Revista Digital: Matemática, Educación e Internet
ISSN: 1659-0643
revistadigitalmatematica@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica

Pozas, Diana Cecilia; Santori, María Laura

El Álgebra Elemental en la Escuela Secundaria. Un análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, vol. 16, núm. 2, marzo-agosto, 2016, pp. 1-14
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago, Costa Rica

Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 16, No 2. Marzo − Setiembre 2016. ISSN 1659 -0643

El Álgebra Elemental en la Escuela Secundaria. Un análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Diana Cecilia Pozas
dianapozas@hotmail.com
Facultad de Economía y Administración
Universidad Nacional del Comahue
Argentina

María Laura Santori
mlausantori@yahoo.com.ar
Facultad de Economía y Administración
Universidad Nacional del Comahue
Argentina

Recibido: Mayo 15, 2016 Aceptado: NOviembre 9, 2016

Resumen. Este trabajo utiliza como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En este marco, se interpreta el álgebra en la escuela secundaria como instrumento de modelización, superando así la clásica visión del álgebra elemental como una aritmética generalizada. Se utilizan los conceptos teóricos proporcionados por la TAD para analizar el material didáctico diseñado e implementado por una Profesora para enseñar resolución de ecuaciones lineales en un colegio secundario público de Argentina. Para realizar dicho análisis se elaboraron cuatro categorías por medio de las cuales se intenta mostrar que es posible hacer un planteamiento a nivel escolar en donde el álgebra sea interpretada como un instrumento de modelización.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Álgebra Elemental, Etapas de Algebrización

Abstract. This paper uses as a theoretical reference the Anthropological Theory of Didactics (TAD). In this context, algebra in high school is a tool for modeling, exceeding the vision of elementary algebra as generalized arithmetic. We use the theoretical concepts provided by the TAD to analyze teaching materials designed and implemented by a teacher to teach solving linear equations in a public secondary school in Argentina. We analyze based on four categories. It tries to show that it is possible to introduce algebra in high school as a modeling tool.

KeyWords: Anthropological Theory of Didactics, Elementary Algebra, Algebrization Stages.

1.1 Introducción

Los procesos de enseñanza y de aprendizaje del álgebra en distintos niveles educativos han sido motivo de numerosas investigaciones en didáctica de la matemática [10, 11, 14, 13, 7, 9]. En general, los investigadores han tratado de buscar respuestas a los principales interrogantes en torno a la naturaleza del álgebra y a los procesos de pensamiento implicados, que permitan a los alumnos construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación. En particular, los estudios realizados por Sadovsky y Sessa [17], en la Argentina, muestran que el álgebra elemental que predomina en la escuela secundaria de nuestro país se identifica con una aritmética generalizada que acota las potencialidades del álgebra como modelo de la actividad matemática y no permite un trabajo que vaya más allá de las generalizaciones y la resolución de ecuaciones.

Este trabajo se encuadra en un proyecto de investigación titulado: "Estudio del problema de la articulación Nivel Medio - Universidad desde el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico", financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Uno de los objetivos primordiales de este proyecto es explorar conocimientos actualizados en Didáctica de la Matemática que permitan abordar, conocer y caracterizar la realidad de la problemática de la enseñanza de la matemática en diversas instituciones educativas. En este sentido, se toma la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante, TAD) de Yves Chevallard [4] como referencial teórico. Según este autor, el sistema de tareas del profesor revela dos grandes componentes integradas: las tareas de diseño y organización de dispositivos de estudio (Organizaciones Matemáticas) y las tareas de ayuda al estudio, particularmente la dirección de estudio y enseñanza, cuyo cumplimiento es debido a la implementación de técnicas didácticas determinadas (Organizaciones Didácticas).

