito de llevar a los alumnos a identificar y comprender las funciones en situaciones de cambio, se prepararon actividades que comprenden los conceptos de variación, variable y función. El propósito de las mismas es que, al resolverlas puedan dar respuesta a tres preguntas: ¿qué cambia en la situación planteada?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? Esto implica la identificación de las variables involucradas en las distintas situaciones y su relación entre ellas, la coordinación de los cambios de una variable con los cambios de la otra variable y la cuantificación de esos cambios.

Las situaciones contemplan distintas representaciones (verbal, tabular, algebraica y gráfica), teniendo en cuenta la importancia del tratamiento y conversión entre las mismas.

Con respecto a las representaciones gráficas de las funciones, Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009) señalan: ¿Un acercamiento mayor entre las prácticas humanas cotidianas y las actividades escolares podrían fortalecer el desarrollo de las habilidades sobre interpretación y elaboración de gráficas? (p. 44). De acuerdo con esta postura se incluyeron en la secuencia tres actividades referidas a situaciones cotidianas que abarcan las nociones de variación, cambio y velocidad de cambio y que involucran tareas relacionadas a la graficación. Dos de ellas requieren la interpretación de una representación gráfica ya construida, y la otra demanda la elaboración de una gráfica a partir de información brindada sobre una determinada situación.

La secuencia se propuso a todos los inscriptos en Matemática I que, para poder cursarla, deben tener aprobada el área Matemática en el marco del programa de articulación disciplinar exigido por la universidad. En el diseño de la misma, se consideró que pudieran resolver las distintas actividades apelando a sus conocimientos previos. Antes de comenzar a desarrollar el tema "Funciones" del programa analítico, se solicitó a todos los alumnos presentes en una clase habitual, que la resolvieran entre dos.

Una vez finalizada se realizó un debate grupal. Se leyeron algunas resoluciones, se intentó remarcar los aspectos variacionales, se corrigieron y se completaron las distintas respuestas. Esta puesta en común, con los logros, dificultades y errores observados, fue utilizada en una instancia posterior para el desarrollo de los contenidos.

A continuación se presentan algunas de las actividades y se analizan las producciones de los estudiantes (sobre un total de 72 trabajos), teniendo en cuenta los resultados que se consideraron más significativos desde una perspectiva variacional. Se describen, también, las dificultades que se presentaron en su resolución, en relación a los conceptos involucrados y sus distintas representaciones.

Las primeras tres actividades contemplan situaciones específicas de variación y cambio en las que se trabajan aspectos relacionados a la noción de variable.

La variable es uno de los elementos básicos que permite caracterizar los procesos de variación y es fundamental para la construcción de la noción de función.

Para construir de manera significativa la noción de variable, es necesario establecer relaciones entre objetos o procesos que cambian. Al respecto, Gómez (2008) expresa que la idea de cambio está íntimamente asociada a la de variable, e implica necesariamente comparaciones. Para que un objeto cambie o no cambie es necesario un referente de comparación, si cambia es preciso tener en cuenta con respecto a qué cambia, si no cambia también es necesario tener en cuenta respecto de qué no cambia. Parte de la hipótesis de que la construcción de la noción de variable no es un objeto aislado, independiente, sino que emerge de la relación de al menos dos entidades, una de las cuales puede permanecer constante o incluso ambas pueden ser cambiantes. En el proceso de construcción de la noción de variable, estas "variables" pueden no ser explícitas. Por ejemplo en situaciones como ?el tamaño de una planta está aumentando" o "un recipiente que se está llenando con agua aumenta la altura del nivel". En ambos casos, se puede centrar la atención en varios aspectos, incluso las causas que provocan el aumento del tamaño y el aumento del nivel de agua, pero interesa el proceso de enfocar la atención en uno o dos aspectos, dejando de lado los demás.

Actividad 1.

Identifique qué es lo que cambia en la siguiente situación: "Mariana está inflando un globo con gas".

En esta actividad se solicita la identificación de las magnitudes que cambian. Con esto se pretende analizar si los estudiantes son capaces de determinar las variables presentes en un fenómeno.

En el análisis de las respuestas se observó en 55 trabajos (76,39%), que los alumnos lograron centrar la atención en uno o dos procesos, lo cual, según lo que manifiesta Gómez (2008), es importante en el proceso de formación de la noción de variable.

Sin embargo, en 42 trabajos (58,33%) respondieron que lo que cambia es el tamaño, sin especificar una magnitud específica. Sólo en 14 trabajos (19,44%) la respuesta fue que cambia el volumen y en algunos menos, que varía el diámetro, radio, cantidad de gas (o aire). En la Figura 1 se presentan algunas respuestas.

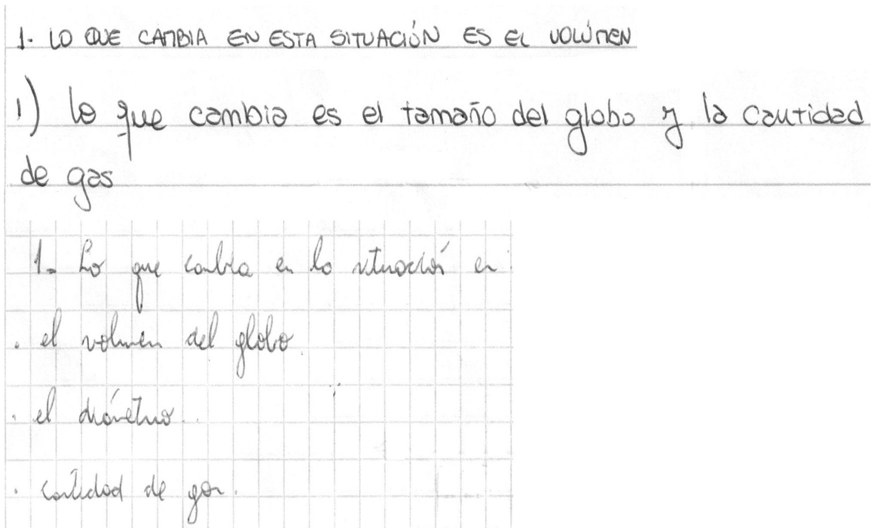


Figura 1.1

También se observaron otras afirmaciones como *"cambia la forma del globo"* o relacionadas con la causa por la que cambia el tamaño o la forma del globo: *"Lo que cambia es que Mariana puede estar o no inflando un globo, también puede ser que lo esté inflando con gas o con cualquier otra cosa"*; *"En la situación de Mariana lo que cambia es que el globo aumenta su capacidad, debido a la cantidad de gas que el globo va adquiriendo"*; *"Cambiaría el compuesto con lo que infla y la elevación si lo llegase a soltar"*; *"Al inflarlo con gas, el tamaño, peso, etc. del globo va a ser diferente que si lo infla con aire"*.

