Descripción de niveles de comprensión del concepto *derivada*

Claudia Salazar Amaya*
Hernán Díaz Rojas**
Mauricio Bautista Ballén***

Artículo recibido: 15-09-2009 y aprobado: 12-11-2009

Describing understanding levels of the concept of *derivative*

Resumen: Este artículo presenta un estudio de caso que describe los niveles de comprensión del concepto *derivada* de seis estudiantes que cursaron el espacio académico *cálculo diferencial* en el II semestre de 2007 en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. El marco teórico utilizado se concentra en el desarrollo del esquema de *derivada* a través de tres niveles: Intra, Inter, Trans (Piaget y García, 1983, 1989). Se dedujo el nivel de comprensión alcanzado por los participantes a partir del análisis de las respuestas que dieron a diferentes problemas planteados en tres cuestionarios. Se encontró una tendencia en algunos a interpretar la derivada en términos del proceso algorítmico y también como dependencia de la expresión algebraica de la función. Por otra parte, se hicieron evidentes las dificultades para transitar de la gráfica de la función hacia la gráfica de la función derivada.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, aprendizaje del análisis, enseñanza y comprensión del cálculo, obstáculos, derivada, razón de cambio.

Abstract: This article presents a case study describing the understanding levels of derivative concept of six students who took the differential calculus course during the second semester of 2007 in a BA in mathematics at the Universidad Pedagógica Nacional. The theoretical framework used focuses on the development of the derivative scheme by using three levels: Intra, Inter, Trans (Piaget and Garcia, 1983, 1989). From the analysis of student responses to various issues raised in three questionnaires, the level of understanding achieved by students was inferred. It is remarkable that there are some students that tend to interpret the derivative in terms of algorithmic process as well as dependence of the algebraic expression of the function. On the other hand, it is clear that students reveal difficulties to move from function graph to derivative function graph.

Key words: Mathematics teaching, analysis learning, calculus teaching and understanding, obstacles, derivative.

* Profesor del Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. csalazar@pedagogica.edu.co

** Profesor del Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. hdiaz@pedagogica.edu.co

*** Profesor del Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. mbautist@pedagogica.edu.co

Introducción y antecedentes

En este artículo se presentan algunos resultados obtenidos en el proyecto de investigación "Análisis de obstáculos y descripción de niveles de comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional" relacionados con el estudio de los niveles de comprensión de la derivada logrados por un grupo de seis estudiantes de la universidad que cursaban el espacio de *cálculo diferencial*.

El interés por el desarrollo de este trabajo surge porque se identificaron dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje en el espacio académico de *cálculo diferencial* y por el reconocimiento de los planteamientos de Contreras et al. (2000, p. 1) acerca de que uno de los fenómenos didácticos característicos de la enseñanza del *análisis matemático* es la "algebrización del cálculo diferencial" que reduce el concepto *derivada* a las operaciones algebraicas y trata de forma simplista las ideas específicas del análisis, como la razón de cambio instantánea, obstaculizando la construcción de una comprensión compleja de la derivada.

A partir del análisis de los antecedentes, y de identificar en ellos dificultades y tensiones comunes a las experimentadas en los espacios académicos interesados en la formación inicial de profesores en torno a la derivada, y de las apreciaciones de profesores de matemáticas de la Universidad acerca de las dificultades que aparecen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto, parece necesario caracterizar diferentes niveles de comprensión, a partir de distintos tipos de tareas propuestas a estudiantes, con el propósito de modificar, a futuro, los procesos de instrucción en favor de la comprensión de dicha noción; este trabajo pretende aportar a esta tarea desde la identificación de diferentes niveles de comprensión de la derivada en el grupo mencionado.

Se plantearon como objetivos para abordar el estudio: desarrollar el marco conceptual pertinente para el análisis del problema en consideración; definir los instrumentos para la recolección de información teniendo en cuenta que se pretende llevar a cabo un estudio longitudinal sobre la comprensión de la derivada, es decir, del mismo grupo de estudiantes se recogerá información en tres momentos distintos de su acercamiento al concepto de derivada: después de su proceso de instrucción en la educación media, durante el desarrollo de un curso que aborda el estudio de la derivada y en los inicios del curso de cálculo integral; recoger y depurar la información obtenida a través de los instrumentos, definir categorías de análisis pertinentes para la información y elaborar el reporte del análisis de la información.

La población que es objeto del estudio está compuesta por seis de los 29 estudiantes que cursaron el espacio académico *cálculo diferencial* del Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el II semestre de 2007. Como antecedentes se consultaron documentos relacionados con algunas ideas previas del concepto de derivada, interpretaciones de dicho concepto y obstáculos en el aprendizaje del mismo, entre otros; de manera sintética se presentan a continuación los antecedentes más representativos.

En primer lugar, siguiendo a Dolores (1998), se reconocen diferentes concepciones de la *derivada* que pueden ser construidas por los estudiantes a partir de la información proporcionada por libros de texto y programas de estudio, algunas de éstas son: la derivada como el límite de la razón del incremento de la función cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero; como la pendiente de la tangente en un punto de una curva; como la velocidad o aceleración instantánea o como un algoritmo.

En este mismo sentido, Contreras (2000) plantea que la enseñanza del Cálculo ha sido, a veces, una ampliación de métodos algebraicos y no un estudio de la matemática del cambio, Contreras considera fundamental identificar concepciones de la derivada tales como: concepción de razón de cambio instantáneo, concepción geométrica (asociada históricamente a la idea de pendiente de la tangente de Fermat), concepción numérica (asociada históricamente a la idea de límite de Cauchy) y concepción algebraica (asociada al uso de los métodos algebraicos en el concepto de derivada).

Identificar las dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos en general, y de la derivada en particular, ha generado trabajos de investigación que pretenden describir como se transforma y evoluciona el acercamiento al objeto matemático, la teoría APOE de Dubinsky (citado por Meel, 2003) alude a la propuesta de Piaget sobre el proceso de abstracción reflexiva (que según Piaget, es el mecanismo mediante el cual un individuo se mueve de un nivel de comprensión a otro).

La teoría APOE (Acción–Proceso–Objeto–Esquema) establece que el desarrollo de la comprensión comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos en términos de acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas. En el desarrollo de un esquema se definen tres niveles particulares: Inter, Intra y Trans.

El nivel Intra se caracteriza por el enfoque de un solo objeto en aislamiento desde otras acciones, procesos y objetos. El nivel Inter se caracteriza por el conocimiento de las relaciones entre las distintas acciones, procesos, objetos y/o esquemas. El nivel Trans se caracteriza por la construcción de una estructura coherente que subyace en algunas de las relaciones descubiertas en el nivel Inter del desarrollo.