En este artículo se pretende comunicar un estudio cualitativo del material diseñado por una profesora para enseñar resolución de ecuaciones lineales en dos cursos de una escuela secundaria de la Patagonia Argentina. Como se señaló en el párrafo anterior, el diseño y organización de dispositivos didácticos es tarea del profesor, por lo cual en este artículo no se analizaron explícitamente las elaboraciones de los estudiantes. Se decidió, en cambio, indagar sobre la organización matemática en torno a los problemas de álgebra elemental, prestando particular atención a los problemas aritméticos. Los problemas aritméticos en la escuela secundaria cumplen el rol de problemas de aplicación para ser resueltos algebraicamente mediante ecuaciones. De modo que una técnica potente para modelizar y resolver algebraicamente los problemas aritméticos es el uso de las letras para expresar cantidades desconocidas y que se manipulan como si fuesen conocidas. Uno de los objetivos más valorados en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, especialmente en los primeros años de la escuela secundaria, consiste en dominar dicha técnica.

Objetivo del estudio

Identificar y analizar los tipos de tareas que propone una docente para enseñar la organización matemática en torno a la resolución de problemas mediante ecuaciones, en los primeros años de la escuela secundaria. La pregunta de investigación que se formula es: ¿en qué medida los problemas y/o ejercicios propuestos permiten tematizar las técnicas de resolución?, más precisamente: ¿las tareas que se proponen posibilitan el planteo y estudio de cuestiones que tengan que ver con la descripción, interpretación, justificación y alcance de las técnicas de resolución?.

1.2 Marco Teórico

El Álgebra Elemental desde la perspectiva de la TAD

Para llevar a cabo el presente estudio, se realizó en primera instancia una lectura crítica de la bibliografía relativa a la problemática de la introducción del álgebra en la escuela secundaria y que toma a la TAD como marco teórico. En particular, según lo desarrollado en las tesis doctorales de Pilar Bolea (2003) [1] y Noemí Ruiz-Munzón [15], se profundizó en la idea de identificar el álgebra elemental con el proceso de algebrización. Esto es, considerar el álgebra como una herramienta para realizar actividades de modelización matemática.

En el marco de la TAD, el álgebra escolar no se concibe como una aritmética generalizada, sino como un instrumento de modelización que ayuda a estudiar contenidos de otras áreas, como por ejemplo, geometría, física, economía o estadística [1]. La actividad matemática escolar puede aparecer, a partir de cierto nivel de desarrollo, como una actividad plenamente algebrizada que no podría concebirse sin la funcionalidad plena del instrumento algebraico. Por lo tanto, se supone que debería existir un proceso de algebrización de las matemáticas escolares, el cual se inicia en la escuela primaria, continúa en la secundaria y culmina en la universidad [2, 3].

En este trabajo se toman los desarrollos teóricos propuestos por Ruiz-Munzón [16] en donde se postula que el proceso de algebrización de una organización matemática en torno a los Problemas Aritméticos, permite delimitar un sistema inicial cuya algebrización o modelización, dota de sentido y reconstruye los principales ingredientes del cálculo algebraico elemental.

Los programas de cálculo aritmético

La noción clásica de *problema aritmético* abarca aquellos que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas $(+,-,\times,/)$ ejecutables a partir de los datos del problema. Las técnicas clásicas de resolución recurren a discursos verbales y operaciones aritméticas para calcular la cantidad incógnita. Dicho proceso de resolución, o cadena estructurada y jerarquizada de operaciones se denomina: Programa de Cálculo Aritmético(en adelante, PCA).

El siguiente es un ejemplo de problema aritmético y su respectivo PCA: *Un aeroplano recorrió 1940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 890 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos km recorrió el aeroplano en total?* La resolución se puede representar mediante el siguiente PCA:

$$P(a,b,c) = a + (a+b) + [a + (a+b) - c]$$

Las letras a, b y c, son los argumentos del PCA.
Aún cuando este problema puede ser resuelto en forma oral, la noción de programa de cálculo aritmético permite modelizar tanto la resolución como la estructura del problema. Además, permite definir los términos: "expresión algebraica" y "valor numérico". Así, una expresión algebraica es la formulación simbólica, y por lo tanto, escrita, de un PCA. Para ello, se utilizan números y letras para identificar y explicitar los argumentos. El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene luego de sustituir cada argumento del PCA por un número concreto y efectuar las operaciones indicadas. En el PCA que se indicó anteriormente, $a = 1940$; $b = 340$ y $c = 890$. Reemplazando se obtiene: $P(1940, 340, 890) = 1940 + 2280 + 3330 = 7550$.