Actividad 2.

En la situación: "La cantidad de dinero recibida en un comercio de artículos de jardinería por la venta de tijeras de podar, si cada una cuesta $65".

a) Identifique qué es lo que cambia.

b) Determine con respecto a qué cambia eso que cambia.

En este caso, se solicita la identificación de las magnitudes que cambian en la situación así como también la distinción con respecto a qué cambian esas magnitudes. De esta manera se pretende analizar si los alumnos son capaces de determinar las variables que intervienen (inciso a) y reconocer las variables independiente y dependiente (inciso b). Al analizar las respuestas se advierte que muchos interpretaron la consigna de manera diferente a lo que se esperaba. Al solicitarles en el inciso a) que identifiquen qué es lo que cambia en la situación, se observó en 33 trabajos (45,33%), que los alumnos escribieron sólo la variable independiente, refiriéndose a la variable dependiente en el segundo inciso, donde se solicita que determinen con respecto a qué cambia eso que cambia. En la Figura 2 se muestran dos respuestas.

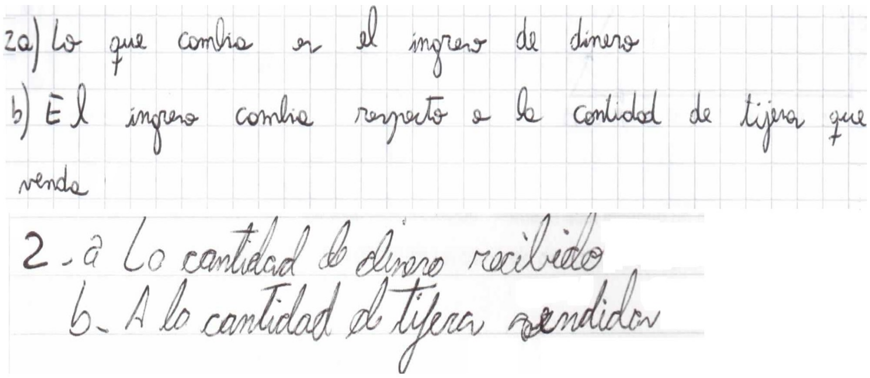

2a) Lo que cambia es el ingreso de dinero
b) El ingreso cambia respecto a la cantidad de tijera que venda
2.- a Lo cantidad de dinero recibido
b.- A lo cantidad de tijera vendidas

Figura 1.2

En cuatro trabajos se encontró que los alumnos dieron una única respuesta, sin tener en cuenta lo preguntado en cada inciso. Por ejemplo: *"Cambia la cantidad de dinero ingresado con respecto a la cantidad de tijeras vendidas"*.

Sólo 10 respondieron en el inciso a) que cambia la cantidad de tijeras vendidas y la cantidad de dinero obtenido, estableciendo correctamente la relación de dependencia entre ambas variables en el inciso b). Esto se observa en el trabajo de la Figura 3.

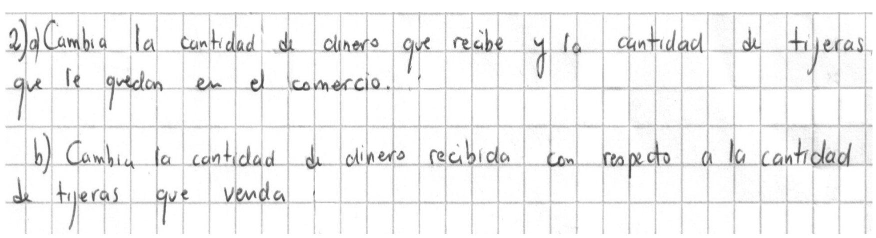

2) a) Cambia la cantidad de dinero que recibe y la cantidad de tijeras que le quedan en el comercio.
b) Cambia la cantidad de dinero recibida con respecto a la cantidad de tijeras que venda

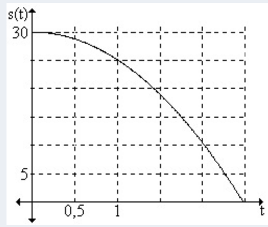
Figura 1.3

Las respuestas de otros alumnos (seis trabajos) mostraron que lograron identificar las variables pero también intentaron establecer la forma de dependencia. Por ejemplo: *"La cantidad de dinero es proporcional a la venta de artículos de jardinería"*.

Las respuestas de 19 trabajos (26,39%) se consideraron incorrectas. En cuatro de ellos se observó que invirtieron las variables independiente y dependiente. El resto no logró identificar claramente una o dos variables.

Actividad 3.

Se arroja una piedra desde lo alto de un edificio de 30 metros de altura. La función $s(t)$ representada gráficamente describe su posición a los t segundos de ser lanzada.



a) Determine las variables que intervienen en la situación planteada.

b) Indique cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.

c) Determine el intervalo de tiempo en que la piedra permanece en el aire.

d) Escriba el intervalo de variación de la altura de la piedra.

En la primera parte de esta actividad se sigue trabajando el aspecto relacionado a qué cambia en la situación planteada. Se pregunta explícitamente sobre las variables que intervienen en la situación y su clasificación en independiente y dependiente. El tercer y cuarto incisos se relacionan con la determinación de los intervalos de variación de cada una de las variables. Se consideró como intervalos correctos (0; 2,5) para la variable independiente y [0, 30] para la dependiente.

Con respecto a las variables, las respuestas en 47 trabajos (aproximadamente el 65%) fueron *"tiempo y altura"*, *"tiempo y posición"*, *"tiempo y distancia"*. Algunos confundieron una o dos de las variables con la unidad en la que se miden, respondiendo *"segundos y metros"*, *"segundos y altura"*, *"tiempo y metros"* (18 en total).

Otro error que se presentó fue escribir x e y, que son las letras con las que se suelen representar las variables independiente y dependiente. Con respecto a esta dificultad, se coincide con López y Sosa (2008), quien señala cómo la simplificación de las variables que se hace con la finalidad de facilitar los cálculos, puede ser una dificultad para el aprendizaje, de manera que al identificar las variables, sin tener en cuenta su naturaleza u origen, pueden ser llamadas simplemente x o y.