Badillo (2003) propone una revisión de la perspectiva de Dubinsky, replanteando los rasgos que la caracterizan en términos de acciones, procesos y objetos; desde dicha caracterización describe los niveles Intra, Inter y Trans para la comprensión de la derivada. Según Sánchez-Matamoros et al. (2008) los resultados de algunas investigaciones en las que se ha analizado el papel de las representaciones en la construcción de una comprensión de la idea de derivada, indican que los significados que construyen los alumnos están vinculados a determinados modos de representación y que tales significados no están conectados. En este sentido, afirman que los estudiantes pueden considerar los contextos gráficos y algebraicos como modos separados donde se aplican algoritmos sin relación para resolver problemas.

Marco teórico

La comprensión

En la actualidad se reconocen en el campo de la Educación Matemática, diferentes perspectivas respecto de la *comprensión*, Meel (2003) cita los autores y posturas dedicadas a este caso. La primera, propuesta por Bachelard (1938), Cornu (1991) y Sierpinska (1990), se refiere a la *comprensión* como la superación de obstáculos cognitivos (genéticos, didácticos y epistemológicos); la segunda perspectiva es aporte de Davis y Vinner (1986) y describe la comprensión como generador de imágenes del concepto y definiciones del concepto; la tercera perspectiva, propuesta por Kaput (1985) se refiere a la comprensión a través de operar con representaciones múltiples; la cuarta y última perspectiva, propuesta por Sfard (1991, 1992, 1994), propone la comprensión como construcción de las concepciones operativas y estructurales. Sánchez–Matamoros et al. (2006), afirman que un aspecto común en las teorías de comprensión, que de alguna manera caracteriza el pensamiento matemático avanzado, "es concebir la construcción de la comprensión de una noción matemática a través de la metáfora de la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a partir de un proceso que generalmente es realizado paso a paso".

Para la caracterización de los niveles de comprensión se tomaron las dos últimas perspectivas, lo que implica, por una parte, considerar que los sistemas de representación contribuyen en la comprensión de objetos matemáticos, de relaciones y procesos y que la comprensión se desarrolla a través del cambio de operación en el mundo de las operaciones físicas para operar en el mundo de las operaciones mentales. Por otra parte, implica considerar que la naturaleza dual (estructural –operacional) de los constructos matemáticos se advierte en las descripciones verbales y a través de varios tipos de representaciones simbólicas, de lo cual se infiere que la comprensión es la capacidad de percibir un proceso, ya no como una secuencia de actos físicos que se han interiorizado y condensado, sino como un objeto con estatus epistemológico en matemáticas.

De acuerdo con Dubinsky y McDonald (2001), la teoría APOE ha experimentado cambios a partir del análisis de datos y de la explicación de los mismos. Uno de estos cambios se relaciona con la incorporación de la triada propuesta por Piaget y García (1983, 1989, citados por Sánchez – Matamoros et al, 2006) y citada en los antecedentes en cuanto que trata los niveles Intra, Inter y Trans. En cada uno de estos niveles se produce la reorganización del conocimiento adquirido durante el nivel anterior. La progresión es gradual y no necesariamente lineal; a continuación se caracterizan los tres niveles:

- *Nivel Intra*: en este nivel se analizan los eventos particulares u objetos en términos de sus propiedades, los ejemplos son locales y cuando se establecen generalizaciones, éstas son simples. Por otra parte, aunque se realizan acciones repetitivas, éstas no establecen relaciones entre la acción y el sistema de condiciones a través del cual se pueden extender las aplicaciones.

- *Nivel Inter*: en este nivel el sujeto usa y compara las ideas que tiene aisladas y reflexiona acerca de ellas, lo cual lo lleva a construir relaciones y transformaciones. El sujeto puede establecer relaciones y deducir de una operación inicial, una vez la haya comprendido, otras operaciones que están implicadas o que pueden coordinarse con operaciones similares.
- *Nivel Trans*: aquí el estudiante reflexiona sobre las relaciones y desarrolla nuevas estructuras. A través de síntesis de las transformaciones en el nivel Inter, el estudiante construye y tiene conciencia de que el esquema está completo y puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en los otros niveles.

Interpretaciones del concepto de derivada

El concepto de *derivada* ha estado ligado históricamente con el estudio de problemas de variación, lo cual implica cuantificarla en un intervalo y en un instante, establecer diferencias en intervalos y conjeturar sobre las variaciones, entre otras acciones. En problemas físicos, la velocidad media puede ser considerada como el precedente de la velocidad instantánea; esta última a su vez es un caso particular de razones de cambio entre variables que dependen del tiempo. Las anteriores ideas, que van de lo particular a lo general, son fundamentales en el desarrollo del concepto de *derivada*.

La descomposición genética de un concepto, entendida como una descripción detallada en términos de las construcciones mentales, es una forma de organizar hipótesis acerca de cómo se produce el aprendizaje de los conceptos, por esta razón se denomina de esta forma a la trayectoria de aprendizaje hipotética de un concepto que permite conjeturar cómo se desarrolla la comprensión. De acuerdo con el modelo APOE, Asiala et al. (1997) sugieren que hay dos trayectorias que se relacionan entre sí, Gráfica y analítica, a partir de las cuales se construye el concepto de derivada. Desde estas trayectorias conciben la descomposición genética del concepto, como se describe a continuación:

Trayectoria gráfica y analítica de la derivada

1. a. Gráfica: acción de trazar una cuerda entre dos puntos de una curva, junto con la acción de calcular la pendiente de la secante que contiene a la cuerda.

1. b. Analítica: acción de calcular la razón de cambio media determinando el cociente diferencial.

2. a. Gráfica: interiorización de la acción 1.a. a un proceso simple en el que los dos puntos son cada vez más cercanos.

2. b. Analítica: interiorización de la acción 1.b. a un proceso simple como la diferencia cuando el intervalo de tiempo se hace cada vez más pequeño.

3. a. Gráfica: encapsulación del proceso 2.a. para obtener la recta tangente como la posición límite de las rectas secantes y determinar la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función.

3. b. Analítica: encapsulación del proceso 2.b. para determinar la razón instantánea de cambio de una variable con respecto a otra.

4. Encapsulación del proceso 2.a. y 2.b. para obtener la definición de derivada de una función en un punto como el límite del cociente diferencial en el punto.

5. Interpretación gráfica de la derivada en un punto.

- Necesidad de la fórmula de la función para derivar.
- $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente.
- Coordinar varias interpretaciones de la derivada.

6. Interpretación gráfica de la derivada como una función.

- La derivada vista como una función que a cada valor de *x* le hace corresponder la pendiente de $f(x)$ en $(x, f(x)$.
- Identificar $f'(x)$ con la recta tangente en cada punto.

7. Diversas coordinaciones para obtener la gráfica de la derivada.

- Interpretación gráfica de $f(x)$ para un valor de x.
- Interpretación de $f'(x)$ para un valor de *x* como la pendiente.
- Procesos cuando *x* varía en un intervalo.
- Trazado de la gráfica de la función derivada.