Este resultado es la respuesta al problema, expresado en el contexto del mismo. Es decir, que la respuesta es: el aeroplano recorrió 7550 km.

Según Chevallard [5] los PCA aparecen y se ejecutan en el trabajo matemático de los alumnos desde los inicios de la enseñanza primaria, pero nunca se plantean cuestiones sobre su descripción, justificación o alcance. Dicho en otros términos, los PCA forman parte de la práctica matemática escolar, pero son objetos no matematizados o paramatemáticos. De hecho, un estudiante promedio resolvería el problema del aeroplano citado anteriormente, ejecutando operaciones aritméticas en forma aislada y focalizando únicamente en la respuesta numérica al problema.

Ruiz-Munzón et al. [16] consideran que la resolución de problemas aritméticos forma parte de las tareas que componen cierta organización matemática que toman como sistema inicial. Muestran que en dicho sistema se pueden plantear una serie de cuestiones de naturaleza tecnológica, esto es, cuestiones relativas a la creación y desarrollo de técnicas de resolución. Desde la perspectiva de la TAD se postula que a largo plazo no puede existir en ninguna institución una praxis (tipo de problemas y técnicas) sin que aparezca un discurso para explicar y justificarlas técnicas. Se denomina "tecnología? a este discurso sobre las técnicas. Asimismo, los cuestionamientos tecnológicos provocan la necesidad crear nuevas técnicas con la consecuente ampliación del sistema inicial. Esta ampliación, progresiva y articulada, se define como Proceso de Algebrización y se divide en tres etapas.

Primera etapa del proceso de algebrización

En la primera etapa del proceso de algebrización se sitúan aquellos problemas cuya resolución requiere resolver una "ecuación" muy particular porque la incógnita aparece únicamente en uno de sus miembros. La técnica empleada por excelencia para resolver este tipo de problemas es la denominada *patrón de Análisis-Síntesis* [8]. Para dichos problemas aritméticos que se suelen trabajar en la escuela secundaria Ruiz-Munzón et al. (2010) [16] proponen, en principio, dos modificaciones:

a.) Presentar problemas en donde sea necesario explicitar el proceso de resolución.

Ejemplo 1.1

Pensar un número, sumarle el doble de su consecutivo y luego, restarle el triple de su anterior.

¿Qué resultado se obtiene?

Repetir el proceso con otro número. ¿Se obtiene siempre el mismo resultado? ¿Por qué?

Si se llama n al número en cuestión y se representa al problema mediante el siguiente PCA:

$$P(n,2,3) = n + 2(n+1) - 3(n-1) = 5$$

La formulación del PCA y su posterior simplificación, permiten explicar en forma razonada porqué el resultado del problema no depende del número pensado inicialmente. Es decir, porqué siempre se obtiene $P(n,2,3) = 5$.

b.) Que la pregunta del problema no sea un número, sino que sea una relación.

Ejemplo 1.2

Si a un número dado le sumamos 5, al resultado obtenido lo multiplicamos por 3 y luego le restamos 15, ¿qué relación existe entre el resultado final y el número inicial?

Si se llama n al número inicial, el PCA asociado a este problema es:

$$P(n,5,3,15) = (n+5) \cdot 3 - 15$$

Simplificando este PCA se obtiene $3n$, lo cual significa que el resultado final será el triple del número inicial.

En estos dos ejemplos se puede visualizar el tipo de problemas que Ruiz-Munzón et al. [16] sitúan en la primera etapa del proceso de algebrización. Son problemas aritméticos que permiten, como postulan los autores citados, cuestionamientos tecnológicos relativos a: porqué se obtiene el tipo de resultado que se obtiene y a la interpretación de estos resultados; el alcance o dominio de validez de las técnicas y a la delimitación de los tipos de problemas que se resuelven con un mismo PCA.