En cuanto a la identificación de las variables independiente y dependiente, casi el 64% respondió correctamente (46 trabajos). Llamó la atención que una buena parte no fue capaz de establecer correctamente la relación de dependencia, confundiendo ambas variables.

En relación a la determinación de los intervalos de variación de cada una de las variables, la mayor dificultad estuvo en la inclusión o no de los extremos.

La respuesta de los alumnos en 30 trabajos fue que el intervalo correspondiente a la variable independiente es (0; 2,5), mientras que en otros 18, incluyeron uno o los dos extremos en el intervalo de variación. Nueve dieron como respuesta el tiempo total que la piedra permanece en el aire. También aparecieron respuestas como: *[0; 2,49],(0; 2,49); (2,5; 0), la piedra permanece en el aire 2,4 segundos*, que manifiestan dificultades con el tratamiento de los números reales.

Con relación al intervalo de variación de la variable dependiente, fue menor la cantidad de respuestas correctas. En este caso además de no incluir uno o los dos extremos del intervalo, muchos intercambiaron el orden de los extremos, escribiendo $[30,0),(30,0]$ o $(30,0)$, como siguiendo la trayectoria de la piedra.

En la Figura 4 se presenta una resolución en la que respondieron de manera correcta casi todos los incisos. En el único aspecto que no coincide con la respuesta esperada es en la inclusión del extremo izquierdo del intervalo de variación del tiempo. En la discusión en clase en la instancia posterior a la resolución de las actividades se trató de dejar en claro el por qué de la inclusión o no de los extremos de los intervalos.

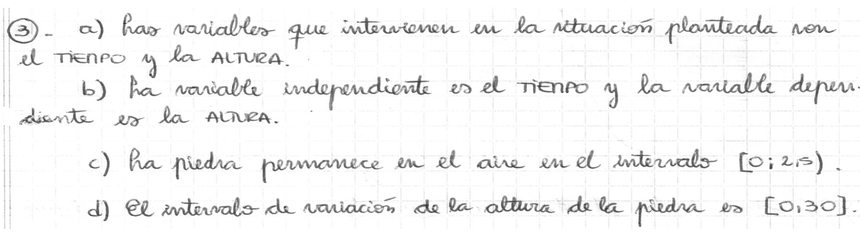

③- a) Las variables que intervienen en la situación planteada son el TIEMPO y la ALTURA.
b) La variable independiente es el TIEMPO y la variable dependiente es la ALTURA.
c) La piedra permanece en el aire en el intervalo [0;2,5).
d) El intervalo de variación de la altura de la piedra es [0,30].

Figura 1.4

En la Figura 5 se muestra un trabajo que presenta varias de las dificultades mencionadas.

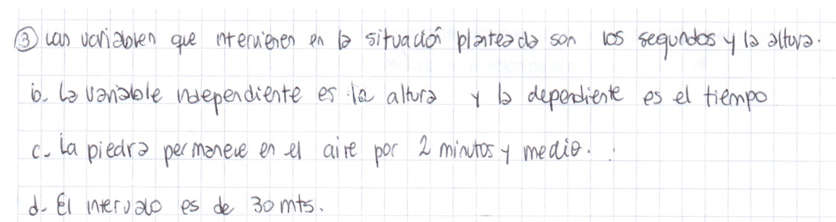

③ las variables que intervienen en la situación planteada son los segundos y la altura.
b. la variable independiente es la altura y la dependiente es el tiempo
c. la piedra permanece en el aire por 2 minutos y medio.
d. El intervalo es de 30 mts.

Figura 1.5

La actividad 4 permitió profundizar en los conocimientos que los estudiantes tienen del concepto de función y su capacidad para ejemplificar a través de un

Actividad 4.

a) Describa un fenómeno o situación que se represente con una función.

b) Identifique cuáles son las variables dependiente e independiente en el fenómeno o situación propuesta.

El análisis de las producciones mostró la presencia de muchas dificultades. La mayoría de los enunciados correspondieron a problemas típicos que se plantean en la escuela, casi todos relativos a funciones cuadráticas, como por ejemplo el lanzamiento de una pelota o una piedra.
En general, los alumnos que describieron en forma coloquial la situación, lo hicieron de manera incompleta. Se notó, como en el ejemplo de la Figura 6, que describieron una situación que puede

corresponder a una función pero prácticamente nadie expresó que hay una relación entre dos variables o la manera en que se relacionan las dos variables. Además, muchos volvieron a confundir las variables involucradas con las unidades en las que se miden.

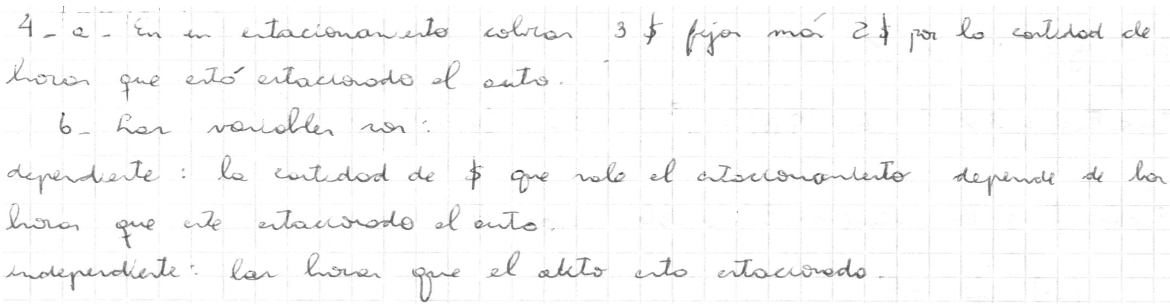


Figura 1.6

La situación que se presenta en la Figura 7 fue el enunciado más completo, aunque se observó que tuvieron dificultades con la interpretación real de la situación, ya que supusieron que la persona tiene una temperatura inicial de $0°C$.