En la tabla 1 se presentan los rasgos característicos, que se consideraron en el estudio, de los niveles de comprensión de la derivada, en términos de los esquemas algebraico y gráfico de la derivada, los cuales como lo postula Badillo (2003, p. 76) son los que debe coordinar un individuo para tener un esquema consistente y coherente de la derivada.

Metodología

Esta investigación de tipo cualitativo interpretativo asume la propuesta de Fox (1981) sobre las etapas a considerar en el proceso de investigación: diseño, recolección de datos, análisis de datos y resumen de resultados. De acuerdo con lo expuesto, la investigación se organizó en cuatro etapas:

Etapa de diseño: caracterizada por la construcción de los fundamentos conceptuales del trabajo y la discusión y consolidación de instrumentos para el acopio de información; se llevó a cabo durante el primer año del proyecto, en esta fase se elaboraron los atributos y aspectos que se indagarían en el primer instrumento y se definieron la estructura y preguntas que lo conformarían.

Al analizar los aspectos que se indagarían en el instrumento final y que permitirían determinar la comprensión de los estudiantes sobre el objeto derivada, se incorporaron algunos elementos teóricos a la caracterización inicial de los cuestionarios, en esta oportunidad se consideraron cuatro asuntos adicionales:

- Interpretaciones atribuidas a la derivada. Este aspecto tiene que ver con la interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente, como razón de cambio, o como límite (a partir de su definición formal).
- Conocimiento procedimental en términos de habilidades y destrezas asociadas al cálculo de derivadas. Este contenido tiene que ver con el uso que el estudiante hace de las reglas de derivación y el uso que hace de teoremas o del método de derivación implícita, el cálculo de la derivada de la función inversa.
- Inclusión de la derivada en una red conceptual. Tiene que ver con las relaciones que el estudiante ha construido entre el concepto de derivada y otros conceptos como función y continuidad.
- Inclusión de la derivada como herramienta para la consecución de otro fin. Este asunto está relacionado con el uso de la derivada para el análisis de funciones (determinación de máximos, mínimos, concavidad, bosquejo de la gráfica de la función derivada).

Los aspectos definidos como componentes de la estructura de los cuestionarios se concretaron en la tabla 1 y permitieron clasificar las preguntas y establecer la pertinencia de cada una de ellas. Se determinaron los rasgos de la comprensión que serían explorados atendiendo a las características de la población en el momento de la aplicación. Los criterios para la construcción del instrumento final se inscriben en la teoría APOE y en la descomposición genética de la derivada, lo cual permitió determinar de manera específica los atributos y características de la derivada implícitos en cada pregunta. En el anexo 1 se presenta el cuestionario final.

Etapa de recolección de datos: se llevó a cabo durante el segundo semestre de 2007 y el primer semestre de 2008. El cuestionario inicial se aplicó a los 29 estudiantes que iniciaban el espacio académico de *cálculo diferencial* (de los cuales sólo se consideraron 6, los demás fueron considerados para la identificación de obstáculos, asunto que no se reporta en este artículo). Con este cuestionario se pretendía identificar, por una parte, los conocimientos previos de los estudiantes en cuanto al análisis de la variación, modelado de formas de variación a través de ciertas funciones y uso de diversos sistemas de representación de funciones, por otra parte, identificar también las ideas iniciales sobre derivada y las relaciones que podrían encontrar entre las diversas interpretaciones atribuidas a ésta.

El propósito del segundo cuestionario fue recoger información acerca del análisis que realizan los estudiantes respecto de la variación presentada en situaciones particulares, el uso de representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y algunos aspectos relacionados con la comprensión lograda sobre el objeto derivada. El cuestionario final se cualificó de acuerdo con los resultados de la aplicación experimental y su propósito fue el mismo de dicho instrumento.

Etapa de análisis y sistematización de resultados: se llevó a cabo desde la aplicación del primer cuestionario, debido a que los resultados de éste fueron fundamentales en la toma de decisiones para la construcción de los dos cuestionarios posteriores. Para el análisis de la información obtenida en los tres cuestionarios se consideraron los 6 estudiantes de la población que participaron en la aplicación de los tres cuestionarios, considerando que el seguimiento que podía hacerse de las respuestas de los tres instrumentos mejoraría las posibilidades de interpretación de las respuestas de los estudiantes.

La etapa de presentación de resultados: condujo al grupo de investigadores a la identificación de las respuestas que se consideran evidencia, que permitieron ilustrar las inferencias presentadas en el análisis acerca de la caracterización de los niveles de comprensión de los estudiantes del caso.

En la tabla 1 se presentan los distintos niveles de comprensión acerca de la derivada y las características que configuran a cada uno de éstos, clasificadas en dos tipos de esquemas, el algebraico y el gráfico. Algunas características tienen asociadas las preguntas del cuestionario final (no se incluyen en este artículo las correspondientes a los demás cuestionarios). Por ejemplo, 3.4 a. significa el literal a de la pregunta 4 del tercer cuestionario o cuestionario final.

Análisis de los resultados

El análisis de los resultados se realizó a partir de las respuestas de los estudiantes a los ítems propuestos en los cuestionarios descritos en la metodología. En cuanto a los niveles de comprensión, se realizó el análisis a partir de las respuestas de los 6 estudiantes, tomadas a manera de estudio de caso y luego se realizó un análisis global con base en las respuestas de los estudiantes.

Análisis de casos

En este aparte se presentan, a manera de ilustración, algunas respuestas ofrecidas por los estudiantes en el cuestionario final y se indica la característica correspondiente de acuerdo con la tabla 1.

Niveles de comprensión del esquema algebraico de la derivada

Nivel Intra

Para calcular $f'(a)$ se calcula primero $f'(x)$ y posteriormente se evalúa en *x=a*.

En la respuesta del estudiante 27 (figura 1) se observa que es capaz de determinar el valor de $f'(a)$ una vez que ha obtenido la expresión para $f'(x)$

Pregunta 4 (Cuestionario final)

(Transcripción de la respuesta del estudiante 27)

$$v(t) = (t+4)^{1/2}$$

$$v'(t) = \frac{1}{2}(t+4)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{(t+4)}} \text{ ; t=2 } \Rightarrow v'(2) = \frac{1}{2\sqrt{(2+4)}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

En t = 2 el volumen de agua cambia con rapidez $\frac{\sqrt{6}}{12}$ ya que la derivada $v'(t)$ en 2, es igual a ese valor.

Figura 1

Nivel Inter

No han construido la relación entre la derivada como función y la derivada en un punto.

En la respuesta del estudiante 7 a la pregunta 4 del cuestionario final (figura 2) se observa que aunque se le proporciona la expresión algebraica para la función, para determinar la razón de cambio instantánea en un punto, no determina la función derivada, sino que encuentra una razón de cambio media a partir de dos valores.