Segunda etapa del proceso de algebrización

El paso a la segunda etapa del proceso de algebrización se identifica con la necesidad de igualar dos PCA que tengan los mismos argumentos no numéricos. En esta etapa aparecen problemas en los que la técnica de Análisis-Síntesis fracasa puesto que no se consigue reducir la incógnita a los datos. Se necesita de una nueva técnica, la técnica de cancelación, la cual implica manipular los argumentos de ambos lados de una igualdad. Aparece aquí la noción de ecuación entendida como la igualdad de dos PCA. El siguiente ejemplo se encuentra en la tesis de Munzón [15, pág 78]:

Ejemplo 1.3

Laura piensa un número, le suma el doble de su consecutivo, resta 17 al resultado y, por último, lo divide todo entre 3. Si el resultado final es:

(a) un sexto del número que había pensado ¿qué número pensó Laura?

(b) el número pensado disminuido en una unidad ¿qué número pensó Laura?

Sea n el número pensado por Laura, entonces para responder al ítem (a) se necesitan dos PCA, los cuales son:

$$PCA(n,2,17,3) = [n+2(n+1)-17]/3 \text{ y } PCA(n,6) = n/6$$

Aplicando la técnica de simplificación al primer PCA se obtiene:

$$PCA(n,2,17,3) = [n+2(n+1)-17]/3 = n-5$$

Se observa que aun habiendo simplificado un PCA, esto no es suficiente ya que "*para conocer un sexto del número pensado, hay que conocer... el número pensado*". La técnica del patrón de Análisis-Síntesis fracasa puesto que no consigue reducir la incógnita a los datos. Es necesario igualar los dos PCA generando una ecuación y además, aplicar otra técnica de resolución, la técnica de cancelación:

$$\begin{aligned} n-5 &= n/6 \\ n-5-n/6 &= n/6-n/6 \\ 5n/6-5 &= 0 \\ 5n/6-5+5 &= 0+5 \\ (5n/6)6 &= (5)6 \\ (5n)/5 &= 30/5 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número que Laura pensó fue el 6.

A partir de la segunda ecuación obtenida, $5n/6-5=0$, ya se podría trabajar con la "técnica inversa". Es decir, argumentando que si $5/6$ del número pensado menos 5 es cero, $1/6$ del número es 1 y, por lo tanto, el número buscado es 6.

La respuesta al ítem (b) se reduce a resolverla ecuación:

$$\begin{aligned} n-5 &= n-1 \\ n-5-n &= n-1-n \\ -5 &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el ámbito numérico con el que se está trabajando, la respuesta es: no existe ningún número natural que satisfaga la condición del ítem (b).

Tercera etapa del proceso de algebrización

La tercera etapa involucra problemas en donde no se limita el número de variables y no se distingue entre incógnitas y parámetros. Esta fuerte generalización de los problemas hace que su estudio en la escuela secundaria sea extremadamente complejo. Es también en esta tercera etapa, donde aparece plenamente el trabajo con las fórmulas algebraicas y donde se considera que culmina el proceso de algebrización.

En la primera y segunda etapa se presentaron ejemplos de PCA con "estructura lineal" pues se considera que son más adecuados para el introducir el álgebra en la escuela secundaria. Sin embargo, para ejemplificar el salto que representa el paso a la tercera etapa del proceso de algebrización es más adecuado utilizar PCA no lineales.