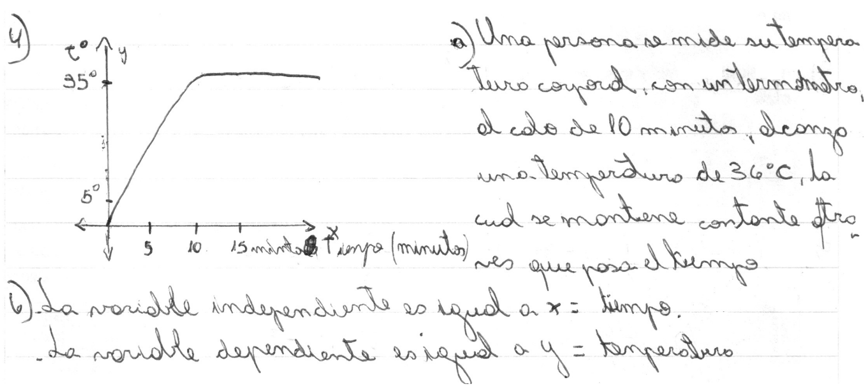


Figura 1.7

Aproximadamente en la mitad de los trabajos se observó que los alumnos utilizaron el lenguaje verbal sólo para presentar la situación y definieron la función gráficamente (Figura 8) o a través de una ley (Figura 9). Esto muestra cómo están más acostumbrados a trabajar con estas representaciones.

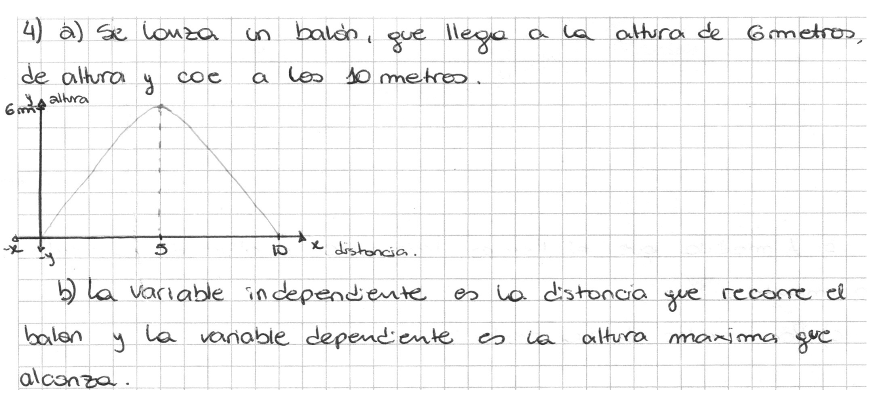


Figura 1.8

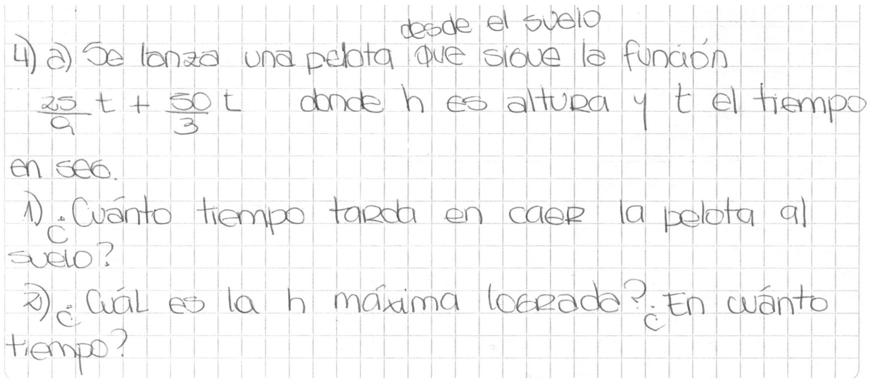

4) a) Se lanza una pelota desde el suelo que sigue la función
$\frac{25}{9}t + \frac{50}{3}t$ donde h es altura y t el tiempo
en seg.
1) ¿Cuánto tiempo tarda en caer la pelota al suelo?
2) ¿Cuál es la h máxima lograda? ¿En cuánto tiempo?

Figura 1.9

La cantidad de respuestas correctas e incorrectas fue prácticamente la misma. El principal error encontrado fue la confusión entre los conceptos de función y ecuación. En varios trabajos se encontraron enunciadas situaciones que dan lugar al planteo de una ecuación, como el de la Figura 10.

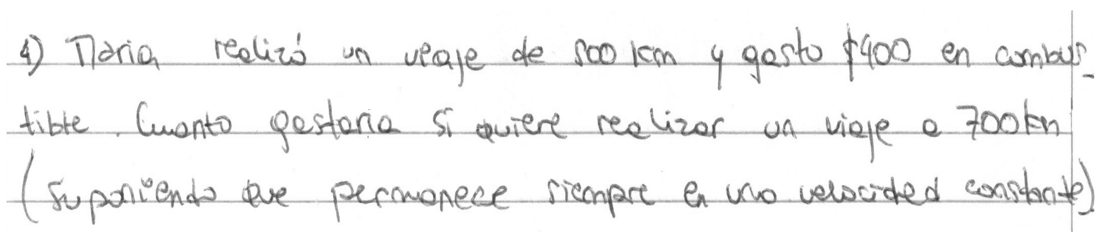

4) Maria realizó un viaje de 500 km y gasto $400 en combustible. Cuanto gastaria si quiere realizar un viaje a 700 km
(suponiendo que permanece siempre en una velocidad constante)

Figura 1.10

También aparecieron enunciados como *"Ana vende 10 kilos de pan por día, a un precio de $2 el kilo"*,*"un auto que viaja a 80 km/h recorrió 150 km"*, *en una metalúrgica cada empleado recibe $25 por hora trabajada, sabiendo que el máximo de horas laborables es de 14, ¿cuál es el ingreso máximo de los trabajadores?*, en los que no está planteada una relación entre variables, ni tampoco el cálculo de una incógnita, pero que llevan a pensar más en una ecuación o en una operación.

Estas dificultades coinciden con las manifestadas en López y Sosa (2008). Se concuerda con lo que señalan los autores al expresar que estos problemas están muy relacionados con el tratamiento algebraico que suele prevalecer en la enseñanza del concepto de función, que deja de lado el hecho de que la función representa la forma en que se relacionan las dos variables o los elementos de dos conjuntos. Los ejercicios que se desarrollan suelen limitarse a operaciones con funciones, con un tratamiento similar al de las ecuaciones. Los alumnos se enfocan más en los algoritmos (determinación del dominio, de los ceros, de la función inversa) y no en el análisis de los resultados obtenidos y su significado en términos del problema tratado. Por otro lado, las representaciones más usadas para el tratamiento de las funciones y ecuaciones son generalmente las mismas, la algebraica y la gráfica. Las dificultades que tienen para distinguir entre variables e incógnitas no permiten a los alumnos identificar cuándo un problema debe ser abordado con una función o con una ecuación.