Pregunta 4 (Cuestionario final)

Se vierte agua en un recipiente cilíndrico por medio de un sistema de dos grifos, los cuales no siempre permanecen abiertos. La función que representa el volumen de agua vertida en el reci-piente en m3 con respecto al tiempo (minutos) es

$$v(t) = \begin{cases} \sqrt{t+4} & 0 \le t \le 5 \\ 3 & 5 \le t \le 10 \end{cases}$$

b. Con qué rapidez cambia el volumen de agua en t =2? Explique su respuesta.
(Transcripción de la respuesta del estudiante 7)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2-1} = 0{,}21 m^3/s$$

La rapidez hace referencia a este valor ya que esta hace referencia al cambio de altura sobre cambio en tiempo.

Figura 2

Nivel Trans

Entienden la función derivada como una función que a cada valor de *x* le hace corresponder la derivada de $f(x)$ en dicho punto del dominio y que sobre ella se pueden realizar otras operaciones como la segunda derivada.

Como se ilustra en la pregunta de la figura 3 y la respectiva respuesta del estudiante 7, para determinar que una función cumple con las condiciones establecidas, el alumno determina la función derivada de la función propuesta, calcula su valor para algún punto del dominio y a partir de la primera derivada determina la segunda derivada.

Pregunta 6 (Cuestionario final)

6. Encuentre una función real f que cumpla las siguientes condiciones. Para todo x,

$f''(x) < 0$, $f'(0) = -1$ y $f'(1) = -3$

(Transcripción de la respuesta del estudiante 7)

$$-2x - 1 = 0$$

Una función que cumple las condiciones planteadas es

$-x^2 - x = y$

$f'(x) = -2x - 1 = y$

$f'(0) = -2(0) - 1 = -1$

$f'(1) = -2(1) - 1 = -3$

$f''(x) = -2$ y por tanto $f''(x) < 0$

Figura 3

Niveles de comprensión del esquema gráfico de la derivada

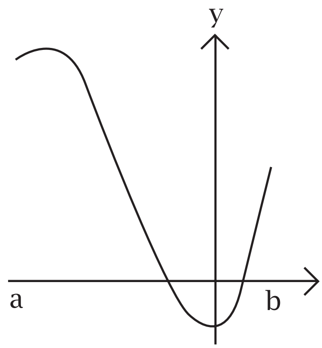
Nivel Intra

Calculan el signo y aplican el criterio de la primera derivada pero no generalizan la técnica para hacer la representación gráfica de la función derivada.

El estudiante 17 responde los literales a y b de la pregunta que se presenta en la figura 4, en términos de la derivada de la función relacionada con la representación gráfica; sin embargo, el esbozo de la representación gráfica de la función derivada no concuerda con los resultados anotados por el estudiante en los literales anteriores, esto significa que el estudiante no relaciona los criterios de la primera derivada con las implicaciones de éstos para la representación gráfica.

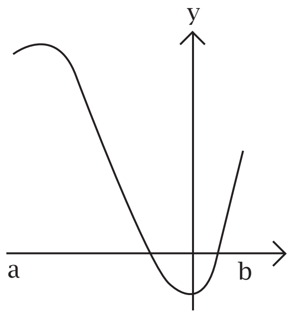
Pregunta 3 (Cuestionario final)

Las siguientes gráficas corresponden a la misma función *f* en el intervalo $[a,b]$



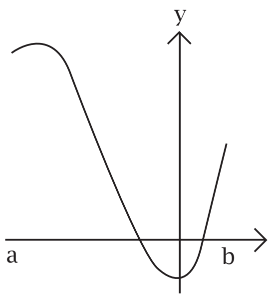
Gráfica A

a. En la gráfica A ubique un punto de la curva donde se encuentre la mayor de las pendientes de sus rectas tangentes. Explique su respuesta.
La respuesta dada es: "En b ya que al derivar la función y reemplazarla por b la pendiente es mayor que las demás."



Gráfica B

b. En la gráfica B ubique los puntos donde la derivada es cero. Explique su respuesta.
La explicación dada es: "Ya que en los puntos c y en d son los máximos y mínimos de la función."



Gráfica C

c. En la gráfica C ubique los intervalos donde la segunda derivada es positiva. Explique su respuesta.
La respuesta dada es: "En el intervalo $[c,b]$ ya que la segunda derivada determina puntos de inflexión o cambio de curvatura."

Esboce la gráfica de la función derivada. Explique.

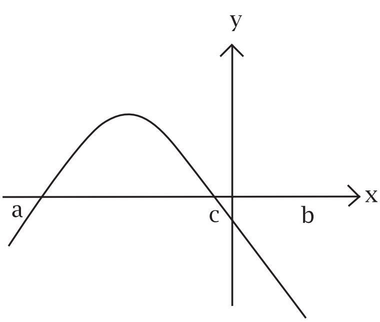


Figura 4

La respuesta dada es: "Ya que si f tiene ese comportamiento inicia en -∞ y termina en -∞ luego la debe iniciar en ∞ y terminar en -∞ "

Nivel Inter

Diferencian entre la variación media y la variación instantánea en diferentes contextos.

De la respuesta ofrecida por el estudiante 27 a la pregunta que se presenta en la figura 5, se infiere que establece diferencia entre variación media y variación instantánea, pues a partir de los posibles valores para la rapidez media, indica el instante en el cual la rapidez toma determinado valor en un instante.

Pregunta 2 (Cuestionario final)

Dos recipientes de diferente forma en los que la máxima altura que puede alcanzar el nivel del agua es 400 mm se encontraban inicialmente vacíos. En la tabla se registran las alturas del nivel del agua con respecto al punto más bajo en los primeros nueve segundos

Tiempo en segundos		**0**	**1**	**2**
Altura del nivel del agua	Recipiente A	0	13	39
	Recipiente B	0	1	6

Tiempo en segundos		**3**	**4**	**5**
Altura del nivel del agua	Recipiente A	65	91	117
	Recipiente B	16	31	51

Tiempo en segundos		**6**	**7**	**8**	**9**
Altura del nivel del agua	Recipiente A	143	169	195	221
	Recipiente B	76	106	141	181

a. Estime en qué instantes de tiempo la altura del nivel del agua de los dos recipientes aumenta con la misma rapidez. Explique su respuesta.
(Transcripción de la respuesta del estudiante 27):
"Aproximadamente en 6 segundos, tal vez un valor mayor pero muy cercano a 6 seg, debido que entre 5 y 6 seg el recipiente B aumenta 25 mm y el recipiente A aumenta 26 mm, pero en el siguiente intervalo 6 y 7 seg, el recipiente A aumenta de nuevo 26 mm y el recipiente B aumenta 30 mm."

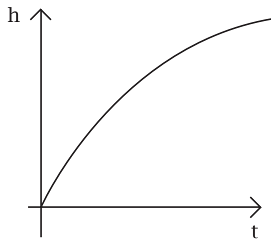
Figura 5

Construyen la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de la función aplicando el criterio de la primera derivada para describir la variación local y global de la función.