A continuación se muestra un problema (extraído de Munzón [16, pág 85]) cuya resolución requiere situarse en la tercera etapa de algebrización:

> *Un grupo de amigos cenan juntos y a la hora de pagar resulta que algunos de ellos no llevan dinero. Esto comporta que cada uno de los restantes pague un dinero extra más de lo que le correspondía. El número de amigos que paga la cena es proporcional (con constante de proporcionalidad igual a k) al número de amigos que no paga. ¿Cómo depende de k el dinero extra que deberán pagar los comensales que tienen dinero?*

Si se denota con la letra:

x: número de amigos que van a cenar,
d: número de amigos que no pagan,
E: dinero extra que tendrá que aportar cada comensal,
f: importe de la factura de la cena,

es posible plantear dos PCA que determinan el dinero total que deberá pagar cada comensal.

$$PCA_1(f,x,E) = \frac{f}{x} + E \text{ y } PCA_2(f,x,d) = \frac{f}{x-d}$$

Igualando los dos PCA y efectuando manipulaciones algebraicas se llega a la siguiente ecuación:

$$E \cdot x^2 - E \cdot d \cdot x - f \cdot d = 0$$

Como el número de amigos que paga la cena es proporcional al número de amigos que no pagan, se tiene que $x - d = k \cdot d$, es decir, $x = k \cdot d + d$.

Esta relación transforma la ecuación anterior en:

$$Ed^2 \left(k^2 + k - f \cdot d = 0\right)$$

de la cual se deduce que:

$$E = \frac{f}{d\,(k^2+k)} = \frac{1}{d \cdot k\,(k+1)} \cdot f$$

Esta relación se puede interpretar diciendo que el dinero extra será un $\dfrac{100}{d \cdot k\,(k+1)}$ del importe de la factura de la cena.

Usando nuevamente que $x = k \cdot d + d = (k+1) \cdot d$, se obtiene la expresión:

$$E = \frac{1}{k} \cdot \frac{f}{x}$$

Entonces se podría interpretar la relación anterior diciendo que el dinero extra será proporcional a lo que debería pagar cada comensal si todos hubieran llevado dinero, con constante de proporcionalidad: $\frac{1}{k}$.

1.3 Marco metodológico

Se realizaron observaciones de clase en cursos de 1º y 2º año (13 - 15 años), de un colegio secundario de la ciudad de Bariloche, Patagonia Argentina. El tiempo estipulado curricularmente para la asignatura Matemática en los cursos observados, es de 5 horas cátedra (40 minutos cada una) distribuidas semanalmente. Se acordó con la Profesora que se realizarían observaciones no participantes cuando ella desarrollara el tema "resolución de ecuaciones lineales", según se establece en el currículo oficial. Se tomó nota de todo lo realizado en el pizarrón y se grabaron todas las clases. Se recopiló todo el material planificado por la docente y pertinente a este estudio, esto es, problemas para trabajar en clase, problemas de práctica (para resolver fuera del horario de clase) y problemas para la evaluación. Las observaciones de clase fueron transcriptas en su totalidad. Cabe aclarar una vez más que en la recolección del material de campo no se tuvieron en cuenta las actividades individuales de los estudiantes, ya que este estudio se centra en la planificación y en la gestión de la docente.

Categorías de Análisis

A partir de la caracterización de las distintas etapas del proceso de algebrización, y focalizando en la primera etapa, se formulan las siguientes categorías con el fin de organizar el análisis del material empírico:

C1: Estudio del campo de soluciones de una ecuación lineal
C2: Estudio de las técnicas para resolver tareas inversas
C3: Uso de parámetros en el enunciado de un problema
C4: Establecer relaciones entre distintas incógnitas

Análisis de los datos

De la totalidad de los problemas recopilados , tienen una presencia destacada aquellos que se caracterizan por ser resolubles mediante una ecuación del tipo: $a \cdot x \pm b = c \cdot x \pm d$.

Estos problemas se sitúan en la segunda etapa del proceso de algebrización ya que las resoluciones requieren utilizar técnicas de simplificación y cancelación. Por ejemplo:

caja aclaratorio el cual dice: En adelante, los problemas enunciados en los cuadros de texto son copia textual del material diseñado por la Profesora.