En la actividad 5 se presenta en lenguaje verbal un fenómeno sencillo de variación. El enunciado presenta el comportamiento de dos variables, tiempo y temperatura, que se relacionan entre sí. Se pretende que el alumno pueda contextualizarla, interpretarla y producir una representación gráfica.

Actividad 5.

Para cocinar pan es necesario calentar el horno a una determinada temperatura. Los primeros minutos, desde que se enciende el horno, la temperatura asciende con rapidez hasta alcanzar los grados necesarios para la cocción. Durante los siguientes minutos la temperatura se mantiene constante. Luego, el horno se apaga y la temperatura desciende hasta igualarse a la del ambiente. Realice un bosquejo de la temperatura del horno en función del tiempo transcurrido.

Las representaciones en un sistema de coordenadas cartesianas son recursos muy importantes para la interpretación de situaciones de cambio. En este sentido, se concuerda con Méndez y Gómez (2011), quienes expresan:

> "El papel de los ejes cartesianos como referencia para la representación del comportamiento de algún fenómeno, es primordial para la resignificación del fenómeno mismo, pues de ellos depende la interpretación de las relaciones que se pretendan expresar, o bien, el significado mismo de lo que una gráfica expresa (p. 58)."

El análisis de las producciones de los estudiantes consistió en un estudio cualitativo de las gráficas, teniendo en cuenta las características propias de la variación y el cambio. La primera, relativa a*qué cambia*, requiere la identificación de las variables que se representaron y su relación entre ellas. En este sentido, se examinó cómo etiquetaron los ejes y si consideraron la variable tiempo como independiente y la variable temperatura como dependiente. La segunda cuestión corresponde al reconocimiento de*cómo cambia* el fenómeno que se quiere representar. Este aspecto se analizó en las características de las gráficas dibujadas: intervalos donde la función crece, decrece, se mantiene constante y, profundizando, cómo es el crecimiento o decrecimiento de la curva, lo que lleva al análisis de la concavidad y se relaciona al comportamiento de la razón de cambio.

Sólo en un trabajo, se encontró que los alumnos no resolvieron la actividad. Todos los demás realizaron una gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas.

En relación a la identificación de las variables se observó que, salvo un trabajo en el que los alumnos intercambiaron las variables, los demás consideraron tiempo como la variable independiente y temperatura como la variable dependiente. Para la gráfica algunos etiquetaron los ejes directamente con esos nombres (tiempo y temperatura), otros designaron t y T a cada una de las variables, mientras que otros agregaron las unidades en las que se miden.

Con respecto al comportamiento de la gráfica, dado que la temperatura del horno cambia de maneras distintas con el transcurso del tiempo, la representación debe tener determinada forma. El dibujo exige centrar la atención en el comportamiento lineal o curvo, creciente, decreciente o constante.

En general, los estudiantes comprendieron que hubo un aumento, mantenimiento (temperatura constante) y disminución de temperatura. En casi todos los trabajos (95,83%) se observó que dibujaron una gráfica acorde con este comportamiento. Sólo 20 (27,78%) tuvieron en cuenta la temperatura ambiente inicial, el resto consideró como punto inicial el (0, 0).

Por otro lado, la mayoría representó tramos de función constantes. Pocos representaron una gráfica que describa de manera más completa el comportamiento de la temperatura del horno a lo largo del tiempo, considerando que la temperatura del horno crece cada vez más rápido al principio y que, luego de que se apaga el horno la temperatura decrece, pero cada vez más lento.

En este sentido, Dolores y otros (2009) señalan la fuerte tendencia de los estudiantes a construir gráficas que corresponden a funciones lineales, reportando el trabajo de otros investigadores que han mostrado esta situación (Dreyfus y Eisenberg, 1982; Markovis et al., 1983, en Dolores y otros, 2009). Esto muestra la dificultad de los estudiantes para lograr una gráfica de una situación de variación que describa los matices de la variación de la razón de cambio de la temperatura en los distintos intervalos de tiempo.

Llamó también la atención la tendencia de muchos alumnos a representar datos cuantitativos en la gráfica, a pesar de que no estaban dados en el enunciado. Se consideró que esto está relacionado con la predisposición en la enseñanza a utilizar las gráficas como una forma de representación de la información, asociada generalmente a una tabla de valores. Méndez y Gómez (2011) señalan que, de esta manera "?encontrar los puntos que representen a dicha tabla es suficiente para dibujar la gráfica" (p. 54).

En la Figura 1.11 se presentan algunas de las gráficas dibujadas por los alumnos.

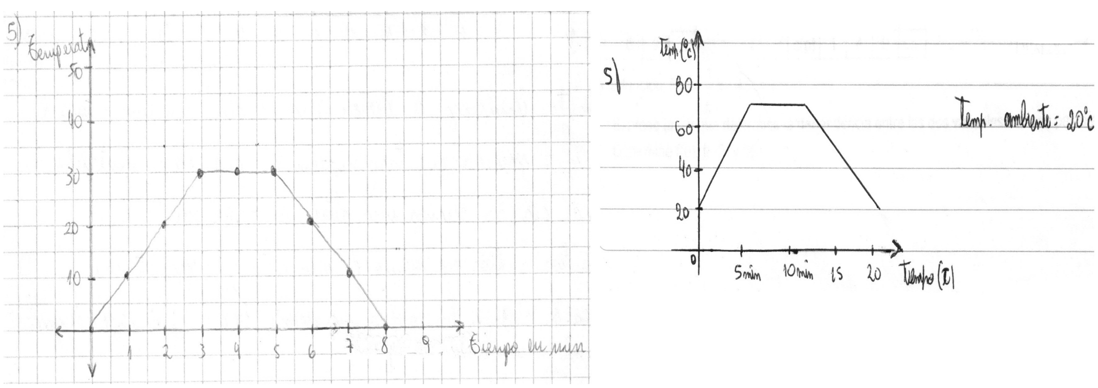


Figura 1.11

La siguiente actividad exige el análisis cualitativo y cuantitativo de una situación de cambio particular.

Actividad 6.