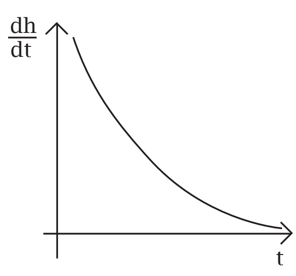
En la respuesta del estudiante 27 a la pregunta que se presenta en la figura 6, se observa que realiza una descripción de la forma en que obtiene la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función. En tal descripción incluye que la variación de la pendiente de la tangente disminuye, razón por la cual la gráfica de $f'(x)$ es decreciente. También incluye en su descripción que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo.

Pregunta 1 (Cuestionario final)

(Transcripción de la respuesta del estudiante 27)



"La gráfica es una curva cóncava hacia abajo y creciente debido a que a medida que pasa el tiempo la altura va aumentando, pero así mismo la rapidez con que aumenta la altura va disminuyendo debido a la forma semiesférica del recipiente."



"Como la rapidez representa la derivada de la altura en función de el tiempo, la gráfica es decreciente porque la rapidez va disminuyendo a medida que pasa el tiempo y además porque la gráfica de la altura en función del tiempo es cóncava hacia abajo, es decir que los valores de la pendiente se van haciendo cada vez más pequeños y esto se refleja en que la gráfica de la rapidez en función del tiempo es decreciente."

Figura 6

Nivel Trans

Interpretan los cambios que se producen en los puntos críticos cuando la función se somete a transformaciones.

En las respuestas ofrecidas por el estudiante 7 a las preguntas relativas al enunciado que se muestra en la figura 7, se observa que se establece relación entre las transformaciones que experimenta la gráfica de la función y los cambios que experimentan los puntos críticos.

Pregunta 5 (Cuestionario final)

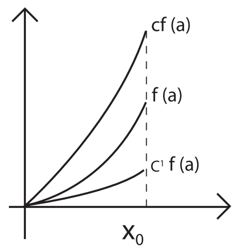
Suponga que la función real $f(x)$ tiene un único punto crítico en x_0. En cada ítem se define una función $g(x)$, determine el valor de x en el que se encuentran los puntos críticos de, en cada caso (Transcripción de la respuesta del estudiante 7):

a. $g(x) = f(x) + c$ Explique su respuesta.

"En este caso el punto crítico de $g(x)$ será trasladado c unidades hacia arriba, ya que en general estamos diciendo que $g(x)$ es una transformación de $f(x)$."

b. $g(x) = cf(x)$ Explique su respuesta.

"El punto crítico de $g(x)$ es simplificado o elongado respecto al eje y."



c. $g(x) = f(x + c)$ Explique su respuesta.

"El punto crítico de $g(x)$ es trasladado c unidades hacia la izquierda, esto puesto que como en los casos anteriores $g(x)$ es una transformación de $f(x)$."

Figura 7

Cabe resaltar que en los casos analizados solamente uno de los estudiantes muestra los rasgos característicos de la derivada en el nivel Trans.

Análisis del grupo con respecto a los niveles de comprensión del concepto de derivada

A continuación se presenta el análisis de las respuestas ofrecidas por los seis estudiantes a quienes se les aplicaron los tres cuestionarios, en relación con cada una de las categorías que determinan los niveles de compresión. En algunas se indica las que hacen referencia al cuestionario final.

Tabla 1. Niveles de comprensión

Rasgos característicos	Descripción a partir de los resultados
Nivel Intra - Esquema algebraico de la derivada.	
No establecen relación entre $f'(x)$ y $f'(a)$ en las aplicaciones de razón de cambio o de pendiente de una recta. Preguntas 3.4 b, c, d. y 3.7	Dos de los estudiantes obtienen una expresión para la derivada de la función, sin embargo, para determinar la razón de cambio instantánea para un valor determinado recurren a la variación media y no determinan el valor de la derivada en el punto de interés.
Tienen una única interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica.	Aunque cuatro estudiantes interpretan la derivada como la pendiente de la tangente a la gráfica, se observa cierta tendencia a interpretar la derivada en términos del algoritmo utilizado para realizar cálculos, o bien mediante la definición por medio del límite.
Para calcular $f'(a)$ se calcula primero $f'(x)$ y posteriormente se evalúa en $x = a$. Pregunta 3.4	En las preguntas en que se indagó por el valor de la derivada en un punto, en términos de la razón de cambio instantánea para algún valor de la variable independiente, se observa que los estudiantes determinan primero $f'(x)$ para obtener posteriormente el valor de $f'(a)$. Cabe aclarar que las preguntas planteadas en este sentido proporcionan la función en su representación algebraica, sin embargo se observa esta tendencia aún en los puntos en los cuales la función derivada no existe.
No coordinan la razón de cambio, la pendiente de la recta y el límite de las tasas medias de variación, entendidas tanto números y como funciones. Pregunta 3.2.	En las situaciones en las cuales se propone a los estudiantes determinar la razón instantánea de cambio, se observa que intentan determinar la razón media de cambio como una cantidad a partir de dos valores de la variable independiente y sus respectivos valores de la variable dependiente, sin embargo no hacen uso de intervalos cada vez más pequeños para la variable independiente ni hacen mención a la derivada como función.
Confunden $f'(x)$ con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto fijo.	Los estudiantes interpretan la derivada en cada punto como la pendiente de la tangente, lo cual significa que no presentan confusión entre la expresión obtenida para la derivada y la ecuación de la recta tangente.
Utilizan la razón de cambio sólo en situaciones de velocidad instantánea. Pregunta 3.2	Cuando los estudiantes abordan situaciones referidas a la velocidad presentan menor dificultad para resolverlos que en aquellas referidas a la rapidez de cambio en otras situaciones, como en la pregunta 2 del cuestionario final, referida al llenado de un recipiente.
Aplican tanto las reglas de derivación como la definición del límite de las razones de cambio pero no son concientes de la relación entre las dos	No se observa tendencia de los estudiantes para determinar la derivada por medio de la definición del límite del las razones de cambio, por lo general acuden a las reglas de derivación.