Ejemplo 1.4

[a] *Una pelota pesa medio kilogramo, más la mitad de su propio peso. ¿Cuánto pesa la pelota?*

[a]En adelante, los problemas enunciados en los cuadros de texto son copia textual del material diseñado por la Profesora.

No se hará un análisis de este tipo de problemas, ya que el objetivo de la investigación es focalizar en aquellos que se sitúan en la primera etapa de algebrización. A continuación, se presentan otros problemas para analizar el potencial de cada uno, según las categorías establecidas en el apartado anterior.

C1: Estudio del campo de soluciones de una ecuación lineal

En general, se observa que sólo se plantean problemas en donde la solución existe y es única. Son actividades que pertenecen al campo aritmético, aún cuando se introduzcan letras. Se transcriben los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.5

Si a un número n le sumo $1/4$ de su anterior y divido esa suma por 2, obtengo como resultado 3. ¿De cuál número se trata?

Ejemplo 1.6

Para cada ecuación, evalúa si alguna de las indicadas es la solución:

(a) $3m + 14 = 29$

$m = 5 \quad m = 9 \quad m = 13$

(b) $4 \cdot 8 + 3r - 7 = 79$

$r = 9 \quad r = 18 \quad r = 23$

Algunas modificaciones que se podrían hacer a estos problemas son las siguientes:

(P1)) Hallar, si es posible, un número n tal que: si a n le sumo el doble de su consecutivo y luego le resto el triple del número inicial, obtengo como resultado 1 (uno). Justifica tu respuesta.

(P2) Para la siguiente ecuación evaluar si algunos de los resultados indicados es la solución:

$$-3x + 18 + 3(-2 + x) = 12x = 0x = 6x = 21$$

En el problema P1, el estudiante puede traducir el enunciado a una ecuación, cuya manipulación le permitirá explicar porqué no existe ningún número que verifique las condiciones del problema. La resolución de P2 proporciona siempre el mismo resultado numérico, independientemente del valor de x con que se evalúe la ecuación dada. Aparecen, por lo tanto, cuestionamientos sobre los resultados obtenidos: ¿por qué no es posible hallar un número que verifique las condiciones de P1?; ¿por qué los tres valores de x verifican la igualdad de P2?, ¿cuántos valores de x verifican la igualdad de P2?

Estas modificaciones permiten ampliar el tipo de tareas que el estudiante está acostumbrado a realizar en la clase de matemática. Es decir, se resuelven muchas ecuaciones pero sin profundizar en las condiciones de existencia de la solución. Luego, en la resolución de problemas, es muy difícil que el estudiante se plantee preguntas que apunten a estudiar la estructura de los problemas y las condiciones de existencia de solución.

C2: Estudio de las técnicas para resolver tareas inversas

Un aspecto importante del álgebra como instrumento de modelización es la capacidad de flexibilizar y desarrollar las técnicas de resolución, en particular, invertirlas. Esto es, dado un problema resoluble mediante una técnica, desarrollar otra técnica que permita resolver el problema inverso. El trabajo de Fonseca (2004) [6] pone de manifiesto una gran rigidez en la enseñanza de las matemáticas. El estudiante tiene dificultades con la nomenclatura, maneja una sola técnica, no es capaz de distinguir entre tarea directa y tarea inversa, no interpreta las técnicas y, lo que es más importante, tiene mucha resistencia al trabajo con tareas abiertas. En términos del *contrato didáctico* se puede afirmar que, en la escuela secundaria, la tarea de invertir una técnica para llevar a cabo la tarea inversa no forma parte de la responsabilidad matemática [1] del estudiante [12].

En el caso del álgebra elemental se puede citar el siguiente ejemplo, al que se llamará tarea directa:

Ejemplo 1.7

¿Qué número pensé si dos tercios de ese número, más un cuarto, es igual a cuatro?

La resolución de esta tarea directa implica plantear una ecuación que arroja como resultado $45/8$. No se le pide al estudiante que invente otra ecuación que arroje el mismo resultado, lo cual le brindaría la posibilidad de poner en juego técnicas inversas.