Un estudiante colocó semillas en un recipiente, los cubrió con una ligera capa de tierra y los humedeció con regularidad. A los diez días brotaron los retoños y desde ese momento empezó a medir cuidadosamente la altura (en centímetros) como función del tiempo (en días). Los datos que reunió se muestran en la siguiente tabla.

Tiempo (días)	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Altura	0,3	1,8	3,75	10	17,5	25	27,5	28,75	30	30	31,25

a) Esboce gráficamente la altura de la planta en función del tiempo.

b) Describa con sus palabras cómo varía la altura de la planta a través del tiempo.

c) Complete la siguiente tabla con el cambio entre dos valores consecutivos de la altura.

Tiempo (días)	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Altura	0,3	1,8	3,75	10	17,5	25	27,5	28,75	30	30	31,25
Cambio											

d) ¿Por medio de qué operación calculó los cambios?

e) ¿Cómo fueron los cambios?

Se requiere la construcción de una gráfica a partir de un conjunto de datos referidos a la altura de una planta durante un intervalo de tiempo. El análisis conjunto de la tabla y la representación gráfica permite complementar el análisis cuantitativo y el cualitativo del fenómeno presentado, respondiendo a las preguntas sobre cómo varía la altura de la planta a través del tiempo.
El esbozo de una gráfica a partir de una tabla de valores parece la manera más sencilla de construir la gráfica de una función. Sin embargo, puede traer dificultades. Mochón y Pinzón (2007), señalan que éstas pueden deberse a la no congruencia entre las representaciones gráfica y tabular. Una tabla es discreta y contiene generalmente información parcial de una relación, por lo que puede no ser equivalente con una representación gráfica. Dada la tabla de valores, ¿cuál es la representación gráfica apropiada de esta relación? Puede ser un conjunto de puntos aislados, un gráfico escalonado, una poligonal o una línea curva. En estos casos, el contexto proporciona la información faltante a partir de su significado.

Analizando las gráficas elaboradas se observó que algo más del 70% (51 trabajos) hizo una representación que se consideró aceptable. De ellos, siete representaron los puntos y los conectaron con una poligonal; el resto unió los puntos con una curva suave. Algunos tomaron como primer punto de la gráfica el correspondiente al primer par ordenado de la tabla, mientras que otros consideraron como primer punto el (0, 0).

Con respecto a las gráficas incorrectas, se notó en nueve trabajos que los alumnos no tuvieron en cuenta una escala, por lo que los puntos quedaron alineados, mientras que en otros 11 trabajos invirtieron las variables, representando la altura de la planta en el eje horizontal y el tiempo en el eje vertical.

Al describir, en el inciso b), cómo varía la altura de la planta a través del tiempo, algunos lo hicieron de manera muy breve refiriéndose sólo a que la altura de la planta aumenta a medida que transcurre el tiempo. Otros realizaron una descripción más detallada haciendo referencia a algunos intervalos de tiempo y alturas específicas de las plantas. Otros hicieron una descripción verbal más completa que permitió ver cómo relacionan la forma de la gráfica con la velocidad de crecimiento de la planta. Dieron una respuesta que se consideró correcta aproximadamente el 56% (40 trabajos). Algunas fueron:

- La altura de la planta crece o aumenta a medida que el tiempo transcurre.
- La planta crece relativamente rápido hasta los primeros 20 días y luego ésta disminuye su velocidad de crecimiento.
- En los intervalos de los 10 a 14 días la planta crece lentamente mientras que a partir del intervalo del día 16 la planta comienza a crecer rápidamente hasta el día 22, luego crece lentamente y desde el día 26 y 28 mantiene su altura, volviendo a crecer lentamente después.

- La planta a los 10 días tiene una altura de 0,3 cm, va creciendo en forma ascendente. Hasta los 24 días; a los 26 y 28 días se mantiene constante con una altura de 30 cm y a los 30 días alcanza una altura de 31,25 cm.
- La planta hace un crecimiento brusco pero una vez que alcanza una altura elevada se mantiene constante por un período y luego retoma su crecimiento lentamente.

A continuación se presenta uno de los trabajos realizados (Figura 12).

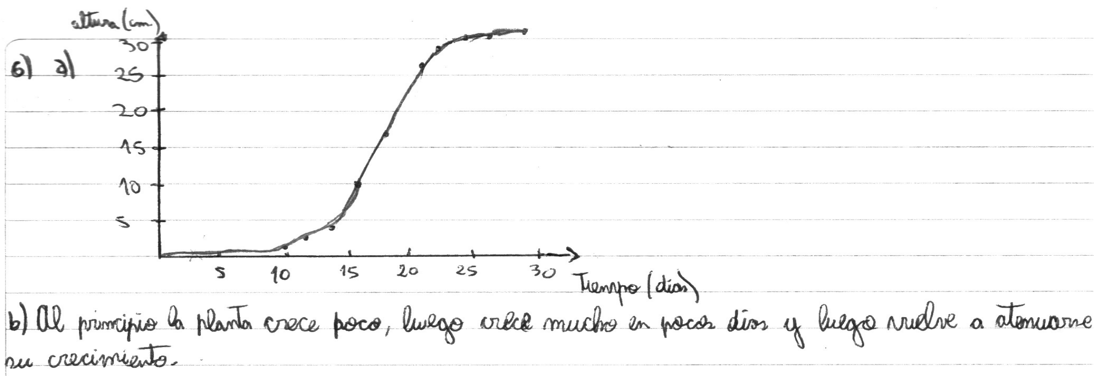


Figura 1.12

En el inciso c) se amplía la tabla con el cálculo de los cambios de la altura de la planta entre dos valores de tiempo consecutivos. La determinación de "cuánto cambia" una función es fundamental para poder entender "cómo cambia", es decir, para comprender mejor el comportamiento de una función. Si se sabe que la función crece, es posible determinar cuánto crece, o, si se sabe que decrece, cuánto decrece. La cuantificación o medición de los cambios es de gran ayuda en el estudio de cualquier fenómeno.

Esto exige el uso de una estrategia variacional, ya que los alumnos deben analizar el estado de la función en dos valores, uno inicial y otro final y determinar la diferencia entre esos estados. Esto les permite argumentar sobre el comportamiento de la función.

Al analizar los trabajos de los alumnos se pudo constatar que, excepto 10 que no completaron la tabla, los demás identificaron la resta como la operación que permite cuantificar los cambios. En 54 (75%) trabajos la tabla fue completada de manera correcta. Los demás cometieron errores en la resta en uno o dos valores y, la principal dificultad que se observó fue escribir 0,3 en la primera celda, considerando un cambio con respecto a una altura cero, trasladando los demás cambios hacia la derecha.