Tabla 1. Niveles de comprensión	
Rasgos característicos	**Descripción a partir de los resultados**
Nivel Inter - Esquema algebraico de la derivada	
No han construido la relación entre la derivada como función y la derivada en un punto. Pregunta 3.4	Los estudiantes que determinan el valor de la razón de cambio instantánea a partir de la expresión algebraica de la función, posteriormente calculan la razón de cambio para determinado valor a partir de dicha función, sin embargo, se observa que aunque algunos estudiantes determinan la expresión para la función derivada, no la tienen en cuenta para el cálculo de la razón instantánea de cambio, sino que utilizan expresiones relacionadas con la razón de cambio media.
Asocian a la función derivada la interpretación según la cual a cada valor de x del dominio le corresponde el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.	Se observa que cuatro de los estudiantes asocian los valores de la derivada en cada punto con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, inclusive cuando son interrogados por el significado de la derivada en un punto particular lo afirman explícitamente.
Interpretan la pendiente como el coeficiente en la ecuación de la recta tangente. Pregunta 3.7	Los estudiantes asocian la pendiente de la curva en un punto con el coeficiente de la recta tangente. Uno de los estudiantes no determina el valor de dicha pendiente, sin embargo, en la expresión para la recta, la reemplaza por la expresión algebraica obtenida.
Hacen uso coordinado de la pendiente de la recta tangente y la razón de cambio en algunos contextos particulares, no en todos. Pregunta 3.2	Sólo un estudiante establece relaciones entre la pendiente de la recta tangente y la razón de cambio en situaciones que se refieren a velocidad instantánea y a razón de cambio instantánea.
Aplican correctamente las reglas de derivación y justifican el uso de las mismas Pregunta 3.4 b y 3.7	Por lo general, la justificación del uso de las reglas de derivación se observa a través del seguimiento de pasos secuenciales para la resolución de problemas.
Nivel Trans - Esquema algebraico de la derivada	
Entienden la función derivada como una función que a cada valor de x le hace corresponder la derivada de $f(x)$ en dicho punto del dominio y que sobre ella se pueden realizar otras operaciones como la segunda derivada. Pregunta 3.6	Cuatro de los estudiantes consideran que la primera derivada es una función y que la segunda derivada se obtiene a partir de la primera derivada, sin embargo, no establecen la relación en torno a las propiedades que debe cumplir la función a partir de las características de la primera y la segunda derivada.
Hacen traducciones entre diferentes representaciones de las funciones y de las funciones derivada. Pregunta 3.6	Sólo dos estudiantes realizan traducciones entre diferentes representaciones de la función y de la función derivada para proponer una función con las condiciones presentadas para la función que han de conseguir como ejemplo.

Tabla 1. Niveles de comprensión	
Rasgos característicos	**Descripción a partir de los resultados**
Manejan, coordinan y justifican las técnicas de derivación, directas e indirectas, e interpretan los resultados obtenidos. Pregunta 3.7	Los estudiantes presentan dificultades en la interpretación de los resultados obtenidos. Además, algunos no aplican adecuadamente el procedimiento de derivación implícita. La justificación de la aplicación de las técnicas se determina a través de la secuencia de pasos seguidos en el procedimiento.
Nivel intra - Esquema gráfico de la derivada	
Calculan el signo y aplican el criterio de la primera derivada pero no generalizan la técnica para hacer representación gráfica de la función derivada. Preguntas 3.1 y 3.3 d en relación con 3 a, b, c	Los estudiantes, excepto uno, determinan el signo y aplican el criterio de la primera derivada, sin embargo no hacen una representación adecuada de la gráfica de la función derivada. De este hecho se infiere que aunque utilizan el criterio de la primera derivada para referirse a algunos puntos de la gráfica, no hacen generalizaciones en torno a lo global. Por otra parte, dada la gráfica de la función, se observa que algunos estudiantes no construyen la gráfica de la función derivada aunque describen los cambios que experimenta la razón de cambio en algunos puntos. En el caso particular de razones de cambio negativas se encuentra que hay mayor dificultad que cuando se trata de razones de cambio positivas.
No esbozan la gráfica de la función derivada a partir de la función sin antes pasar por la gráfica de la función, la expresión simbólica de la función, la expresión simbólica de la derivada y posteriormente la representación gráfica de la función derivada.	Determinar la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función es una tarea que resulta de mayor dificultad para los estudiantes. Se observa en sus respuestas una tendencia a asociar la gráfica de la función con una expresión algebraica a partir de la cual se puede obtener una expresión para la función derivada y posteriormente encontrar la gráfica de la función derivada.
Presentan dificultades en la resolución de problemas de razón de cambio a partir de la información gráfica de la función. Pregunta 3.1	En las respuestas de los estudiantes a las preguntas que requieren obtener características de la razón de cambio a partir de la gráfica de la función, se observa que los estudiantes tienen dificultades, en particular cuando se trata de razones de cambio negativas. Por otra parte, se encuentra que no se obtiene el valor de la razón de cambio instantánea, en virtud de que, como afirma un estudiante, se requiere que transcurra un tiempo.
Determinan en una gráfica los puntos en los que la derivada de la función toma valores máximos, mínimos o nulos. Sin embargo, no pueden construir la gráfica de la función derivada. Pregunta 3.3	Para los estudiantes, en general, resulta de menor dificultad determinar los puntos críticos de la función, sin embargo, no pueden construir la gráfica de la función derivada a partir de esta información.
En algunos contextos tienden a confundir la variación media con la variación instantánea. Pregunta 3.2	A partir de la gráfica, se observa en las respuestas que los estudiantes buscan la razón de cambio instantánea a partir de la variación media. Por otra parte, algunos estudiantes al ser indagados acerca del instante en que la razón de cambio es máxima o mínima responden en términos de un intervalo y no de un instante.

Tabla 1. Niveles de comprensión

Rasgos característicos	Descripción a partir de los resultados
Nivel inter - Esquema gráfico de la derivada	
Pueden coordinar gráficamente el objeto pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto con el objeto razón de cambio en un punto, para magnitudes diferentes al espacio que dependen del tiempo.	Se observa que dos estudiantes asocian la razón de cambio instantánea con la pendiente de la recta tangente a la gráfica en determinado punto.
Diferencian entre la variación media y la variación instantánea en diferentes contextos. Pregunta 3.2	Los estudiantes tienden a determinar el valor de la variación instantánea a partir de la variación media. Sólo un estudiante recurre a la gráfica de la función que representa la situación para construir la gráfica de la recta tangente y, a partir de su pendiente, calcular la razón de cambio instantánea.
Interpretan la gráfica de la recta tangente como el límite de las rectas secantes y como la recta más próxima a la gráfica de la función en el entorno de un punto.	Dos estudiantes consideran que aunque los puntos de corte de una recta secante a la gráfica de la función, sean cada vez más cercanos, siempre se tendrá una secante y no consideran que la tangente sea el caso límite de las rectas secantes en esta situación.
Construyen la grafica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de la función aplicando el criterio de la primera derivada para describir la variación local y global de la función. Pregunta 3.3 y 3.6	Se observa que los estudiantes aplican el criterio de la primera derivada para determinar los puntos en los cuales la derivada es cero o es máxima, sin embargo, a nivel global, con excepción de un estudiante, no pueden establecer relación entre los resultados que se obtienen a partir de la aplicación de dicho criterio y la forma de la gráfica de la función derivada.
Nivel Trans - Esquema gráfico de la derivada	
Interpretan los cambios que se producen en los puntos críticos cuando la función se somete a transformaciones Pregunta 3.5	En general se observa que los estudiantes predicen correctamente el comportamiento de los puntos críticos de una función cuando se somete a transformaciones, salvo en el caso de la función que se obtiene a partir de la transformación $g(x) = f(cx)$.
Manejan con propiedad los criterios de la primera y segunda derivada para describir tanto la variación local como la variación global de una función representada gráficamente. Lo anterior le permite transitar de la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada. Pregunta 3.6	Las preguntas en las que se debe relacionar las características de la primera y la segunda derivada en relación con la gráfica de la función son las que resultan de mayor dificultad para los estudiantes, si bien teóricamente establecen qué información proporcionan la primera y la segunda derivada, no les resulta fácil transitar de la gráfica de la función hacia la gráfica de la función derivada. Al igual que en el nivel trans del esquema algebraico, cabe decir que se observa dificultad de los estudiantes en la construcción de funciones, dadas algunas características para las funciones primera y segunda derivada.