También se puede mencionar otra tarea directa que consiste en realizar "traducciones" sencillas desde el lenguaje natural al lenguaje simbólico. El objetivo es que el estudiante use de manera sistemática, al menos en el aula, símbolos para expresar datos desconocidos o generalizaciones. La profesora destinó un tiempo importante a esta tarea. Sin embargo, no se solicita al estudiante que efectúe la tarea inversa, esto es, traducir del lenguaje simbólico al coloquial.

C3: Uso de parámetros

No se observaron situaciones en donde se usen parámetros. En todos los problemas se debe buscar un resultado aislado. En consecuencia, ante problemas análogos que sólo se diferencian en los datos numéricos contenidos en el enunciado, el estudiante está obligado a comenzar el mismo razonamiento para resolverlos. Con la introducción de parámetros en el enunciado, se generaliza el problema y su

[1] En Chevallard, Bosch y Gascón (1997) Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje se analiza este fenómeno con otros asociados a él dentro del sistema escolar.

solución algebraica. Por ejemplo:

Ejemplo 1.8

Hallar todos los pares de números enteros positivos tales que el primero supere al segundo en "a" unidades y la suma de ambos sea igual a 14 (problema adaptado de Bolea (2003),[1, pág 175]).

Primer número:	x
Segundo número:	$x+a$
La suma entre ambos es igual a 14:	$x+(x+a)=x+a=14$
Entonces	$x=\dfrac{14-a}{2}$

¿Cuáles son todos los pares de números enteros positivos que verifican las condiciones del problema? Si se considera "x" y "$x+a$" al primero y segundo número, respectivamente, entonces:

a	2	4	6	8	10	12
x	6	5	4	3	2	1
$x+a$	8	9	10	11	12	13

Un aporte fundamental de la modelización algebraica es la creación de técnicas más económicas y eficaces, tanto para manipular los datos del problema como para formular su solución. En este sentido, el problema analizado anteriormente permite visualizar otras técnicas que facilitan el trabajo con problemas que involucran parámetros, como por ejemplo, la utilización de tablas.

Otro aspecto muy importante de este tipo de problemas con parámetros es que permite mostrar la estructura del problema. Es decir, la presencia de parámetros en el enunciado impide que el estudiante comience a efectuar cálculos, a veces, en forma irreflexiva. Este impedimento tiene una ventaja esencial: el resultado de un cálculo algebraico no es un número, como en aritmética, es un objeto matemático que proporciona los pasos a seguir para resolver todos los problemas que sólo se diferencian por el valor numérico de sus datos. Este objeto matemático es la fórmula: $\dfrac{14-a}{2}$

C4: Establecer relaciones entre distintas incógnitas

En el material empírico analizado no hay ningún problema en donde la respuesta pedida sea una relación entre incógnitas. Pero en realidad, se podría conjeturar que tampoco existen en los libros de texto que usan los profesores que enseñan en las escuelas secundarias. A continuación se presenta un ejemplo:

Ejemplo 1.9

Se tienen dos números distintos. A un número le resto 18 y al resultado lo divido por 3. Al otro número lo divido por 6 y luego le resto 6. Si al final obtengo el mismo resultado, ¿qué relación hay entre estos dos números? Si n y m son los números en cuestión, entonces se puede representar los datos del problema mediante dos expresiones algebraicas (o dos PCA):

$$\frac{n-18}{3} \text{ y } \frac{m}{6}-6$$

Si al final se obtiene el mismo resultado entonces se igualan las dos expresiones y se obtiene una ecuación que dará como resultado la relación pedida. Es decir, $n=\frac{m}{2}$ ó $m=2n$

En este problema cobra sentido el uso de símbolos y el planteo de una ecuación, ya que la tarea no consiste en hallar el valor numérico de una incógnita. La tarea es hallar la relación que existe entre dos incógnitas: el número inicial y el número final, mediante una ecuación.