La respuesta a la última pregunta, ¿cómo fueron los cambios?, permite comenzar a relacionar el trabajo realizado en las distintas representaciones (numérica y gráfica). Los incrementos de la altura de la planta no son iguales para intervalos de tiempo iguales: lo que crece la planta en un intervalo de tiempo al principio (cuando brotaron los retoños) es mayor a lo que aumenta la altura en un intervalo de tiempo igual pero ubicado más adelante. Es más, excepto el último intervalo, los incrementos van disminuyendo a medida que pasa el tiempo. Se puede observar también que los cambios fueron más bruscos en el tercer y cuarto intervalo (de $t = 14$ a $t = 16$ y de $t = 16$ a $t = 18$) mientras que en los últimos intervalos fueron más leves, incluso entre $t = 26$ y $t = 28$ no hubo cambios (la planta no creció).

En 24 trabajos (33,33%) la pregunta no fue respondida. Ocho escribieron nuevamente sobre cómo fue el crecimiento de la planta o mezclaron el comportamiento de los cambios con el crecimiento de la planta. El resto expresó de alguna manera, más o menos completa, que los cambios no fueron constantes. Algunas respuestas fueron: "fueron crecientes hasta llegar a 26 segundos donde es constante hasta los 28 y luego decrecen", "los cambios comenzaron bajos, aumentaron y disminuyeron al final", "fueron variables", "los cambios fueron positivos", "fueron variando según los días y en algunos casos se mantuvieron constantes", "al principio hay un cambio brusco, luego el cambio es mucho más reducido y en un momento se mantiene constante".

En la Figura 12 se presenta una de las respuestas dadas al inciso c). Se observa que, si bien calculan los cambios correctamente en la tabla, cuando plantean la diferencia como la operación que permite calcular los cambios, interpretan de manera incorrecta el orden entre los términos de la resta.

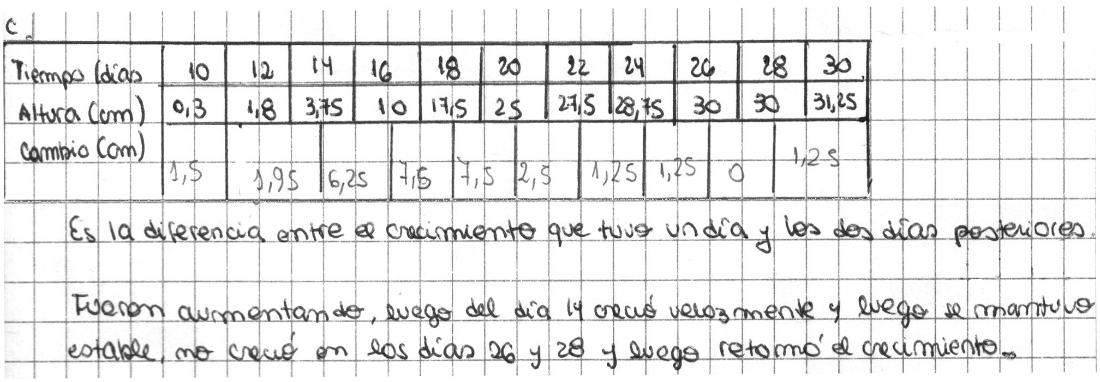


Figura 1.13

A continuación se muestra una respuesta en la que se presentan varios de los aspectos mencionados (Figura 14).

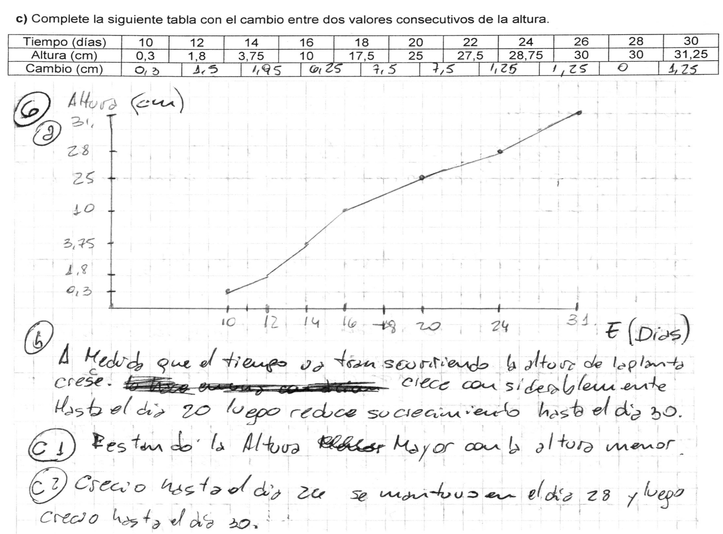


Figura 1.14

1.4 Conclusión

El análisis y la interpretación de las respuestas de los estudiantes permitieron detectar distintas dificultades en todas las actividades propuestas. Así, se observaron problemas para identificar las variables intervinientes en una situación, enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables, interpretar el comportamiento de la gráfica de una función, obtener la gráfica de una función que modele un fenómeno.

Resaltando lo que ya se expresó anteriormente, se considera que todas estas dificultades están asociadas, entre otros factores, al tratamiento dado al concepto función durante su formación previa. Los alumnos piensan en una función más como una correspondencia entre dos conjuntos, una fórmula y no como una relación entre magnitudes variables.

A pesar de esto, se observó que el desarrollo de las distintas actividades favoreció el surgimiento de argumentos variacionales. El análisis del comportamiento de las situaciones propuestas permitieron dos acercamientos, el cualitativo (a través de las gráficas y sus interpretaciones) y el cuantitativo (es decir, el numérico, a través de las tablas). Ambos conducen a la construcción de nociones fundamentales para el inicio del estudio del cálculo.

Además, las actividades propuestas permitieron realizar una introducción al estudio de las razones de cambio. Quedaron planteadas distintas inquietudes, especialmente con el desarrollo de las dos últimas actividades: las disminuciones de temperatura del horno luego de algunos minutos de apagado son menores que al principio, recién apagado; el aumento de la altura de la planta luego de algunos días es menor que al principio. Las razones de cambio también son una variable.