Conclusiones

En cuanto a los niveles de comprensión del esquema algebraico de la derivada

- Dos estudiantes que determinan una expresión para la derivada de una función, obtienen la razón de cambio instantánea por medio de la variación media y no como el valor de la derivada en el punto de interés. En estos estudiantes se observa una tendencia a interpretar la derivada en términos del proceso algorítmico utilizado para obtenerla, dejando de lado la interpretación como la razón de cambio instantánea o como la pendiente de la recta tangente. No obstante, cabe decir que la interpretación más común de la derivada en el grupo de estudiantes, se relaciona con la pendiente de la recta.
- Se observa dependencia a la expresión algebraica para describir la razón de cambio de una función, lo cual concuerda con la denominada algebrización del cálculo diferencial y la concepción algebraica aludidas en los antecedentes. En las funciones a trozos, en las que no existe la derivada en algunos puntos, tienden a calcular la derivada a partir de la expresión algebraica para los intervalos y no indican que la derivada no existe.
- En las situaciones que se refieren a la velocidad instantánea se obtienen más respuestas acertadas que cuando la situación se refiere a la razón de cambio de otras variables diferentes a la posición de un objeto en movimiento.

La justificación de los estudiantes acerca del uso de las reglas de derivación, se basa en una descripción de los pasos seguidos para la resolución de problemas. En este mismo sentido, algunos estudiantes obtienen la función segunda derivada a partir de la primera derivada, sin embargo, no establecen la relación en torno a las propiedades que debe cumplir la función $f(x)$ en algunos intervalos del dominio.

En cuanto a los niveles de comprensión del esquema gráfico de la derivada

- Se observa que a partir de la gráfica de la función, los estudiantes determinan el signo de la derivada en cada punto, aplican el criterio de la primera derivada, indican en la gráfica los puntos críticos, sin embargo, no obtienen la representación gráfica de la función derivada. En este sentido, se infiere que se les dificulta hacer generalizaciones de lo global. Por otra parte, se observa una tendencia de los estudiantes a asociar la gráfica de la función con una expresión algebraica conocida para luego determinar la expresión algebraica de la derivada y posteriormente construir la gráfica de la función derivada.
- En problemas en los que se pide al estudiante construir la gráfica de la derivada a partir de situaciones en determinados contextos, se observa mayor dificultad cuando los valores de la derivada son negativos.
- En situaciones en las que se suministra la información a través de una representación gráfica, los estudiantes tienen dificultades para asociar la razón de cambio instantánea con la pendiente de la tangente a la gráfica de la función. En el mismo sentido, tres estudiantes no consideran que cuando los puntos de corte de una recta secante a la gráfica de la función son cada vez más cercanos, la tangente es el caso límite de las rectas secantes.
- Aunque los estudiantes establecen teóricamente la información que proporcionan la primera y la segunda derivada, no les resulta fácil transitar de la gráfica de la función hacia la gráfica de la función derivada. En este sentido, se observa una dificultad en los estudiantes para la construcción de funciones cuando conocen algunas características de las funciones primera y segunda derivada. Estas caracterizaciones concuerdan con lo descrito en los antecedentes en cuanto a la forma en que los estudiantes consideran los contextos gráficos y algebraicos en forma separada.

Bibliografía

Asiala, M., J. Cottrill., y E. Dubinsky. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (4), 399-431.

Bachelard, G. (1983). *La formación del espíritu científico.* Buenos Aires: Editorial Siglo XXI.

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y objeto de enseñanza y aprendizaje. En Profesores de Colombia. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona.

Contreras, A. et al. (2000). Concepciones y obstáculos en la noción de derivada. Análisis de un manual de 2º de Bachillerato-Logse. *IX congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "THALES".* San Fernando (Cádiz).

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes en sus cursos de cálculo. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II.* México D. F: Grupo Editorial Iberoamérica, 257-272.

Reconocimiento

En el proyecto "Análisis de obstáculos y descripción de niveles de comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional" participaron los autores del presente artículo y los profesores José Torres Duarte y Edwin Alfredo Carranza Vargas. Se contó con la participación de los estudiantes del Proyecto Curricular de la Licenciatura en Matemáticas Sandra Carolina Sánchez Suesca, Yully Maritza Martínez Hernández, Carolina María Luque Zabala, Jorge Edwin Lasso Rosa y Juan Carlos Jiménez Ruiz.

Dubinsky, E. & M. Mc Donald. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 275-282.

Fox, D. (1981). *El proceso de investigación en educación.* Pamplona: Editorial Eunsa.

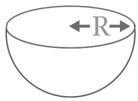
Meel, D. (2003, Julio). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime* Vol. 6, No. 3, 221-271.

Sánchez – Matamoros, G., M. Blanco., y S. Llinares. (2006). El desarrollo del esquema de derivada, *Enseñanza de las Ciencias.* 24 (1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., M. García., y S. Llinares. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 11(2), 267-296.

Anexo 1. Caracterización del cuestionario final

Pregunta 1



Un depósito de agua con forma de semiesfera cuyo radio es R se empieza a llenar por medio de un grifo que vierte agua con rapidez constante de L litros por minuto.

Caracterización de acuerdo con los niveles de comprensión

Esquema gráfico de la derivada.

- Determinación del signo y aplicación del criterio de la primera derivada para hacer representación gráfica de la función derivada.
- Esbozo de la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función.
- Resolución de problemas de razón de cambio a partir de la información gráfica de la función.