1.4 Conclusiones

Las herramientas conceptuales que brinda la Teoría Antropológica de lo Didáctico posibilitaron el análisis de la organización matemática en torno a la resolución de problemas mediante ecuaciones, que se propone en una institución escolar determinada. Esta organización consiste, en un primer momento, en ejercitar el pasaje del lenguaje natural al simbólico. Luego, se trabaja en la resolución de problemas aplicando ecuaciones donde el estudiante debe generar una ecuación relativa a las condiciones del problema enunciado y arribar a un único resultado. Generalmente, se exige al estudiante que genere y manipule ecuaciones del tipo $a \cdot x \pm b = c \cdot x \pm d$, tarea que requiere un nivel consolidado de algebrización.

La noción de PCA permitió visualizar algunas cuestiones de tipo tecnológico (en el sentido de la TAD) que subyacen a los problemas que se sitúan en la primera etapa del proceso de algebrización. La lectura crítica del marco teórico posibilitó la elaboración de categorías para analizar los datos. De este análisis se puede concluir que los problemas recopilados no facilitan una explotación a pleno del potencial de la primera etapa del proceso de algebrización. Los problemas que se proponen tienden a estructurarse en función de la complejidad de la escritura algebraica que comportan, y esto no permite ampliar de forma controlada y "con sentido" los tipos de tareas que se necesitan para avanzar hacia niveles de algebrización superiores.

En resumen, se intentó mostrar en este trabajo que es posible hacer un planteamiento a nivel escolar en donde el álgebra sea interpretada como un instrumento de modelización que permite abordar tipos de problemas. Para que el estudiante se apropie progresivamente del instrumento algebraico debe existir un trabajo en profundidad con problemas aritméticos, ya que esto favorece la evolución hacia la utilización del álgebra como instrumento de modelización y, en definitiva, aumenta el grado de algebrización de algunas organizaciones matemáticas que se estudian en la escuela secundaria.

Bibliografía

[1] Bolea Catalán, P. *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral. Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 2003.

[2] Bolea P., Bosch M., Gascón P. *The role of algebraization in the study of a mathematical organization*. II Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Vol. II, p. 135-145. Osnabrück, 1999.

[3] Bolea P., Bosch M., Gascón P. *La transposición didáctica de Organizaciones Matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 21(3),247-304. Grenoble, 2001.

[4] Chevallard, Y. *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266. Grenoble, 1999.

[5] Chevallard, Y. *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire*. In Ducourtioux, Hennequin, (Eds.) La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire. París, 2005.

[6] Fonseca, C. *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo, 2004.

[7] García, F. *El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria*. XI Simposio SEIEM. La Laguna, 2008.

[8] Gascón, J.*Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 13(3), 295-332.Grenoble, 1993.

[9] Godino, J.; Castro, W.; Aké, L., Wilhelmi, M. *Naturaleza del razonamiento algebraico elemental*. Bolema, Río Claro, 26(42B), 483-511, 2012.

[10] Kieran, C., Filloy, E. *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Enseñanza de las Ciencias, 7(3), 229-240. Barcelona, 1989.

[11] Linchevski, L., Herscovics, N. "Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknow in the Context of Equations". Educational Studies in Mathematics, 30(1), 39-65, 1996.

[12] Lucas, C. Organizaciones matemáticas locales relativamente completas. Obtenido de `http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/DEA-Catarina-Lucas_versi%C3%B3n-`

preliminar.pdf.2010.

[13] Papini, M. *Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra*. Relime, 6(1), 41-71, 2003.

[14] Pillay, H., Wilss, L., Boulton-Lewis, G. "Sequential Development of Algebra Knowledge: A Cognitive Analysis". Mathematics Education Research Journal. 10(2), 87-102, 1998.

[15] Ruiz-Munzón, N. *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona, 2010.

[16] Ruiz-Munzón, N; Bosch, M., Gascón, J. *La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria*. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage (Eds), Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier, 2010.

[17] Sadovsky, P., Sessa, C. *The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a milieu for the emergence of new questions*. Educational Studies in Mathematics, 59, 85-112, 2005.