En relación a la metodología de trabajo en el aula, se logró que todos los alumnos se involucraran y se dispusieran a analizar las actividades planteadas. Fue en la discusión en los pequeños grupos donde se observaron los mejores intercambios entre los alumnos, mientras que en las instancias de debate de la clase completa se observó menos participación. Si bien muchos no lograron responder algunas preguntas, las ideas formadas en el resto dieron lugar al debate posterior. Las respuestas a las preguntas del docente basadas en lo observado en el trabajo de pares, proporcionaron los elementos básicos para promover el análisis en la etapa de institucionalización.

Todo lo realizado constituye un aporte significativo al desarrollo del pensamiento variacional de nuestros estudiantes y también de su lenguaje variacional, dado que fueron capaces de comunicar sus argumentos.

Por otro lado, desde el equipo docente también se analizaron y valoraron los resultados obtenidos por medio de preguntas como: ¿qué acciones es posible implementar para subsanar de alguna manera las dificultades?, ¿qué modificaciones deben plantearse en las actividades propuestas de manera de mejorar los resultados? y ¿es posible destinar más tiempo a su desarrollo?

Estos planteos llevan a reflexionar sobre qué ideas y habilidades relativas al estudio de la variación son factibles de ser desarrolladas previo al ingreso a la universidad, de modo que contribuyan a la formación de una base más sólida para los alumnos.

El tiempo empleado en desarrollar los temas y la cantidad de alumnos, son inconvenientes serios a la hora de implementar esta metodología de trabajo en el aula. Sin embargo, de esta manera se propicia que los estudiantes produzcan conocimiento matemático, reflexionen sobre sus producciones y generen teoría sobre dicho conocimiento. Todo esto deriva necesariamente en aprendizajes significativos.

También preocupa la revisión del trabajo al abordar los contenidos referentes a las distintas funciones y al estudio del cálculo, de manera de hacer mayor hincapié en los aspectos relacionados al cambio. La resolución de situaciones que permitan la modelación de fenómenos que requieran un tratamiento variacional y que demanden la utilización de distintas representaciones, ayudarán a que el alumno, al enfrentarse a ellas, desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional. De esta manera, además de favorecer la comprensión, se estará brindando herramientas a los estudiantes que les permitan abordar problemas de sus áreas de interés, tanto del ámbito cotidiano como científico.

Bibliografía

[1] Cabrera, Luis, «El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la reforma integral de bachillerato» [tesis de maestría no publicada], Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, 2009.

[2] CantoraL, Ricardo; Farfán, Rosa, «Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional», en Cantoral, Ricardo; Farfán, Rosa; Cordero, Francisco; Alanís, Juan; Rodríguez, Rosa; Garza, Adolfo, Desarrollo del pensamiento matemátic, México, Trillas, 2003, p. 185-203, ISBN 968-24-6229-0.

[3] Cantoral, Ricardo; Molina, Juan; Sánchez, Mario, «Socioepistemología de la Predicción», en Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan (ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18, México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2005, vol. 18, p. 463-468, ISBN 970-9971-00-X.

[4] Carlson, Marilyn; Jacobs, Sally; Coe, Edward; Larsen, Sean; HSU, Eric, «Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio», EMA, 2003, 8 (2), 121-156, ISSN 0122-5057.

[5] Del Castillo, Alejandro; Montiel, Gisela, «El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional», en Buendía, Gabriela; Montiel, Gisela (ed.), Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC., 2007, p. 568 ? 580, ISBN 978-970-9971-14-9.

[6] DoloreS, Crisólogo, «La matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional», Revista Academia, 2000, vol 2, 18, 9-17.

[7] Dolores, Crisólogo; Chi, Andrés; Canul, Eduardo; Cantú, Cristy; Pastor, Crispín, «De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática», Unión, 2009, 18, 41-57, ISSN 1815-0640.

[8] Dolores, Crisólogo; Salgado, Gerardo, «Elementos para la graficación covariacional», Números, 2009, 72, 63-74, ISSN 1887-1984.

[9] Gómez, Enrique, «La construcción de la noción de variable» [tesis doctoral no publicada], Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México, 2008

[10] Larson, Ron; Hostetler, Robert; Edwards, Bruce, Cálculo Esencial, México, Cengage Learning, 2010, ISBN 978-607-481-269-5.

[11]] López, Jesús; Sosa, Landy, «Dificultades conceptuales y procedimentales en el estudio de funciones en estudiantes de bachillerato», en Lestón, Patricia (ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21, México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2008, vol. 21, p. 308-318, ISBN 978-970-9971-15-6.

[12] Méndez, Claudia; Gómez, Karla, «Situaciones de Aprendizaje para profesores. Llenado de recipientes», en Farfán, Rosa (coord.), El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente, 2011, p. 54-63 [consulta: 2012-03-05]. Disponible en: http://www.proyectosmatedu.cinvestav.mx/situaciones/docs/LIBRO_DPM_2011.pdf

[13] Ministerio de educación nacionaL, «Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas», Colombia, MEN, 2006, ISBN 958-691-290-6.

[14] Mochón, Simón; Pinzón, Bonifacio, «La variación y su razón de cambio: Un estudio con alumnos de secundaria», Memoria electrónica del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa (Mérida, 2007) [consulta: 2013-07-04]. Disponible en: http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v09/ponencias/at05/PRE1178203907.pdf

[15] NCTM, Principios y Estándares para la Educación Matemática, Sevilla, SAEM Thales, 2000, ISBN 84-933040-3-4.

[16] Posada, Fabián; Obando, Gilberto (ed.), Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico, Módulo 2, Medellín, Gobernación de Antioquia, 2006, ISBN 958-9172-81-4.

[17] Tall, David, «Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus», ZDM Mathematics Education, 2009, 41 (4), p. 481-492 [consulta: 2011-04-04], ISSN 0044-4103, ISSN (electronic): 1615-679X. Disponible en: ?doi:10.1007/ s11858-009-0192-6? http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009c-zdm-dynamic-calculus.pdf.

[18] Vasco, Carlos, «El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías». En Ministerio de Educación Nacional (ed.), Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas (Memorias del Congreso Internacional, Bogotá, D.C., 8, 9 y 10 de mayo de 2002), Bogotá, Ministerio de Educación Nacional, 2003, p. 68-77.

[19] Villa, Jhony, «El concepto de función. Una mirada desde las matemáticas escolares», En Lestón, Patricia (ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21, México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2008, vol. 21, p. 245-254, ISBN 978-970-9971-15-6.