Pregunta 2

Dos recipientes de diferente forma en los que la máxima altura que puede alcanzar el nivel del agua es de 400 mm, se encontraban inicialmente vacíos. En la tabla se registran las alturas del nivel del agua con respecto al punto más bajo en los primeros nueve segundos

Tiempo en segundos		0	1	2
Altura del nivel del agua	Recipiente A	0	13	39
	Recipiente B	0	1	6

Tiempo en segundos		3	4	5
Altura del nivel del agua	Recipiente A	65	91	117
	Recipiente B	16	31	51

Tiempo en segundos		6	7	8	9
Altura del nivel del agua	Recipiente A	143	169	195	221
	Recipiente B	76	106	141	181

a. Estime en qué instantes de tiempo la altura del nivel del agua de los dos recipientes aumenta con la misma rapidez. Explique su respuesta.

b. Estime en qué intervalos de tiempo la rapidez con la que crece la altura del nivel del agua del recipiente A es menor que la rapidez con la que crece la altura del nivel del agua del recipiente B. Explique su respuesta.

c. En el momento en que el cronometro indica 3 segundos, ¿en cuál de los dos recipientes aumenta la altura con mayor rapidez? Explique su respuesta

d. De mantenerse la regularidad observada, conjeture cuál de los dos recipientes se llena en menor tiempo. Explique su respuesta.

Caracterización de acuerdo con los niveles de comprensión

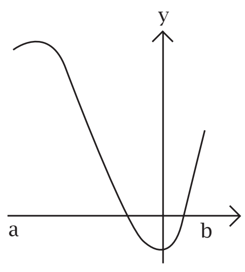
Esquema algebraico de la derivada

- Uso coordinado de la pendiente de la recta tangente y la razón de cambio en algunos contextos particulares, no en todos.
- Coordinación entre la razón de cambio, la pendiente de la recta y el límite de las tasas medias de variación, entendidas como números y como funciones.

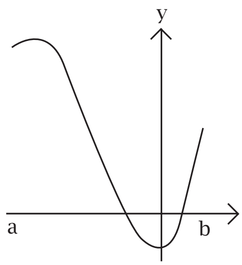
Esquema gráfico de la derivada

- Diferencia entre la variación media y la variación instantánea en diferentes contextos.
- Coordinación gráfica entre el objeto pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto, con el objeto razón de cambio en un punto, para magnitudes diferentes al espacio que dependen del tiempo.

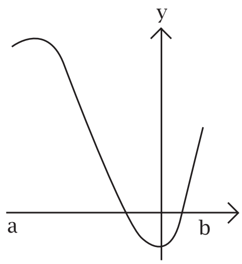
Pregunta 3



a. En la gráfica A ubique un punto de la curva donde se encuentre la mayor de las pendientes de sus rectas tangentes. Explique su respuesta.



b. En la gráfica B ubique los puntos donde la derivada es cero. Explique su respuesta



c. En la gráfica C ubique los intervalos donde la segunda derivada es positiva. Explique su respuesta

Caracterización de acuerdo con los niveles de comprensión

Esquema gráfico de la derivada

- Determinación del signo y aplicación del criterio de la primera derivada para hacer representación gráfica de la función derivada.
- Determinación en una gráfica de los puntos en los que la derivada de la función toma valores máximos, mínimos o nulos y a partir de ello, construcción de la gráfica de la función derivada.
- Construcción de la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de la función aplicando el criterio de la primera derivada para describir la variación local y global de la función.
- Manejo con propiedad de los criterios de la primera y segunda derivada para describir tanto la variación local, como la variación global de una función representada gráficamente. Lo anterior permite transitar de la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada y viceversa.

Pregunta 4

Se vierte agua en un recipiente cilíndrico por medio de un sistema de dos grifos, los cuales no siempre permanecen abiertos. La función que representa el volumen de agua vertida en el recipiente en m^3 con respecto al tiempo (minutos) es:

$$V(t) = \begin{cases} \sqrt{t+4} & 0 \le t \le 5 \\ 3 & 5 < t \le 10 \end{cases}$$

a .¿En cuál de los dos intervalos de tiempo [0, 5], [5,10] se introduce mayor cantidad de agua? Explique su respuesta.

b. ¿Con qué rapidez cambia el volumen de agua en t = 2? Explique su respuesta.

c. ¿En qué instante el volumen de agua en el recipiente cambia con mayor rapidez? Explique su respuesta.

d. ¿Qué puede decir de la rapidez de cambio del volumen en el instante t=5? Explique su respuesta.

e. ¿Cuál es el volumen máximo de agua que se vierte en el recipiente? Explique su respuesta.

Caracterización de acuerdo con los niveles de comprensión

Esquema algebraico de la derivada.

- Aplicación de las reglas de derivación y de la definición del límite de las razones de cambio y relación entre las dos.
- Relación entre la derivada como función y la derivada en un punto.
- Relación entre $f'(x)$ y $f'(a)$ en las aplicaciones de razón de cambio o de pendiente de una recta.

- Cálculo de $f'(a)$.
- Aplicación correcta de las reglas de derivación y justificación del uso de las mismas.
- Relación entre $f'(x)$ y $f'(a)$ en las aplicaciones de razón de cambio o de pendiente de una recta.

Pregunta 5

Suponga que la función real $f(x)$ tiene un único punto crítico en x_0. En cada ítem se define una función $g(x)$, determine el valor de **x** en el que se encuentran los puntos críticos de $g(x)$, en cada caso

a. $g(x) = f(x) + c$ Explique su respuesta.
b. $g(x) = cf(x)$ Explique su respuesta.
c. $g(x) = f(x+c)$ Explique su respuesta.
d. $g(x) = f(cx)$ Explique su respuesta.

Caracterización de acuerdo con los niveles de comprensión

Esquema gráfico de la derivada

- Interpretación de los cambios que se producen en los puntos críticos cuando la función se somete a transformaciones.

Pregunta 6

Encuentre una función real *f* que cumpla las siguientes condiciones: Para todo *x*, $f''(x) < 0$, $f'(0) = -1$ y $f'(1) = -3$.

Caracterización de acuerdo con los niveles de comprensión

Esquema algebraico de la derivada

Consideración de la función derivada como una función que a cada valor de x le hace corresponder la derivada de $f(x)$ en dicho punto del dominio sobre el cual se pueden realizar otras operaciones como la segunda derivada.

Traducción entre diferentes representaciones de la función y de la función derivada.

Esquema gráfico de la derivada

Construcción de la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de la función aplicando el criterio de la primera derivada para describir la variación local y global de la función.

Manejo con propiedad de los criterios de la primera y segunda derivada para describir tanto la variación local, como la variación global de una función representada gráficamente. Lo anterior permite transitar de la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada y viceversa.

Pregunta 7

El conjunto de todos los puntos (*x*, *y*) tales que $e^y - y = x$ forma una cierta curva en el plano. Existe un punto en el que la recta tangente a la curva es perpendicular al eje *x*, encuentre este punto. Explique su respuesta.

Caracterización de acuerdo con los niveles de comprensión

Esquema algebraico de la derivada

Relación entre $f'(x)$ y $f'(a)$ en las aplicaciones de razón de cambio o de pendiente de una recta.

Interpretación de la pendiente como el coeficiente en la ecuación de la recta tangente.

Aplicación correcta de las reglas de derivación y justificación del uso de las mismas.

Manejo, coordinación y justificación de las técnicas de derivación, directas e indirectas, e interpretación de los resultados obtenidos.